21世纪高等院校教材

概率论与数理统计

主　编　杨洪礼　胡运红

副主编　邵泽军　马艳琴　吴文英

科学出版社

21 世纪高等院校教材

概率论与数理统计

主　编　杨洪礼　胡运红
副主编　邵泽军　马艳琴　吴文英

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书是应用型本科基础课程教材，同时也是省级精品课程建设教材，是针对普通高等学校应用型本科教学的概率论与数理统计课程编写的. 全书以易于学生接受的方式介绍概率论与数理统计的基本内容，并突出概率论与数理统计中主要内容的思想方法. 本书的特色之一为注意加强与突出基本概念的教学，作为本书的另外一个特色，在每章的内容中穿插介绍了与本章内容有关的一些背景知识或应用实例，旨在加深学生对概率统计内容的了解，扩大学生的视野. 每章的习题选择也比较新颖，增加了一些与科技及日常生活有关的习题，有助于培养学生解决问题的能力，并为不同层次的学生提供了不同程度的习题. 为提高学生应用计算机解决问题的能力，附录中介绍了概率论与数理统计中数学实验的内容. 书后附有习题答案及常用的一些统计分布表.

本书可供高等学校理工或经济管理类及其他专业本科生用作教材，也可作为夜大、函授学员的教材，同时也可供科技、工程技术人员参考，对报考研究生的人员也有所裨益.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/杨洪礼，胡运红主编. —北京：科学出版社，2013

21 世纪高等院校教材

ISBN 978-7-03-036423-4

Ⅰ. ①概… Ⅱ. ①杨…②胡… Ⅲ. ①概率论-高等学校-教材 ②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ. ①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 002453 号

责任编辑：王 静 / 责任校对：邹慧卿

责任印制：阎 磊 / 封面设计：陈 敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

北京市文林印务有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2013 年 1 月第 一 版 开本：720×1000 B5

2013 年 1 月第一次印刷 印张：17

字数：331 000

定价：29.00 元

前 言

随着经济与社会的发展，社会对应用型人才的需求增多，高等教育也开展了应用型人才培养模式的教学改革. 为了适应高等教育应用型教学改革的需要，2007 年我们编写出版了适用于应用型教学的《概率论与数理统计》教材. 教材的编写理念是既要保证概率论与数理统计内容框架的完整性，即涵盖非数学专业“概率论与数理统计课程教学基本要求”所包括的基本内容，又要注重概率论与数理统计课程基本概念的应用和解决一些实际问题的思想方法，同时淡化理论证明和推导过程，弱化计算技巧. 该书自出版以来受到应用型教学层次读者的欢迎，2010 年 2 月又出版了第二版. 该书具有如下特点：

(1) 降低理论证明及减少计算技巧的内容，以应用型教学为目标，既覆盖了概率统计的全部内容，又能满足应用型教学不同层次的需要，克服了传统教材中有许多内容注重理论推导、不适用于一般应用型教学的缺点；

(2) 结合省级精品课程建设中教学改革的经验，吸收了最新的教学成果，例题和习题选用了大量的结合生活、科技等应用的例子，使得概率统计的学习变得生动有趣；

(3) 每章都有一个关于概率统计的阅读材料，可使读者更好地理解概率统计的整个全貌；

(4) 与计算机应用能力的培养紧密结合，书中附录介绍了大量的应用计算机软件(Mathmatica 软件和 Excel 软件)来解决概率统计中不同问题模型的例子，且操作简单，易于学生学习.

本书是在该书第二版的基础上，结合教学过程中得到的经验，吸收部分教师与学生的建议修订而成的. 本次修订主要解决在应用型教学过程中碰到的一些实际问题，同时也考虑到部分教师和学生在使用过程中所反映的书中习题量偏少、与考研相关的题目太少的问题，这些问题在一定程度上影响了一部分学生的考研需求. 本次修订在保持原有内容体系的基础上，主要做了以下修订：

(1) 加强概率论与数理统计的基本概念和容易混淆的概念的阐述和分析，特别是在例题的选择方面突出这个特点，这些内容涉及的主要是表述方式，不影响知识体系；

(2) 修订了原书中的部分练习题及其答案，在每章都增加了习题 B，原有的习题放在 A 部分，B 部分题目的难度较 A 部分偏大，比较接近考研的难度；

(3) 适当调整了部分内容的先后次序，如泊松定理和泊松分布的先后次序，增

加了几何分布与超几何分布的内容等，以使内容更加完整；

(4) 在文字上也作了较多修改，以使论述更加通俗易懂；

(5) 此外还修订了一些原书中的其他不足之处；

(6) 为了满足不同层次学生的需要，本次修订增加了近 5 年来部分硕士研究生入学试题概率论与数理统计的题目，目的是让学生开阔视野，把握方向.

