全面突破考研数学

2013人大考研

2013年
考研数学
辅导讲义精编

主编/李恒沛 郝志峰 高文森

考研命题人亲编 完全符合考试大纲

★ 全书分为三部分，每章分“内容提要”（含考试内容、考试重点及考试题型）和“例题选析”（着重于基本概念、基本理论的理解，基本方法的掌握以及综合应用）

★ 三位编者都曾多年参加考研命题，参与《考试大纲》的制订，熟知考研数学重点与难点

中国人民大学出版社

2013年
考研数学辅导讲义精编

主　编　李恒沛　郝志峰　高文森
（按姓氏笔画）

中国人民大学出版社
·北京·

图书在版编目（CIP）数据

2013 年考研数学辅导讲义精编/李恒沛，郝志峰，高文森主编. —北京：中国人民大学出版社，2012.5
ISBN 978-7-300-15702-3

Ⅰ.①2… Ⅱ.①李… ②郝…③高… Ⅲ.①高等数学-研究生-入学考试-自学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 083408 号

2013 年考研数学辅导讲义精编
主编　李恒沛　郝志峰　高文森
2013 Nian Kaoyan Shuxue Fudao Jiangyi Jingbian

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街 31 号	**邮政编码**	100080
电　　话	010－62511242（总编室）		010－62511398（质管部）
	010－82501766（邮购部）		010－62514148（门市部）
	010－62515195（发行公司）		010－62515275（盗版举报）
网　　址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.1kao.com.cn（中国 1 考网）		
经　　销	新华书店		
印　　刷	北京七色印务有限公司		
规　　格	210 mm×285 mm　16 开本	**版　　次**	2012 年 7 月第 1 版
印　　张	20	**印　　次**	2012 年 7 月第 1 次印刷
字　　数	550 000	**定　　价**	39.00 元

目　　录

第Ⅰ篇　高等数学

第Ⅱ篇　线性代数

第Ⅲ篇　概率论与数理统计

第一章

函数、极限、连续

一、内容提要

考试内容

①函数、极限与连续的概念；②函数的有界性、单调性、奇偶性与周期性；③函数的表示法、复合函数、反函数、分段函数和隐函数；④基本初等函数的性质及其图形；⑤初等函数及简单应用问题的函数关系的建立；⑥数列与函数极限的性质，函数的左、右极限；⑦无穷小与无穷大，无穷小的性质及无穷小的比较；⑧极限的四则运算；⑨极限存在的两个准则：单调有界准则和夹逼准则，两个重要极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$；⑩函数间断点的类型；⑪初等函数的连续性；⑫闭区间上连续函数的性质（最大值、最小值定理和介值定理）.

考试重点

①函数、极限（含左极限与右极限）、连续（含左连续与右连续）的概念及性质；②函数间断点类型的判断；③函数的表示方法（变量替换转换表达形式）；④求极限的方法（常见的几种）.

考试题型

①函数的表示；②分段函数的复合；③简单反函数的定义域及其表示；④运用极限的定义，极限存在准则，两个重要极限，等价无穷小，L'Hospital 法则，导数定义，定积分定义，级数收敛的必要条件等求极限的方法；⑤考查函数在一点极限存在及连续性的充要条件，判断函数间断点及其类型；⑥进行无穷小的比较；⑦判断函数的性质（有界性、单调性、周期性、奇偶性）；⑧运用闭区间上连续函数的性质证明一些命题.

根据以往统计，试题的难度值（通过率）大体在 0.6 以上，区分度一般在 0.4 以下，可见考生比较熟悉这部分试题的类型.

二、例题选析

例 1 设 $x\in(-\infty,+\infty)$，$f(x)$ 有定义，且 $f(x)\neq 0$，$f(x\cdot y)=f(x)\cdot f(y)$，求 $f(2\,011)$.

析 因 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$，有 $f(x)\neq 0$，于是知 $f(0)\neq 0$，适当选择 x 与 y 之值，由已知等式即得所求.

