算學叢書

微積分入門

袁愈佺譯

中華書局印行

序

近代文明國家之建設,端賴工業學術之發達,欲求工業學術之深造,莫不以研究數理爲基礎,而尤以微積分學之應用尤爲重要,此吾人所周知者也.於今我國,建設事業方興未艾,工業學術需要正殷,微積分學自爲學子當務之急.惟是學也理論精微,初學之士每苦難解.比年遍索各家名著,見理論明晰方法新穎之作無有勝於秋山武太郎所著「微積分易解」一書,剝繭抽蕉由淺入深而絕無晦澀之病,雖僅習普通代數、幾何、三角者讀之,亦未嘗不可了解.爰亟不揣淺陋,譯成此書,貢諸同好,惟付梓倉卒,難免疎漏,尙希教正以匡不逮,幸甚幸甚.

譯者謹識

微積分入門

目　錄

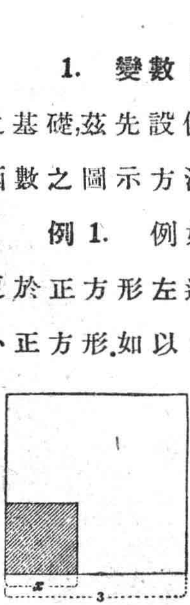
微積分入門

第一章　變數與函數之意義及函數之圖示

第一節　變數與函數之意義

1. **變數** (variable) 與**函數** (function) 爲微積分學之基礎,茲先設例說明兩者之意義,然後更於下節說明函數之圖示方法.

例 1. 例如第 1 圖之正方形,其每邊之長爲 3,茲更於正方形左邊下隅之一邊上任意截取一段,作成一小正方形.如以 x 表示此小正方形每邊之長而以 y 表示其面積,則可得 $y=x^2$ 之等式.但 x 乃 3 之一部分(x 爲 3 亦可),故 x 之值必有一定之限制,即 $0 \leqq x \leqq 3$ 之限制是也.例如 $x=0$,則所截取之小正方形僅爲一點,而 y 之值則爲 0.如 $x=3$,則所截取之正方形與原有正方形相等,而 y 之值即 $3^2=9$



第 1 圖

是也.

x之值限定爲從0至3之一任意數,故x得爲0·5或1·2等之數.如$x=0\cdot5$則$y=0\cdot5^2=0\cdot25$,又如$x=1\cdot2$則$y=1\cdot2^2=1\cdot44$.此種可得任意變化之數,換言之,其值可得任意決定之數,卽謂之變數.上述之變數x,其值可於從0至3之限制內任意取之.有時亦有於-1至$+1$之限制間任意決定其值之變數,有時亦有於1至1·05之極小之限制間任意變化之變數,又有時亦有可取正負大小任意之值之變數.

2. 要之,變數者,卽其值在一定限制內可得任意變化之數是也.反之,如3或-2以及$\frac{1}{5}$等,其值已定而不得變化之數,則謂之常數(constant).此種常數概以a、b、c等文字表示之,而通常多以c卽constant之字首爲表示常數之符號.

3. 上述例1之y,卽能在0至3^2卽0至9之間可以任意決定其值之數,例如x爲$\sqrt{2}$,則y爲2,如x爲$\sqrt{7\cdot5}$,則y爲7·5.y既爲在0至9之間可得任意變化之數,故y與x皆同屬變數而非定數也.但y之所以視爲變數者,僅就y本身之值之變化而言,如就x而論,y乃表示x^2者,故y爲一含x之式,在微積分學上言之,

