河北大学

研究生学位论文集

理科版

（第一期）

河北大学科研处

一九八五年四月

前　　言

一九七八年恢复研究生招生制度以来，我校已有三届研究生毕业。为了检查和提高研究生的教学质量和学术水平，开展学术交流，广泛征求学术界、教育界同行专家的意见，总结经验，进一步改进研究生培养工作，使我校研究生的教育更好地适应社会主义现代化建设的需要。现将已获得硕士学位研究生的论文，分文、理两册编印成《河北大学研究生学位论文集》。文集中，论文按学科门类和授予学位的先后顺序编排。

在这些论文的撰写、答辩中，得到校内外有关专家、教授有力的指导和热情的帮助。对此，谨致诚挚的谢意。

由于我们水平有限，又是初次做这项工作，在编印方面难免有不妥之处，欢迎批评指正。

河北大学科研处

一九八五年四月

目　录

理 学 类

关于m——增生算子扰动问题的几个结果

数学系泛函分析专业
78级研究生 杨凤岐
指导教师 杨从仁 教授
马绍芹 副教授

本文得到了m—增生算子扰动问题的几个结果。其中，定理1与定理2可以看做N·OKazawa〔4〕中两个定理的部分推广，定理3与定理4稍微改善了同一作者〔5〕中的两个结果。

现将本文中用到的几个符号和术语介绍于下。

设X是—Banach空间，X^*是其共轭空间。泛函$f\in X^*$在点$u\in X$处的值记为(u,f)。$\|\cdot\|$有时记X中的元素的范数，有时记X^*中的元素的范数，有时记X中线性有界算子的范数，这样做并不会引起混乱。以F记X到X^*中的对偶映射，即对$u\in X$，$F(u)=\{f\in X^*|\ (u,f)=\|u\|^2=\|f\|^2\}$。由Hahn—Banach定理知道，F对一切$u\in X$都有定义。一般地说，F是一个多值映射。当$X^*$为严格凸空间时，F成为单值映射；特别在希尔伯特空间H的情况下，$F(u)=u$。

设A为X中一(单值或多值，线性或非线性)算子，其定义域D(A)、值域R(A)均为X的子集，如果对任何u、$v\in D(A)$任何$x\in Au$，$y\in AV$和任何实数$\lambda>0$都有$\|(u+\lambda x)-(V+\lambda y)\|\geqq\|u-V\|$，我们称A是增生的。T·Kato证明了，算子A的增生性等价于：对任何u、$v\in D(A)$，任何$x\in Au$，$y\in Av$，存在一个$f\in F(u-v)$使得$R_e(x-y,f)\geqq 0$，这里R_e表示一个复数的实部。当A增生时，对任何$\lambda>0$，逆算子$(1+\lambda A)^{-1}$存在而且是非膨胀算子。对增生算子A来说，或者对一切$\lambda>0$均有$R(1+\lambda A)=X$，或者这种$\lambda>0$就一个也不存在。在第一种情况时。称算子A是m—增生的。

定理1，设X是—Banach空间，A是X中的稠定线性m—增生算子，B是X中的线性增生算子且$D(A)\subset D(B)$，如果对某数$\lambda_0>0$，$B(\lambda_0+A)^{-1}$是一压缩算子(即$\|B(\lambda_0+A)^{-1}\|<1$)，那么A+B也是m—增生的。

证明，根据Hille—Yosida定理，—A是一个c_0类压缩半群的无穷小母元。于是对任何$u\in D(A)$，只要$f\in F(u)$总有$R_e(Au,f)\geqq 0$。利用T·Kato关于算子增生性判别法容易知道，A+B是增生的。为了得出A+B的m—增生性，只需证明$R(\lambda_0+A+B)=X$就够了。

由A的m—增生性我们知道，$(\lambda_0+A)^{-1}$是在X上处处定义的连续线性算子；B是稠定增生算子，根据G·Lumer and R·S·Phillips〔3〕的引理3·3，B是可闭的。于是不难看出$B(\lambda_0+A)^{-1}$是X上的闭线性算子。根据闭图像定理，$B(\lambda_0+A)^{-1}$是X上的连续线性算子。因为$\|A(\lambda_0+B)^{-1}\|<1$，1就属于$-B(\lambda_0+A)^{-1}$