解 令 $x=0$，$y=2\,011$，则有 $f(0)=f(0)\cdot f(2\,011)$，

$a=\sqrt{12+a}\Rightarrow a^2-a-12=0\Rightarrow (a-4)(a+3)=0\Rightarrow a=4$（因 $a_n\geqslant 0$，故 a 非负）.

注：本题也可用夹逼准则来证.

①设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ ∃，则在迭代式两边取极限得 $a=4$. 考察 $|a_n-4|$，有

$$0\leqslant|a_n-4|=\frac{|a_{n-1}-4|}{\sqrt{12+a_{n-1}}+4}\leqslant\frac{1}{4}|a_{n-1}-4|\leqslant\cdots\leqslant\frac{1}{4^{n-1}}|a_1-4|,$$

注意到 $|a_n-4|$ 为定值，由夹逼准则，知

$\lim\limits_{n\to\infty}|a_n-4|=0\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}a_n=4$.

②仅在迭代式两边取极限得 $a=4$，是不可作为证明的.（因为这样做的前提是"设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ ∃"，在这一前提下才有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=4$.）因为这样并未解决"$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$"的存在性问题. 要是不管三七二十一，就会得出荒谬的结论. 例如设 $a_n=n$，则 $a_{n+1}=n+1=a_n+1$，就此式两边取极限，并记为 a，从而得出 $a=a+1\Rightarrow 0=1$. 荒唐至极！

在这里要指出的是，具体解题时，可以先对迭代式两边取极限，得出极限 $a=4$，这对后论证其存在性是有好处的，事实上，在证 $\{a_n\}$ 的单调性与有界性时都用到了数"4".

③讨论 $\{a_n\}$ 的单调性，也可以用求导的方法.

令 $f(x)=\sqrt{12+x}$，从而 $a_{n+1}=f(a_n)$，$n=1,2,\cdots$.

由于 $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{12+x}}>0$，于是，若 $a_2>a_1$，则有 $a_3=f(a_2)>f(a_1)=a_2$，…，$a_{n+1}>a_n$，….

若 $a_2<a_1$，则 $a_3=f(a_2)<f(a_1)=a_2$，…，$a_{n+1}<a_n$，….

不管如何，$\{a_n\}$ 的确是单调的. 此法可用于一般情况.

例 8 设 $a_1>0$，$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n(a_n^2+1)$，$n=1,2,\cdots$，试问 $\{a_n\}$ 收敛否？

析 利用单调有界变量极限存在准则.

解 由迭代式定义可知，$\forall n$，$a_n>0$. 考察

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2}a_n(a_n^2+1)-a_n=\frac{1}{2}a_n(a_n^2-1).$$

由此可见，若 $a_1>1$，则 $a_2>a_1>1$，由数学归纳法知，$\forall n$，$a_n>1$，且 $a_{n+1}>a_n$，即 $\{a_n\}$ 单调增加；若 $a_1<1$，则 $a_2<a_1<1$，由归纳法知，$\forall n$，$a_n<1$，且 $a_{n+1}<a_n$，即 $\{a_n\}$ 单调减少；若 $a_1=1$，则 $\forall n$，$a_n=1$，即 $\{a_n\}$ 为常数数列.

由设易知 $a_n>0$（$n=1,2,\cdots$），故 $\{a_n\}$ 有下界.

若 $a_1<1$，则由 $\{a_n\}$ 单调减少有下界，推知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ ∃，记为 a，将迭代式两边取极限得

$$a=\frac{1}{2}a(a^2+1)\Rightarrow a(a-1)(a+1)=0\Rightarrow a=0,-1,1$$

因 $0<a_n<1$（$n=1,2,\cdots$），且 $\{a_n\}\downarrow$，故只能是 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

若 $a_1=1$，则由于 $\{a_n\}$ 为常数数列，故 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$.