謂之函數.例如 x^2+3x-1 以及 $\sqrt{x+2}$ 等皆爲含 x 之式,而微積分學上皆謂之 x 之函數是也.函數與式不同,並非二而一者,例如以定數 a 作成之式如 a^2-5a+1 等,則不得謂之函數.蓋函數爲變數,卽其值可得變化者,換言之,函數者,乃由變數作成之式是也.但此乃就函數之外形而論,至於函數之意義,卽變數 x 之值經種種之變化,其值亦隨變數 x 之變化而變化者,則謂之 x 之函數是也.如就通俗之觀念言之,例如學生之勤勉者,其成績必優,怠惰者,則成績必劣,是成績之優劣完全繫乎勤勉與否,故得謂「成績乃勤勉之函數」.又如有人於寒天始能明晰聽出錶之聲響,暑天則不能明晰聽出,卽此人對於音響之聽覺不啻爲溫度所支配,故得謂「音響乃溫度之函數」.上述例 1 之 $y=x^2$,因 x 表正方形之邊長,y 表面積,而 x 有種種之變化,y 亦隨之而有種種之變化,故 y 卽謂之 x 之函數.故所謂變數 x 之函數者,**卽指因變數 x 之變化而變化之數而言,亦卽由變數 x 而成之式是也.**

又函數就其本身而論,其爲變數而非定數已如前述,故變數特又稱爲**自變數** (independent variable),而函數則稱爲**因變數** (dependent variable).

代數學上用以表示普通數之 a、b、c 等文字,微積分學上則以之表示常數,已如前述,代數學上用以表示未知數之 x、y、z、u、v、w 等文字,微積分學上則概以之表示變數,而函數之本身亦為變數,故亦以此種文字表示之.

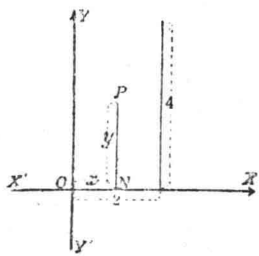
例 1 之 $y=x^2$ 之正方形,如已先知面積 y 之值而求其一邊之長時(例如面積 y 為 2 時,則 x 為 $\sqrt{2}$,又 y 為 1·21 時則 x 為 $\sqrt{1\cdot21}$ 等),則由 y 以求 x 之值,須由下列等式以求之,

$$x=\sqrt{y}$$

即正方形之一邊 x 以面積 y 表示之,故 y 為變數而 x 則為 y 之函數,即變數與函數適成相反對之關係,亦即自變數與因變數乃相反對者也.

第二節 函數之圖示

4. 茲就前節例 1 $y=x^2$ 之圖示方法說明於下.



第 2 圖

試如第 2 圖由右方向左方引一無限長之水平直線 XX',再垂直 XX' 由上方向下方引一無

限長之垂直線 YY',而以 XX' 與 YY' 之交點爲 O.茲以 O 爲基點,而於其右方 OX 上測定 x 之值於 N 點,再於 N 點垂直 OX 向上方引一垂線而測定 y 之值,則可得 P 點.例如 $x=2$,因 $y=x^2$,故 $y=2^2=4$,仍如第 2 圖,先於 OX 上測定 2 之長度,而於其終點向上方引長達 4 之垂直線,卽可求出一點也.

但 x 及 y 得有無數之值,例如

$x=0\cdot1$，　則　$y=0\cdot1^2=0\cdot01.$

$x=0\cdot2$，　則　$y=0\cdot2^2=0\cdot04.$

$x=0\cdot3$，　則　$y=0\cdot3^2=0\cdot09.$

$x=0\cdot9$，　則　$y=0\cdot9^2=0\cdot81.$

$x=1$，　則　$y=1^2=1.$

$x=1\cdot1$，　則　$y=1\cdot1^2=1\cdot21.$

$x=2\cdot8$，　則　$y=2\cdot8^2=7\cdot84.$

$x=2\cdot9$，　則　$y=2\cdot9^2=8\cdot41.$

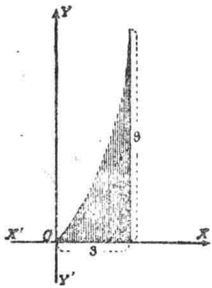
$x=3$，　則　$y=3^2=9.$

又 $x=2\cdot9$ 至 $x=3$ 之間 x 及 y 尙有若干之值,卽

$x=2\cdot91$，　則　$y=2\cdot91^2=8\cdot4681$

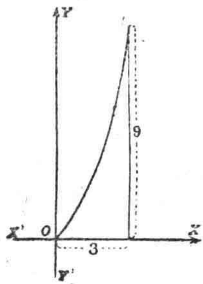
$x=2\cdot92$，　則　$y=2\cdot92^2=8\cdot5264$