的豫解集，从而$R(1+B(\lambda_0+A)^{-1})=X$。

但是，$R(\lambda_0+A+B)=R((\lambda_0+A+B)(\lambda_0+A)^{-1})$
$=R(1+B(\lambda_0+A)^{-1})$
$=X$，

那么$A+B$就是m—增生的。

注：当X为自反Banach空间时，A的m—增生性就蕴含着A的稠定性（见K·Yosida〔7〕218页），于是定理中条件A的稠定性是多余的。

定理2，设X是一个自反Banach空间，A是X中的单值非线性m—增生算子，B是X中的连续非线性算子且$D(A)\subset D(B)$，若存在一个正数$\lambda_0>0$使得对一切u、$V\in D(A)$，存在$f\in F(\lambda_0(u-v)+(Au-Av))$满足$R_e(Bu-Bv,f)\geq 0$，那么$A+B$是m—增生的。

证明，因X是自反的，由A·Yamamoto and N·Okazawa〔6〕引理2·3知，$A+B$是增生的。余下只需证明$R(\lambda_0+A+B)=X$。

$B(\lambda_0+A)^{-1}$是增生的。

事实上，若x，$y\in X$，令$(\lambda_0+A)^{-1}x=u$，$(\lambda_0+A)^{-1}{}_Y=v$，显然u，$v\in D(A)$，由定理条件，存在$f\in F(\lambda_0(u-v)+(Au-Av))$使得

$$\mathrm{Re}(Bu-Bu,f)\geqq 0$$

但是$\lambda_0(u-v)+(Au-Av)=(\lambda_0+Au-(\lambda_0+A)v=x-y$，于是$R_e(B(\lambda_0+A)^{-1}x-B(\lambda_0+A)^{-1}y,f)=R_e(Bu-BV,f)\geqslant 0$，由此知道$B(\lambda_0+A)^{-1}$是增生的。

显然$B(\lambda_0+A)^{-1}$是连续的。于是$B(\lambda_0+A)^{-1}$是X上处处定义的连续非线性增生算子。由V·Barbu〔1〕的推论3·2知，$B(\lambda_0+A)^{-1}$是m—增生的。

于是，由$R(\lambda_0+A+B)=R((\lambda_0+A+B)(\lambda_0+A)^{-1})=R(1+B(\lambda_0+A)^{-1})=X$知，$A+B$是m－增生的。

注1．若将定理中的空间X设为使X^*为一致凸的实Bana ch空间那么算子B的demi－连续性(即若u、$u_n(n=1,2\cdots)\in D(B)$，$u_n\to u$则$Bu_n\to Bu$，这里→表示强收敛，→表示弱收敛)足以保证$A+B$的m—增生性。这可由T·K ato〔2〕的定理10·1用上面定理类似的论证得到。

注2．在希尔伯特空间H中，定理2的最后一个条件可换为：对一切u、$v\in D(A)$，有

$$\mathrm{Re}(Bu-Bv,Au-Av)\geqslant 0$$

注3．定理2中的最后一个条件可称为B对A的相对增生性。这与相对有界性有些类似。

下面的结果涉及多值非线性算子。

定理3，设X是实Banach空间，X^*是一致凸的，A、B为X中的多值非线性m－增生算子且$D(A)\cap D(B)\neq\phi$。若存在非负常数$b<1$、$[0,\infty)$上定义的非减函数$\varphi(r)\geq 0$和$\psi(r)\geq 0$使得对一切$u\in D(A)$有

$(y,F(B\varepsilon u))\geq-\psi(\|u\|)-\varphi(\|u\|)\|B\varepsilon u\|-b\|B\varepsilon u\|^2$，$y\in Au$，

则 $A+B$ 是 m－增生的。其中 $B_\varepsilon=\frac{1}{\varepsilon}(1-(1+\varepsilon B)^{-1})$ ，$\varepsilon>0$，是 B 的 Yosida 逼°近

证明，已经知道，对任何 $\varepsilon<0$，$A+B_\varepsilon$ 是 m－增生的（见 v · Barbu〔1〕的引理 3 · 2）。于是对每个 $v\in X$，存在唯一的 $u_\varepsilon\in D(A)$ 使得

$$u_\varepsilon+y_\varepsilon+B_\varepsilon u_\varepsilon=v,\ \ y_\varepsilon\in Au_\varepsilon$$