在这次修订工作中，杨洪礼老师负责第 1～3 章的修订，并负责全书的统稿工作，胡运红老师负责第 4、5 章的修订，邵泽军老师负责第 6 章的修订，张欣老师负责第 7 章的修订，吴文英老师负责第 8 章的修订，陈凡红老师负责第 9 章的修订，马艳琴老师负责附录中试验部分的修订，牛玉玲老师负责全书习题部分的修订. 另外，参加本书修订工作的还有郭慧敏、薛威、何云老师.

本书概念清晰，难度适中．可供理工或经济管理类及其他各专业本科生用作教材，同时也可供科技、工程技术人员参考，对报考研究生的人员也有所裨益．

本书的出版要感谢广大同行和使用学校的支持与建设性建议，这是我们进一步完善本书的基础和动力. 由于编者水平所限，书中错误在所难免，欢迎广大读者在使用过程中继续提出一些意见和建议，以使本书进一步完善.

编　者

2012 年 6 月

目　　录

第 1 章　概率与古典概型

在自然界和社会中存在着各种各样的现象，这些现象一般可以分为两类．一类是在一定条件下必然要发生的现象．例如，向上抛一石子必然下落，在标准大气压下，水温度达到 100℃就要沸腾等．这类现象称为确定性现象．另一类现象则与此不同．例如，在相同的条件下抛一枚硬币，其结果可能是正面朝上，也可能是反面朝上，并且在每次抛掷之前都无法确定会出现哪种结果；掷一枚骰子，可能会出现的点数有 1、2、3、4、5、6，但是未抛之前我们无法确定会出现哪种情况．这类现象，在一定条件下可能出现这样的结果，也可能出现那样的结果，而在试验或观察之前却不能预知确切的结果．但是，人们在经过长期的观察和深入研究后，发现其在大量的重复试验或观察下，结果却呈现某种规律性．例如，多次重复抛掷硬币发现正面朝上大约有一半，将一枚骰子反复抛掷后发现出现各种点数的次数大约是相同的．这种大量重复试验或观察中所呈现出来的规律性，就是我们后面所说的统计规律性．这种在个别试验中结果呈现出不确定性，而在大量重复试验中结果又具有统计规律性的现象称为随机现象．

对于随机现象，人们很早就注意到它的存在了．从亚里士多德时代开始，哲学家们就已经认识到随机现象在生活中的作用，他们把随机现象看成是破坏生活规律，超越了人们理解能力范围的东西，他们没有认识到有必要去研究这些随机现象，也没有意识到不确定性也可以度量．后来，许多数学家都曾研究过随机现象，如帕斯卡、伯努利、高斯等．而将不确定性数量化则是近代的事，在这一领域取得的成果已经给人类生活的诸多领域带来了一场深刻的革命．概率论与数理统计是研究随机现象及其统计规律性的一门数学学科．

概率论与数理统计有着广泛的应用．例如，金融、信贷、医疗、保险等行业策略的制定，流水线上产品质量检验与质量控制，食品保质期，弹药储存分析，电器与电子产品的寿命分析等．概率问题与我们的生活如此密切相关，正如法国数学家拉普拉斯所说："生活中最重要的问题，其中绝大多数在实质上只是概率问题．"

1.1　随机试验与随机事件

1.1.1　随机试验

为了研究随机现象及其统计规律，必须对随机现象进行观察或试验．以下把对随机现象所进行的观察或试验称为随机试验．如下所示的 4 个例子：

(a) 掷一枚骰子,观察出现的点数;

(b) 掷一枚硬币,观察出现正面、反面的情况;

(c) 一射手进行射击,直到击中目标为止,记录射击次数;

(d) 在一批灯泡中任取一只,测试它的寿命.

上面列举的 4 个例子,具有以下共同的特点:

(1) 试验在相同的条件下可以重复进行;

(2) 试验的可能结果不止一个,并且所有可能的结果是可以预先知道的;

(3) 在试验之前不能确定具体哪一个结果会出现.

我们把具有以上 3 个特点的试验称为**随机试验**,简称试验,记为 E.

1.1.2　样本空间

随机试验 E 中,试验的所有可能结果组成的集合称为随机试验 E 的**样本空间**,一般用字母 S 表示. S 中的元素,称为样本点,常用 e 表示.