要之,x 由 0 至 3 之間,同時 y 由 0 至 9 之間皆得有無



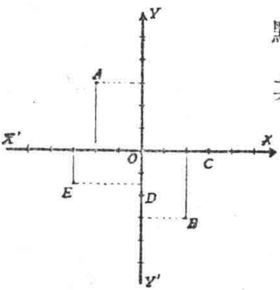
第 3 圖

數之值也.如將 x 及 y 之無數之值擇其中之三四十對以圖表示之,即如第 3 圖是也.如更將此 x 及 y 無數之值完全以圖表示之,即可得無數之點結成之**曲線** (curve),即如第 4 圖所示是也.



第 4 圖

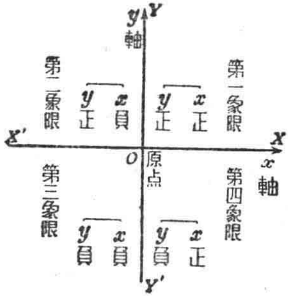
【注意】 第 2 圖之說明中尙須加以補充者,即如 $x=0$ 時,x 之終點 N 當與 O 點密合,如 x 爲負數,則 N 點必在 O 點之左方即 OX' 之上.例如 $x=-1$ 時,N 點當在距 O 點左方 1 之位置是也.又如 $y=0$ 時,NP 之長等於 O,故 N 點與 P 點相合於一點.如 y 爲負數,則 P 點當在 XX' 之下方.例如 $x=-2$, $y=3$ 之一點即第 5 圖所示之 A 點,又 $x=2$, $y=-3$ 之一點即第 5 圖上之 B 點.又第 5 圖上其他各點之位置如下:



第 5 圖

C 點	$x=3$	$y=0$
D 點	$x=0$	$y=-2$
O 點	$x=0$	$y=0$
E 點	$x=-3$	$y=-1\cdot5$

5. 茲將關於函數之圖示上之術語略述於下.如第 6 圖所示, XX' 謂之 **x 軸** (x axis), YY' 謂之 **y 軸**(y axis), O 點則謂之**原點**(origin). 又 x 軸及 y 軸,其一端之箭頭乃表示正之方向者. x 軸與 y 軸所構成之四直角由右上方向左上方而左下方而右下方之順序,謂之**第一象限**、**第二象限**、**第三象限**及**第四象限**.第一象限內 x 及 y 皆爲正,第二象限內 x 爲負 y 爲正,第三象限內 x 及 y 皆爲負,第四象限內 x 爲正 y 爲負.又凡 x 軸上之點 y 爲零,而凡 y 軸上之點則 x 爲零.函數以圖表示時,其表示函數變化之曲線,則謂之**圖解線**(graph).



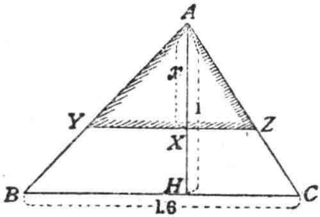
第 6 圖

第三節　實例及注意

6. 函數之意義及其圖示方法,業於第一、二兩節分別說明,茲更舉若干應用實例於下.

例 2. 第 7 圖之三角形 ABC,其底邊 BC 爲 1·6, 其高 AH 爲 1.茲在 AH 上由 A 點任意截取一段爲 x, 而以其終點爲 X, 更從 X 引平行於 BC 之一直線,而以其與

AB 相交之點爲 Y, 與 AC 相交之點爲 Z. 如以 y 爲三角形 AYZ 之面積,試以 y 爲 x 之函數並以圖表示之.