若 $a_1>1$，则 $\{a_n\}\uparrow$. 如果 $\{a_n\}$ 有上界，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ ∃，其极限 $a>1$ 与 $a=0,-1,1$ 三者之一矛盾，所以 $\{a_n\}\uparrow$，无上界，于是推知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$.

综上所述，

若 $0<a_1<1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$；（收敛）

若 $a_1=1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$；（收敛）

若 $a_1>1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$.（发散）

注： 本题的单调性也可用比值法处理．由迭代式定义有

$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{2}(a_n^2+1)$.

类似地，

若 $a_1>1$，则 $a_2>a_1$，再由归纳法推知 $\{a_n\}\uparrow$.

若 $a_1<1$，则 $a_2<a_1$，再由归纳法推知 $\{a_n\}\downarrow$.

若 $a_1=1$，则 $\{a_n\}$ 为常数数列.

一般地，若 a_n 为某连乘积时，则用比值法讨论单调性方便.

例 9　设 $S_n=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$，$n=1, 2, \cdots$，试证 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n\ \exists$.

析　利用极限存在准则（单调有界变量必有极限）.

证　由设知，$S_{n+1}=S_n+\frac{1}{(n+1)^2}$，$n=1, 2, \cdots$，

$\therefore \{S_n\}\uparrow$.

又
$$\begin{aligned}S_n&=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\\&<1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)\,n}\\&=1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)\\&=2-\frac{1}{n}<2,\end{aligned}$$

$\therefore \{S_n\}$ 有界.

故由极限存在准则，知 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n\ \exists$.

注： 本题由迭代式取极限得不出极限为何值，事实上，记 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=a$，由 $S_{n+1}=S_n+\frac{1}{(n+1)^2}$，取极限，得 $a=a$，求不出 a 为何值．将来利用 Fourier 级数可求得 $a=\frac{\pi^2}{6}$.

例 10　设 $a_n=\frac{1}{n}(1+\sqrt[2]{2}+\cdots+\sqrt[n]{n})$，试证 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在，并求之.

析　利用夹逼准则.

证　易知 $\frac{1}{n}(1+1+\cdots+1)<a_n<\frac{1}{n}(\sqrt[n]{n}+\sqrt[n]{n}+\cdots+\sqrt[n]{n})\Rightarrow 1<a_n<\sqrt[n]{n}$，而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

故由夹逼准则得 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1\quad(n\geqslant 2)$.

注： 补证 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

证：令 $\sqrt[n]{n}=1+a_n\Rightarrow n=(1+a_n)^n=1+na_n+\frac{n(n-1)}{2}a_n^2+\cdots+a_n^n$

$\Rightarrow n>\frac{n(n-1)}{2}a_n^2\Rightarrow 1>\frac{n-1}{2}a_n^2\Rightarrow 0<a_n<\sqrt{\frac{2}{n-1}}$，$n\geqslant 2$

欲使原式成立，即欲使 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，即

$\forall\varepsilon>0$，欲使 $\sqrt{\frac{2}{n-1}}<\varepsilon\Rightarrow n>\frac{2}{\varepsilon^2}+1$

注：本题主要考查导数概念及变上限积分求导法.

例 16 设$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x+1}-ax-b\right)=0$，求常数 a，b.

析 利用极限（运算）性质（或无穷小性质），定出 a，b.

解 原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(1-a)\ x^2-(a+b)\ x-b}{x+1}=0\Rightarrow\begin{cases}1-a=0\\-(a+b)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{matrix}a=1\\b=-1\end{matrix}$

注：本题属 1990 年试卷三中考题. 难度值为 0.82，区分度为 0.2.

例 17 设$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{ax-\sin x}\int_0^x\dfrac{t^2}{\sqrt{b^2+3t}}\mathrm{d}t=1$，试确定常数 a，b.

析 上式左端呈"$\dfrac{0}{0}$"型，可用 L'Hospital 法则.