在例(a)中,试验的所有可能结果有 6 个:1 点,2 点,…,6 点. 因此样本空间为

$$S_1=\{1,2,3,4,5,6\};$$

在例(b)中,试验的所有可能结果有两个:正面、反面. 因此样本空间为

$$S_2=\{\text{正面},\text{反面}\};$$

在例(c)中,试验的所有可能结果为全体正整数,从而样本空间为

$$S_3=\{1,2,3,\cdots\};$$

在例(d)中,试验的所有可能的结果为非负实数,因此样本空间为

$$S_4=\{t\mid t\geqslant 0\}.$$

在上述的例子中,例(a)、例(b)试验的样本空间都只有有限个样本点,称之为有限样本空间. 例(c)中样本空间有可列无穷多个样本点,而例(d)中样本点也是无穷多个,但它们充满区间$[0,+\infty)$,这时我们称样本点数为不可列无穷多个.

1.1.3　随机事件

在随机试验中,人们关心的是那些可能发生也可能不发生的事情,称为随机事件. 它实际上是样本空间的子集. 随机事件常用大写的英文字母 A,B,C 等来表示. 例如,在例(a)中,"点数为偶数";例(b)中,"出现正面";例(c)中,"次数不多于 10 次";例(d)中,"灯泡的寿命为 1 500 小时","灯泡的寿命在 2 000 到 3 000 小时之间"等等,都是随机事件. 对一次试验来说,它们可能发生,也可能不发生,因而都是随机事件. 这些事件可以分别记为

$A=\{2,4,6\}$;

$B=\{\text{正面}\}$;

$C=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$;

$D_1=\{t\mid t=1\ 500\}$;

$D_2=\{t\mid 2\ 000\leqslant t\leqslant 3\ 000\}$.

在一次试验中，若属于事件 A 的某一个样本点出现，称事件 A 在这次试验中发生了. 对于一个随机试验来说，它的每一个可能的结果，也就是样本空间中的每一个样本点，显然都是随机事件，它们是随机试验中最简单的随机事件，称为基本事件，如 B,D_1. 它们显然都是单点集. 除了基本事件外，还有复合事件，它是由试验的若干可能结果组成的. 例如，A,C,D_2 都是复合事件.

在随机试验中，每次试验必定发生的事件称为必然事件；每次试验都必定不发生的事件称为不可能事件. 一般地，必然事件用 S 表示，不可能事件用 $\varnothing$ 表示. 显然，S 就是样本空间，它是自身的子集，在一次试验中，必有至少一个样本点出现，从而 S 必然发生. 而 $\varnothing$ 是空集，它不含任何样本点，在试验中自然不可能发生.

必然事件和不可能事件本质上不是随机事件. 为了今后研究问题方便，把必然事件和不可能事件作为两个极端形式的随机事件.

1.1.4 事件的关系与运算

随机事件是样本空间的子集，因此事件间的关系和运算与集合的关系和运算是一致的. 下面给出事件间的关系和运算在概率论中的提法.

设试验 E 的样本空间为 S，而 $A,B,A_k(k=1,2,\cdots)$ 是 S 的子集.

(1) 若 $A\subset B$，则称事件 B 包含事件 A，这表示事件 A 的发生必然导致事件 B 的发生. 也可记为 $B\supset A$，它们的几何表示如图 1.1 所示.

若事件 B 包含事件 A，并且事件 A 包含事件 B，则称事件 A 与事件 B 相等，记为 $A=B$.

(2) 表示事件 A 与事件 B 中至少有一个发生的事件，称为事件 A 与事件 B 的和事件，亦称为事件 A 与事件 B 的并，记为 $A\cup B$，它们的几何表示如图 1.2 所示. 当且仅当 A 和 B 至少有一个发生时，事件 $A\cup B$ 发生.

事件的并，可以推广到有限多个事件甚至无穷但可列个事件的情形.

$$\bigcup_{k=1}^{n}A_k=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$$

表示事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 至少有一个发生.

$$\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k=A_1\cup A_2\cup\cdots$$

表示事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 至少有一个发生.

(3) 表示事件 A 与事件 B 同时发生的随机事件，称为事件 A 与事件 B 的积事件，亦称为事件 A 与事件 B 的交，记作 $A\cap B$ 或 AB，它们的几何表示如图 1.3 所示.

与事件的和类似，事件的积也可以推广到有限个甚至无穷可列个事件的情形.

$$\bigcap_{k=1}^{n} A_k = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$$

表示事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 同时发生.