第 7 圖

【解】 須先將 YZ 之値以 x 表示之. 按 $YZ \parallel BC$, 故 $\triangle AYZ$ 與 $\triangle ABC$ 乃相似三角形,故 $\triangle ABC$ 之底邊 BC 與高 AH 之比當與 $\triangle AYZ$ 之底邊 YZ 與其高 AX 之比相等. 但 BC 爲 AH 之 $1 \cdot 6$ 倍,故 YZ 亦當爲 AX 之 $1 \cdot 6$ 倍,即

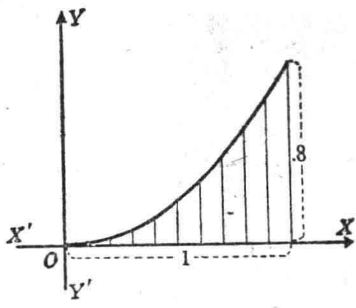
$$YZ = 1 \cdot 6x$$

$$\therefore \quad \triangle AYZ = (YZ \times AX) \div 2 = (1 \cdot 6x \times x) \div 2 = \cdot 8x^2,$$

即 $$y = \cdot 8x^2.$$

但有 $0 \leqq x \leqq 1$ 之限制.

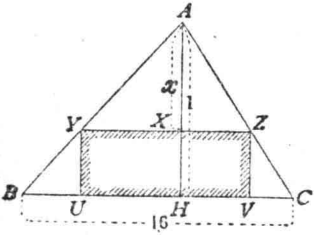
其次如將 $y = 0.8x^2$ 以圖表示之,則可先將 x 與 y 之值在 0 至 1 之間,以 0.1 爲一間隔,算出下列之十一組值,後將此十一點求出,並想像其餘之點,畫表示全體之曲線,即如第 8 圖所示是也.



第 8 圖

x	0,0·1, 0·2, 0·3, 0·4, 0·5,0·6, 0·7, 0·8, 0·9, 1
y	0,0·008,0 032,0·072,0·128,0·2,0·288,0·392,0·512,0·648,0·8

例 3. 試於前題所設三角形 ABC 上,如第 9 圖,由 YZ 兩端向 BC 各引垂直線 YU 及 ZV,如以 y 爲矩形 $YUVZ$ 之面積,則 y 爲 x 之何種函數,並將其函數以圖表示之.



第 9 圖

【解】 矩形之一邊 YZ,根據前題所示爲 $1·6x$,其他之一邊 YU 則與 XH 相等,即 $1-x$ 是也.故

$$y=YZ\times YU,$$

即

$$y=1·6x(1-x).$$

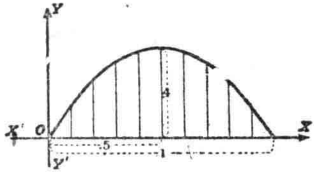
但

$$0\leqq x\leqq 1.$$

茲將 x 與 y 之值求出若干對,而如前題之圖示方法以第10圖表示之.

x	y
0	0
0·1	0·144
0·2	0·256
0·3	0·336
0·4	0·384
0·5	0·4

x	y
0·6	0·384
0·7	0·336
0·8	0·256
0·9	0·114
1	0



第 10 圖

第10圖之曲線,恰爲在 x 軸上取長爲 1 之一部分

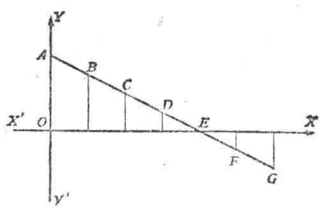
爲弦之一弧形,但此曲線並非圓弧,乃物體拋向空中復行落下在空中經過之曲線,故特謂之拋物線(parabola).

【注意】 例 3 之$y=-1.6x^2+1.6x$乃 x 之二次函數,凡 x 之二次函數卽 $y=ax^2+bx+c$, 皆可以上述之拋物線表示之.例 1 及例 2 之曲線亦爲拋物線之一部分,惟其形狀乃將第10圖之拋物線上下倒轉耳.