根据Y · Konishi 的一个结果(见前一引文)，为确立定理的正确性，只需证明 $\{\|B_\varepsilon u_\varepsilon\|\}$ 是有界的。将 $v-u_\varepsilon=y_\varepsilon+B_\varepsilon u_\varepsilon$ 代入定理所要求的不等式中得

$$(\mu-u_\varepsilon,\ F(B_\varepsilon u_\varepsilon))=(y_\varepsilon,\ F(B_\varepsilon u_\varepsilon))+\|B_\varepsilon u_\varepsilon\|^2\leqslant-\psi(\|u_\varepsilon\|)\varphi(\|u_\varepsilon\|)$$
$$\|B_\varepsilon u_\varepsilon\|+(1-b)\|B_\varepsilon u_\varepsilon\|^2,$$

但因

$$(\mu-u_\varepsilon,\ F(B_\varepsilon u_\varepsilon))\leqslant(\|\mu\|+\|u_\varepsilon\|)\|B_\varepsilon u_\varepsilon\|$$

所以更有

$$(\|\mu\|+\|u_\varepsilon\|)\|B_\varepsilon u_\varepsilon\|\leqslant-\psi(\|u_\varepsilon\|)-\varphi(\|u_\varepsilon\|)\|B_\varepsilon u_\varepsilon\|+$$
$$+(1-b)\|B_\varepsilon u_\varepsilon\|^2,$$

整理后乃得

$$(1-b)\|B_\varepsilon u_\varepsilon\|^2-(\|v\|+\|u_\varepsilon\|++\varphi(\|u_\varepsilon\|))\|B_\varepsilon u_\varepsilon\|-\psi(\|u_\varepsilon\|)\leqslant0$$

对 $\|B_\varepsilon u_\varepsilon\|$ 解该不等式得

$$\|B\varepsilon u\varepsilon\|\leq(1-b)^{-1}(\|v\|+\|u_\varepsilon\|+\varphi(\|u_\varepsilon\|))$$

$+[(1-b)^{-1}\psi(\|u_\varepsilon\|)]^{\frac{1}{2}}$，由于 $\{\|u_\varepsilon\|\}$ 是有界的（亦见前引文），从而 $\{\|B_\varepsilon u_\varepsilon\|\}$ 也是有界的。

利用这一结果，像N·Okazawa〔5〕中完全类似的证明可得

定理 4、设 X 为实 Banach 空间，X^* 一致凸，A 为 X 中的多值非线性 m－增生算子，B 为 X 中的线性 m一增生算子且 D (A) ⊃D (B) 。如果存在非负常数 $b<1$，〔0，∞) 上的非减函数 $\varphi(r)\geqslant0$ 和 $\psi(r)\geqslant0$ 使得对一切 $u\in D(B)$ 有

$$(y,\ F(Bu))\geqslant$$
$$-\psi(\|u\|)-\varphi(\|u\|)\|Bu\|-b\|Bu\|^2,\ y\in Au$$ 那么 $A+B$ 是 m一增生的。

文　献

〔1〕V· Barbu, Nonlinear Semigroups and Differential equations in Banach spaces, Noordhoff International publishing Leyden, the Netherlands 1976。

〔2〕T·Kato, Accretive operators and nonlinear evolu tion equations in Banach spaces,Nonliner Functional Analysis, proc·Symp·pure Math., Amer·Math·Soc,18·, part I(1970), 138—161.

〔3〕C·Lumer and R·S·Phillips, Dissipative operators in a Banach space, pacific J·Math·, 11(1961)679—698.

〔4〕N·okazawa,Two perturbation theorems for contraction semigroups in a Hilbert space•proc•Japan Acad•,45(1969) , 850--853.

〔5〕 ________,singular perturbations of m-accretive oparators, J•Math•Soc•Japan,32(1980), 19—44。

〔6〕A•Yamamoto and N•okazawa, weakly closed m- accretive operators,Proc•Amer•Math•Soc•,66(1977), 284-288.

〔7〕k•Yosida,Functional Analysis, 5 th ed•, SPringer- verlag, Berlin Heidelberg New York 1978.