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = A_1 \cap A_2 \cap \cdots$$

表示事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 同时发生.

(4) 表示事件 A 发生而事件 B 不发生的事件，称为事件 A 与事件 B 的差事件，记为 $A-B$，它们的几何表示如图 1.4 所示.

(5) 当 $A \cap B = \varnothing$，我们称事件 A 与事件 B 是互不相容的，或互斥的. 它表示事件 A 与事件 B 不可能同时发生，它们的几何表示如图 1.5 所示. 显然基本事件是两两互斥的.

(6) 当 $A \cup B = S$，且 $A \cap B = \varnothing$ 时，则称事件 A 与事件 B 互为对立事件，或称事件 A 与事件 B 互为逆事件. 它表示在一次试验中事件 A 与事件 B 有且仅有一个发生. A 的对立事件记为 $\overline{A}$，它们的几何表示如图 1.6 所示. 显然 $\overline{A} = S - A$.

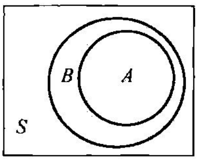

图 1.1

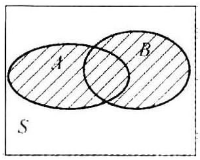

图 1.2

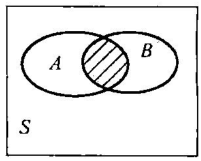

图 1.3

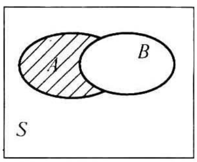

图 1.4

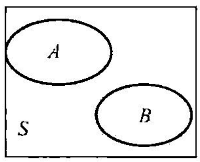

图 1.5

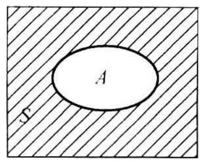

图 1.6

与集合的运算规律相对应，在进行事件的运算时，经常用到下面的运算规律.

(1) 关于事件的和的运算规律.

$A \cup B = B \cup A$；　　　　(交换律)

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$；　　　　(结合律)

$A \cup A = A$；　　　　(幂等律)

$A \cup S = S$.

(2) 关于事件的积的运算规律.

$A \cap B = B \cap A$；　　　　(交换律)

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$；　　　　(结合律)

$A \cap A = A$；　　　　(幂等律)

$A \cap S = A$.　　　　(吸收律)

(3) 关于事件的积与事件的和的混合运算规律.

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$；　　(分配律)

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$；　　(分配律)

$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B},\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.　　(对偶律)

对偶律对于任意有限个事件或者是可列无穷个事件和、积都是成立的.

可见，概率论中的事件与集合论中的集合，以及它们的关系和运算是一致的. 为了便于对照，列出关系如表 1.1 所示.

表 1.1

记号	概率论	集合论
S	必然事件，样本空间	全集
$\varnothing$	不可能事件	空集
e	基本事件	元素
A	事件	集合
$e\in A$	事件 A 发生	e 是集合 A 的元素
$A\subset B$	事件 A 发生则事件 B 一定发生	A 是 B 的子集
$A=B$	事件 A,B 相等	集合 A,B 相等
$A\cup B$	事件 A,B 至少有一个发生	集合 A,B 的并集
$A\cap B$	事件 A,B 同时发生	集合 A,B 的交集
$A-B$	事件 A 发生而事件 B 不发生	集合 A,B 的差集
$\overline{A}$	A 的对立事件	集合 A 的补集
$A\cap B=\varnothing$	事件 A,B 不相容	集合 A,B 不相交

1.2 随机事件的频率与概率

上节介绍了随机试验、样本空间和随机事件等基本概念. 对于一个随机事件来说，它在某一次试验中可能发生，也可能不发生，人们常常希望知道某些事件在一次试验中发生的机会有多大. 例如，为了确定保险费，保险公司希望知道某些意外事故发生的可能性的大小. 同时也希望找到一个合适的数来描述事件在一次试验中发生的可能性大小. 本节将要给出的概率这一概念正是对随机事件发生的可能性大小的一种度量. 为此，先来介绍一下频率的概念.

1.2.1 频率

定义 1.1 在相同的条件下，进行了 n 次随机试验，在这 n 次试验中，事件 A 发生了 m 次，称比值

$$f_n(A)=\frac{m}{n}$$

为事件 A 在这 n 次随机试验中发生的**频率**.