例 4. 試將$y=1-\frac{1}{2}x$之函數,於 $x=0$ 至 $x=3$ 之間以圖表示之.

【解】 變數 x 及 x 之函數 y 究係表示何者殊不明瞭,卽 x 與 y 均係表示長度,或 x 爲長度 y 爲面積皆無從斷定.惟若須圖示時,卽如第11圖是也.但 y 之值爲負數時須向下方引垂線而於其上取 y 之值,已如前述.茲將下列 x 與 y 之值分別附以 A, B, C, D 等文字,同時並於圖上註明各點之位置.

	x	y
A	0	1
B	0·5	0·75
C	1	0·5
D	1·5	0·25
E	2	0
F	2·5	−0·25
G	3	−0·5



第 11 圖

上列第11圖之曲線實際上並非曲線而爲直線.

【注意】　例 4 之函數爲 $y=-\frac{1}{2}x+1$, 凡 x 之一次函數卽 $y=ax+b$, 皆表直線.

例 5.　茲有一金屬棒,當溫度爲零度時其長爲 l, 如溫度爲 t 度時,則其長爲 $(1+et)l$, 惟 e 乃常數卽所謂膨脹係數是也.如將溫度與該金屬棒之長度之關係以圖表示時,則其曲線應呈何種形狀.

【解】　如以溫度爲 t 度時,金屬棒之長爲 λ, 則

$$\lambda=(1+et)l,$$

卽 t 爲變數而 λ 爲其函數是也.如將 t 及 λ 分別代以 x 及 y, 則

$$y=(1+ex)l \qquad 卽 \qquad y=elx+l,$$

此爲 x 之一次式,故如以圖表之,據前例所示,其圖解線當爲一直線是也.

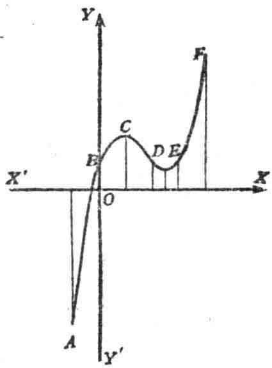
例 6.　試將下列 x 之三次函數,於 $x=-1$ 至 $x=4$ 之間,以圖表示之.

$$y=\frac{1}{2}x(x-2)(x-3)+1$$

【解】　此函數之 x 及 y 究係表示何者亦無從斷定.惟以圖表示之時,如 x 爲負數,當於原點 O 之左方 OX' 上取其值.茲將 x 與 y 之值求出若干對,而以圖表示之,

並想像其餘畫曲線之全體,即第12圖所示者也.

	x	y		x	y
(A)	-1	-5		$1\cdot5$	$1\cdot5625$
	$-0\cdot5$	$-2\cdot1875$	(D)	2	1
	$-0\cdot3$	$-0\cdot1385$		$2\cdot3$	$0\cdot7585$
	$-0\cdot2$	$0\cdot296$		$2\cdot5$	$0\cdot6875$
	$-0\cdot1$	$0\cdot6745$		$2\cdot6$	$0\cdot688$
(B)	0	1		$2\cdot8$	$0\cdot776$
	$0\cdot5$	$1\cdot94$	(E)	3	1
	$0\cdot8$	$2\cdot056$		$3\cdot5$	$2\cdot3125$
(C)	1	2	(F)	4	5



第 12 圖

例 7. 如以 x 表示正方形之面積,而以 y 表示正方形之一邊(即將例 1 之 x 與 y 互相更換其地位),則 y 爲 x 之何種函數?並將此函數於 $x=0$ 至 $x=9$ 之間以圖表示之.

【解】 按正方形之一邊之自乘即等於其面積,故如由面積以求其一邊時,則將其面積開平方,即可求得即

$$y=\sqrt{x}$$

是也.如將此函數以圖表示之,即第13圖所示.