Banach空间m增生算子的扰动问题

数　学　系　泛函分析专业

78级研究生　何　　震

指导教师　杨从仁教授

马绍芹副教授

引　　言

算子半群扰动理论是近十多年来才发展起来的，它对研究Banad空间的微分方程，尤其是对方程的适定性问题有重要的应用。它研究的主要问题是：在Banach空间X中一个线性（或非线性的）m增生算子A与一个扰动算子（一般是增生或m增生的）B的和A+B在什么条件仍然是m增生的。在这方面Kato〔4〕OKazawa〔6〕,〔7〕、〔8〕、〔9〕，Gustafson〔3〕和Chernoff〔2〕等人做了不少工作，得出了一些重要结果。

设X是一个Banach空间，一个定义域D（A）和值域R（A）都在X上的线性算子A叫做增生的，如果

$$\|(A+\xi)u\| \geqq \xi\|u\| \qquad (A)$$

对所有的$u\in D(A)$和某一$\xi>0$成立。

特别地，若$R(A+\xi)=X$对某一>ξ 0成立（从而对所有$\xi>0$成立）我们说A是m增生的。

设X^*是X的对偶空间，将$W\in X$、$f\in X^*$之间的元素对记为（w，f），若F是由X^*上的对偶映象，即对每一$W\in X$

$$F(W)=\{f\in X^*,\ (W,f)= \\ =\|W\|^2=\|f\|^2\}$$

则条件（A）等价于下列条件：（见Kato〔5〕）

对每一$u\in D(A)$存在$f\in F(u)$使得$R_e(Au,f)\geqq 0$　　　　(A′)

本文分为三段，第一段提出了比Gustafson〔3〕定理2关于m增生算子扰动更广泛的充分条件，并对okazawa〔8〕定理2·2的条件作了改进：第二段考虑了okazawa〔8〕中一个扰动定理（定理2·2）b=1的情形；第三段把okazwa〔8〕定理6·4推广到非线性的情形。

1、m增生算子扰动的新条件：

定义1·1（kato〔4〕）设A、B是Banch空间X上的两个线性算子，且$D(A)\supset D(B)$，我们说B是关于A相对有界的，（简言之，说B是A有界的）若存在非负常

数 a、b 使得对所有的 $u \in D(A)$

$$\|Bu\| \leqq a\|u\| + b\|Au\|。 \quad (1\cdot 1)$$

定义 1・2（kato〔4〕）所有满足（1・1）式可能的 b 的下确界叫 B 的 A界。

在算子半群扰动理论中，一个标准的条件就是相对有界的条件，这种扰动叫正则扰动，正则扰动的主要定理由 Gustafaon〔3〕获得。下面我们证明一个比 Gustfson定理稍微广泛一点的一个定理。

定理 1・3 设 X 是 Banach 空间，A 是 X 上线性增生算子，B 是 X 上线性 m 增生算子，且 $D(B) \subset D(A)$，若对每一$u \in D(B)$

$$\|Au\| \leqq a\|u\| + b'\|Bu\| + b''\|(A+B)u\| \quad (1\cdot 2)$$

其中$a \geqq 0$，$0 \leqslant b' < 1$，$0 \leqq b'' < 1$ 是常数，则 A＋B是 m 增生的。

证明：设 $S = A + B \quad T(x) = B + xA$

其中 $0 \leqq x \leqq 1$，则 $T(x)$ 有定义域 $D(B)$，且 $T(0) = B \quad T(1) = S = A + B$ 因

$$Bu = T(x)u - xAu$$

$$Su = T(x)u + (1-x)Au$$

由（1・2）式，我们有

$$\begin{aligned}\|Au\| &\leqq a\|u\| + b'\|T(x)u - xAu\| + b''\|T(x)u + (1-x)Au\| \\ &\leqq a\|u\| + b'\|T(x)u\| + b'x\|Au\| + b''\|T(x)u\| + b''(1-x)\|Au\| \\ &\leqq a\|u\| + (b'+b'')\|T(x)u\| + b\|Au\|\end{aligned}$$

（其中 $b = \max(b', b'')$）

$$\therefore \|Au\| \leqq \frac{1}{1-b}\left(a\|u\| + (b'+b'')\|T(x)u\|\right) \quad (1\cdot 3)$$

于是，A 是 T(x)有界的，它的 T(x)界不超过 $\beta = (1-b)^{-1}(b'+b'')$。将(1・3)式两边同乘以$|x'-x|$知$(x'-x)A$ 是 T(x)有界的，且当$|x'-x| < \frac{1}{\beta}$时，其界不超过 1。