解 左端$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{a-\cos x}\cdot\dfrac{x^2}{\sqrt{b^2+3x}}$，

易见，当 $a\neq1$ 时，上式极限为 0，故必 $a=1$. 于是

$$左端=\lim_{x\to0}\frac{1}{1-\cos x}\cdot\frac{x^2}{\sqrt{b^2+3x}}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{2\sin^2\dfrac{x}{2}\sqrt{b^2+3x}}=\frac{2}{|b|}\Rightarrow b=\pm2.$$

注：本题由一个考题稍加改动而成.

例 18 设 $\lim\limits_{x\to+\infty}[\sqrt{x^2+x+1}-(ax+b)]=0$，求常数 a，b.

析 利用极限存在性或极限与无穷小的关系处理之.

解法 1 因 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+1}=+\infty$，而原式右端为 0，故 $\lim\limits_{x\to+\infty}(ax+b)=+\infty$，且 $a>0$，按"$\infty-\infty$"型处理.

$$\lim_{x\to+\infty}[\sqrt{x^2+x+1}-(ax+b)]=\lim_{x\to+\infty}\frac{(1-a^2)\ x^2+(1-2ab)\ x+1-b^2}{\sqrt{x^2+x+1}+(ax+b)}$$

若 $1-a^2\neq0$，则分子为 x^2 阶，分母为 x 阶，当 $x\to+\infty$，分式应趋于∞而不会是 0，故 $1-a^2=0$，从而 $a=\pm1$，又 $a>0$，故取 $a=1$，于是上式右端为

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(1-2b)\ x+1-b^2}{\sqrt{x^2+x+1}+(x+b)}=\dfrac{1}{2}(1-2b)$（以 x 同除分子、分母，即得）

由设知$\dfrac{1}{2}(1-2b)=0\Rightarrow b=\dfrac{1}{2}$.

解法 2 由极限与无穷小关系，有

$$\sqrt{x^2+x+1}-(ax+b)=\alpha \tag{①}$$

其中 $\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha=0$.

$$\xrightarrow[\text{取极限}]{\text{①式两边同除}x}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x}-a-\frac{b}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha}{x}=0.$$

注意到 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}=1$，

从而得 $a=1$，代入①式，有

$$b=\sqrt{x^2+x+1}-x-\alpha$$

两边取极限得

$$b=\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-x)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}=\frac{1}{2}.$$

注： 解法 2 源于求渐近线方程，实质上是利用极限与无穷小的关系. 仅当极限为已知时才可用此法.

例 19 设 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{a+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)$ 存在，求常数 a.

析 极限存在的充要条件为左、右极限存在且相等，由此定出 a.

解 因 $\lim\limits_{x\to0^-}\left(\frac{a+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim\limits_{x\to0^-}\left(\frac{a+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}-\frac{\sin x}{x}\right)=a-1$，

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{a+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{ae^{-\frac{4}{x}}+e^{-\frac{3}{x}}}{e^{-\frac{4}{x}}+1}+\frac{\sin x}{x}\right)=1,$$

故当且仅当 $a=2$ 时，上述极限存在.

注： 本题由 2000 年数学一中一道试题稍加改动而成. 原试题难度值为 0.64，区分度为 0.41.

例 20 设 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin6x+xf(x)}{x^3}\right)=0$，求 $\lim\limits_{x\to0}\frac{6+f(x)}{x^2}$.

析 本题解法多样，可用 Taylor 公式，可用极限与无穷小的关系，也可利用极限运算性质来解.

解法 1 因 $\sin6x=6x-\frac{(6x)^3}{3!}+o(x^4)$，

故由设，$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin6x+xf(x)}{x^3}\right)=\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{6x-\frac{1}{3!}(6x)^3+o(x^4)+xf(x)}{x^3}\right]=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{6+f(x)}{x^2}-36+\frac{o(x^4)}{x^3}\right)=0$，

即得 $\lim\limits_{x\to0}\frac{6+f(x)}{x^2}=36$.