经验告诉我们:在一般情况下,如果一个事件在试验中发生的频率越大,则事件发生的可能性就越大. 也就是说频率在一定程度上反映了随机事件发生的可能性的大小. 但是,对于同一个试验,不同的试验者可能会得到不同的结果,即使是同一个试验者,其在不同时间得到的结果也很可能是不同的. 而一个事件发生的可能性大小应该是确定的. 由于频率具有波动性,因此,频率虽然在一定程度上反映了事件发生可能性的大小,却不能用它作为事件发生可能性大小的客观度量. 另一方面,虽然频率不是概率,但是频率的一些性质对引入概率的概念还是很有帮助的. 因此下面先来讨论一下频率的性质.

由频率的定义可得到它有以下性质.

(1) $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$;

(2) $f_n(S)=1$;

(3) 若 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 是两两互不相容的事件,则

$$f_n(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k)=f_n(A_1)+f_n(A_2)+\cdots+f_n(A_k).$$

为了更好地理解频率的性质,先来看下面的例子.

例 1.1　考虑“抛硬币”这个试验,把一枚硬币抛掷 50 次、500 次,各做 5 遍,得到如表 1.2 的结果(其中 n_H 表示正面 H 发生的频数,$f_n(H)$表示正面 H 发生的频率).

表 1.2

试验序号	$n=50$		$n=500$	
	n_H	$f_n(H)$	n_H	$f_n(H)$
1	22	0.44	251	0.502
2	25	0.50	249	0.498
3	21	0.42	256	0.512
4	24	0.48	253	0.506
5	18	0.36	251	0.502

表 1.3 是历史上抛硬币试验的结果.

表 1.3

试验者	n	n_H	$f_n(H)$
蒲丰	4 040	2 048	0.506 9
费勒	10 000	4 979	0.497 9
卡尔・皮尔逊	12 000	6 019	0.501 6
卡尔・皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5

从上述数据可以看出:

频率具有随机波动性,即对同样的 n 所得的 $f_n(H)$ 不尽相同;这也就验证了前面的结论. 当抛硬币次数 n 较小时,频率 $f_n(H)$ 随机波动的幅度较大,但随着 n 的增大,频率 $f_n(H)$ 呈现出稳定性,即当 n 逐渐增大时,$f_n(H)$ 总是在 0.5 附近摆动,而逐渐稳定于 0.5.

一般地,当 n 逐渐增大时,频率 $f_n(A)$ 逐渐稳定于某个常数 p,对每一个事件 A 都有这样一个客观存在的常数与之对应. 这种"频率稳定性"即通常所说的统计规律性,它揭示了隐藏在随机现象中的规律性. 这个常数 p 即为下面介绍的随机事件 A 的概率. 记为 $P(A)=p$. 数 p 是客观存在的,在实际应用中,n 很大时有时也可以用频率 $f_n(A)$ 来近似代替概率 p.

事实上,在气象工作中,探索某地区某种天气现象出现的规律时,常是利用这个地区多年来重复试验观测所记录下来的气象资料,针对某种天气现象统计它出现的频数,计算它出现的频率,找出频率的稳定值,从而认定某种天气现象出现可能性的大小,即取得它出现的近似概率值. 在其他许多实际工作中探求各种自然的、社会的随机现象的统计规律性时也经常采用这种统计分析的方法.

下面给出概率的统计定义.

定义 1.2 设随机试验 E,若试验的重复次数 n 充分大时,事件 A 发生的频率 $f_n(A)$ 总在区间[0,1]上的一个确定的常数 p 附近做微小摆动,并逐渐稳定于 p,则称常数 p 为事件 A 发生的**概率**,记为 $P(A)$,即

$$P(A)=p\approx f_n(A).$$

由概率的统计定义,可以容易地得到概率的一些简单性质.

(1) 非负性

$$0\leqslant P(A)\leqslant 1;$$

(2) 规范性

$$P(S)=1;$$

(3) 有限可加性 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是两两互不相容的事件,即对于 $i\neq j$,$A_iA_j=\varnothing(i,j=1,2,\cdots,n)$,则有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n),$$

即

$$P(\bigcup_{k=1}^{n}A_k)=\sum_{k=1}^{n}P(A_k).$$

1.2.2 概率的古典定义

在概率论发展史上,最早提出的概率问题是有关随机游戏的赌博问题. 譬如,掷一个骰子 4 次至少得到一个"6 点"的可能性有多大? 掷两个骰子 24 次至少得到一次"双 6 点"的机会是多少……诸如此类的问题. 这些问题都首先假定了骰子