当$x' = 0$时，$T(0) = B$是m增生的，由 Gustafson〔3〕定理 2 知当$|x| < \frac{1}{\beta}$时，$T(x)$ 是m增生的。因β是固定值，所以用有限步递推可知$T(1) = S = A + B$ 是m增生的。

注1.4：（1）特别地，在定理1.3中令$b'' = 0$，即得出 Gustafson〔3〕定理2。（2）用定理1.3的证明方法，还可以将 Barbu〔1〕Ⅱ定理3.5（这一结果是Kato获得的）的条件做相应的修改，得出以下非线性扰动的结果。

推论1.5：设X^*是一致凸实 Banchh 空间，A和B是X上两个线性m增生算子，若下面两条件成立

a) $D(B) \subset D(A)$

b) 对每一$r > 0$ 存在常数 $0 \leqslant L' < 1$，$0 \leqslant L'' < 1$ 和$M \geqslant 0$ 使得对任意$u \in D(B)$，$\|u\| \leqslant r$有

$$|Au| \leqslant L'|Bu| + L''|(A+B)u| + M\text{（其中}|S| = \inf_{u\in S}\{\|u\|\}\text{）}\quad(1.4)$$

则A＋B是m增生的。

证明：完全类似于定理1.3的证明，相应于（1.2）式的不等式是

$$|Au| \leqq \frac{1}{1-L}(M + (L'+L'')|T(x)u|)\quad(1.5)$$

其中$L=\max(L', L'')$

然后，利用Barbu〔1〕Ⅱ定理3.5可知A＋B是m增生的。

（3）在定理1.3中若b'，b''其中之一等于1，类似于chernoff〔2〕附加以条件A^*在X^*中稠定，则chernoff〔2〕的结论也成立。定理可叙述为

定理1.6：设X是Banach空间，A是X上线性增生算子，B是X上线性m增生算子，且$D(B)\subset D(A)$，若对每一$u\in(B)$

$$\|Au\| \leqslant a\|u\| + b\|Bu\| + \|(A+B)u\|$$

或者 $\|Au\| \leqslant a\|u\| + \|Bu\| + b\|(A+B)u\|$

其中$a\geqq 0$，$0\leqq b<1$是常数，再假设A的共轭算子A^*在X^*中稠定，则$\overline{A+B}$（即A＋B的闭包）是m增生的。

证明完全类似于Chernoff〔2〕，只不过考虑$B+tA$（$0\leqq t<1$）是m增生时用到本文定理1.3。

Okazawa所给出的扰动稳定的条件都是二次项组合起来的，下面我们证明一个二次项与一次项混合组合条件的定理。

定理1.7：设X是Banaoh空间，A是X上线性m增生算子，B是X上线性增生算子，$D(A)\subset D(B)$，若下面两条件满足：

a)存在常数$a\geqq 0$，$b\geqq 0$，并对每一$u\in D(A)$存在$h\in F(Au)$，使得

$$R_c(Bu, h) + a\|u\| + b\|Au\| \geqq 0\quad(1.6)$$

b)$D(A)$在X中稠密，$D(A^*)$在X^*中稠密，则A＋B是m增生的。

证明：先首设$\|u\|=1$，$u\in D(A)$，(1.6)式变为

$$R_e(Bu, h) + a + b\|Au\| \geqq 0\quad(1.7)$$

对任意的$u\in D(A)$，$u\neq 0$，由对偶映象的正齐次性有$h'\in F(Au)$使得

$$B_e\left(\frac{Bu}{\|u\|}, \frac{h'}{\|u\|}\right) + a + b\left\|\frac{Au}{\|u\|}\right\| \geqq 0\quad(1.8)$$