解法 2 由设知

$$\frac{\sin6x+xf(x)}{x^3}=\alpha，其中 \lim_{x\to0}\alpha=0,$$

$$\Rightarrow\frac{f(x)}{x^2}=-\frac{\sin6x}{x^3}+\alpha$$

$$\Rightarrow\frac{6+f(x)}{x^2}=\frac{6}{x^2}-\frac{\sin6x}{x^3}+\alpha$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to0}\left(\frac{6+f(x)}{x^2}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{6x-\sin6x}{x^3}+\alpha\right)$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{6x-\sin6x}{x^3}\right)\xlongequal{\text{洛比塔法则}}\lim_{x\to0}\frac{6(1-\cos6x)}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{6}{3x^2}\cdot\frac{1}{2}(6x)^2=36.$$

解法 3 因 $\frac{6+f(x)}{x^2}=\frac{6+f(x)}{x^2}+\frac{\sin 6x}{x^3}-\frac{\sin 6x}{x^3}=\left(\frac{\sin 6x}{x^3}+\frac{f(x)}{x^2}\right)+\left(\frac{6x-\sin 6x}{x^3}\right)$

故 $$\lim_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}\right)+\lim_{x\to 0}\left(\frac{6x-\sin 6x}{x^3}\right)\xlongequal{\text{洛比塔法则}}0+36=36.$$

注：本题是2000年数学二的一道选择题（4个备选项分别为0，6，36，∞）. 本题难度值为0.30，区分度为0.23. 不少考生（近三分之一的考生）选"0". 其错误在于：

$$0=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 6x}{x}+f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}$$，在这里用6替换$\frac{\sin 6x}{x}$是错误的！

例 21 设 $f''(x_0)$ 存在，求证 $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2}=f''(x_0)$.

析 利用 L'Hospital 法则及导数定义.

证 左边 $\xlongequal{\text{L'Hospital}}\lim_{h\to 0}\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0-h)}{2h}$

$$=\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\left[\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0)}{h}+\frac{f'(x_0-h)-f'(x_0)}{-h}\right]$$

$$=\frac{1}{2}(f''(x_0)+f''(x_0))=f''(x_0)$$

注：因 $f(x)$ 仅在点 $x=x_0$ 处具有二阶导数，故不能连续使用 L'Hospital 法则，使用一次过后，必须用导数定义证之.

例 22 设函数 $f(x)$ 满足 $f(0)=1$，$f'(x)$ 存在且为正，求 $\lim_{x\to 0}\frac{f(\sin x)-1}{\ln f(x)}$.

析 利用导数定义.

解 $f(\sin 0)=f(0)=1$，$\ln f(0)=0$，

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(\sin x)-1}{\ln f(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{f(\sin x)-f(\sin 0)}{x-0}\cdot\frac{x-0}{\ln f(x)-\ln f(0)}$$

$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(\sin x)\Big|_{x=0}\Big/\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln f(x)\Big|_{x=0}$$

$$=f'(0)\cdot\cos 0\Big/\frac{f'(0)}{f(0)}=1.$$

注：因 $f'(x)$ $\exists$，不说明 $\exists x$ 的某邻域有 $f'(x)$，故不能用 L'Hospital 法则.

例 23 求 $\lim_{n\to+\infty}\int_n^{n+k}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ $(k>0)$.

析 利用积分中值定理.

解 $\int_n^{n+k}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\sin\xi\int_n^{n+k}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\sin\xi\cdot\ln\frac{n+k}{n}$，其中 $\xi\in[n,n+k]$，

因 $|\sin\xi|\leqslant 1$，且 $\lim_{n\to+\infty}\ln\frac{n+k}{n}=0$，

故 $\lim_{n\to+\infty}\int_n^{n+k}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=0$.

例 24　设$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{f(x)}{\sin x}\right)}{e^{2x}-1}=3$，求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}$.

析　利用等价无穷小.

解　由设知，当 $x\to0$ 时，$e^{2x}-1\to0$，故知当 $x\to0$ 时，$\ln\left(1+\dfrac{f(x)}{\sin x}\right)\to0$（否则极限值不为 3.）于是当 $x\to0$，有

$$e^{2x}-1\sim2x,\ \ln\left(1+\frac{f(x)}{\sin x}\right)\sim\frac{f(x)}{\sin x}.$$

故得

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x\cdot\sin x}=\lim_{x\to0}2\cdot\frac{\dfrac{f(x)}{\sin x}}{2x}=\lim_{x\to0}2\cdot\frac{\ln\left(1+\dfrac{f(x)}{\sin x}\right)}{e^{2x}-1}=6.$$

注：在求两个函数乘积（或之商）的极限时，往往可以用等价无穷小来替代以简化计算. 这是因为关于等价无穷小有个非常有用的性质：若 $f(x)\sim g(x)\ (x\to x_0)$，且$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot h(x)=A$（或$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{h(x)}=A$），则$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)h(x)=A$（或$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{g(x)}{h(x)}=A$）. $\because g(x)\cdot h(x)=\dfrac{g(x)}{f(x)}\cdot f(x)h(x)$，$\therefore\lim\limits_{x\to x_0}g(x)h(x)=1\cdot A=A$，不是乘或除的情形，不能这样做. 例如，$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-x}{x^3}\neq\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-x}{x^3}$.

例 25　当 $x\to0$ 时，求下列函数关于 x 的阶，并求其等价无穷小：

(1) $f_1(x)=\ln(1+x)+\ln(1-x)$.

(2) $f_2(x)=\sqrt[5]{x^2+\sqrt[3]{x}}$.

(3) $f_3(x)=\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}$.

(4) $f_4(x)=\sqrt[5]{x^2+\sqrt[3]{x}}-\sqrt[3]{x^2+\sqrt[5]{x}}$.

析　一般采用两种方法，一是求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f_i(x)}{x^k}$（$k$ 为待定常数）使之得出既不为 0，也不为∞的极限 A，则 $f_i(x)\sim Ax^k(x\to0)$，一是将 $f_i(x)$ Taylor 展开（$f_i(x)$ 在 $x=x_0$ 处有足够阶导数），$f_i(x)=Ax^k+o(x^k)$，这里的 A 既不为 0，也不为∞，于是此 k 即为所求的阶，且 $f_i(x)\sim Ax^k(x\to0)$.

解　(1) $f_1(x)=\ln(1+x)+\ln(1-x)$

$$=x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)+(-x)-\frac{1}{2}(-x)^2+o(x^2)=-x^2+o(x^2).$$

或　　$f_1(x)=\ln(1-x^2)=-x^2+o(x^2)$.

由此可见，当 $x\to0$ 时，$f_1(x)$ 为 x 的 2 阶无穷小，且与 $(-x^2)$ 等价.

(2) 对 $f_2(x)$ 立即按 Maclaurin 展开（在 $x_0=0$ 处 Taylor 展开）是不允许的，因为 $f_2(x)$ 在 $x_0=0$ 处不可导，应先变形，然后将 $x^{\frac{5}{3}}$ 视为新变量展开：

$$f_2(x)=(x^2+x^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{5}}=[x^{\frac{1}{3}}(1+x^{\frac{5}{3}})]^{\frac{1}{5}}=x^{\frac{1}{15}}(1+x^{\frac{5}{3}})^{\frac{1}{5}}=x^{\frac{1}{15}}\left(1+\frac{1}{5}x^{\frac{5}{3}}+o(x^{\frac{5}{3}})\right)=x^{\frac{1}{15}}+o(x^{\frac{1}{15}}).$$

故 $f_2(x)\sim x^{\frac{1}{15}}$，$f_2(x)$ 为 x 的$\dfrac{1}{15}$阶无穷小 $(x\to0)$.

(3) 先将 $f_3(x)$ 变形如下：