将（1.8）式两边同乘以$\|u\|^2$得到

$$R_e(Bu, h') + a\|u\|^2 + b\|A_u\|\,\|u\| \geqq 0$$

即

$R_e(Bu, h') \geqq -a\|u\|^2 - b\|Au\|\,\|u\|$这正符合Okazawa〔8〕定理3·1的条件，所以A＋B是m增生的。

相应地，我们用定理1·7同样的方法，还可以得出与Okazawa〔8〕定理3·3类似的结果。

推论1·8：设X是Banach空间，A是X上线性m增生算子，B是X上线性增生

算子，且 $D(A)\subset D(B)$，若下面两条件满足。

a）存在常数 $a\geqq 0, b\geqq 0$，并对每一 $u\in D(A)$ 存在 $g\in F(Bu)$ 使得

$R_e(Au,g)+a\|u\|+b\|Bu\|\geqq 0$

b）$D(A)$ 在 X 中稠密，$D(A^*)$、$D(B^*)$ 在 X^* 中稠密。

则 $A+B$ 是 m 增生的。

2、正则扰动 $b=1$ 的情形：

Okazawa〔8〕一文中的定理2·2只说明了 $0\leqq b<1$ 的情形，对 $b=1$ 没有回答，其实用 Okazawa〔8〕中的定理3·1就可以考虑 $b=1$ 的情形，但 Okazawa 并没有指出这一点，下面对这个问题给予考虑。

定理2·1：设 X 是Banach 空间，A 是 X 上一线性增生算子，S 是 X 上一线性、稠定的 m 增生算子，且 $D(S^*)$ 在 X^* 上稠密，$D(S)\subset D(A)$，若对每一 $u\in D(S)$ 存在 $h\in F(Su)$ 和非负常数 a，使得

$$R_e(Au,h)\geqq -a\|u\|^2-\|Su\|^2 \qquad (2\cdot 1)$$

则 $\overline{S+A}$（即 $S+A$ 的闭包）是 m 增生的。

证明：由假设

$$R_e(Au,h)\geqq -a\|u\|^2-\|Su\|^2=-a\|u\|^2-(Su,h)$$

$\therefore R_e((A+B)u,h)\geqq -a\|u\|^2$

因为 $A+S$ 是增生的，且 $D(S)\subset D(A+S)=D(S)$ 此外，Okazawa〔8〕，定理3·1的其它条件均满足，所以 $\overline{A+S}$ 是 m 增生的。（符合Okazawa〔8〕定理3·1中 $C=0$ 的情形）。

用定理2·1可以把Okazawa〔7〕中的定理2·1从Hilbert空间推广到Banach空间中去。

推论2·2：设 X为Banach 空间，A 和 B 是 X 上线性稠定 m增生算子，若存在常数 $a\geqq 0, b\geqq 0$ 对所有 $u\in D(B)\subset D(A)$ 存在 $h\in F(Bu)$ 使得

$$R_e(A_nu,h)+a\|u\|^2+b\|A_nu\|^2\geqq 0 \qquad (2\cdot 2)$$

（其中 An 为 A 的 Yosida 逼近）

则①若 $b<1$，$A+B$ 是 m 增生的

②若 $b=1$，$D(B^*)$ 在 X^* 中稠密，那么 $\overline{A+B}$ 是 m 增生的。

证明：因为对每一 $u\in D(A)$ 有 $\|A_nu-Au\|\to 0(n\to\infty)$（见 Yosida〔10〕X§7）在(2·2)式两边取极限，得到

$R_e(Au,h)+a\|u\|^2+b\|Au\|^2\geqq 0$ 当 $0\leqq b<1$ 时，它满足 Okazawa〔8〕定理2·2条件，故 $A+B$ 是 m 增生的。当 $b=1$ 时，它满足本文定理2·1的条件，所以 $\overline{A+B}$ 是 m 增生的。

3、非线性 m 增生算子的扰动

Okazawa〔8〕一文只考虑了非线性 m 增生算子的线性扰动，对非线性扰动未予以考虑。这里我们指出对 Okazawa〔8〕定理6·4的证明稍加修改也适用于非线性扰动。

以下有关非线性算子的概念、术语和符号可见 Barbu〔1〕Ⅱ。

引理3·1(Okazawa)设 X^* 是一致凸 Banach 空间，A、B 是 X 上两个非线性 m 增生

算子，且 $D(A)\cap D(B)\neq\phi$，若存在常数$0\leqq b<1, a\geqq 0$和关于$r\geqq 0$的非减函数$\psi(r)\geqq 0$，使得对每一$u\in D(A)$有

$$(y,F(B\varepsilon u))\geqq-\psi(\|u\|)-b\|B\varepsilon u\|^{2}\quad(3\cdot 1)$$

其中$y\in Au$，$B\varepsilon$为 B 的 Yosida 逼近，则 $A+B$ 是 m 增生的。

证明可在 Okazawa〔8〕内找到。

定理3·2：设 X^*是一致凸 Banach 空间，A、S 是 X 上两个非线性 m 增生算子，其中 S 是单值的，$D(S)\subset D(A)$。若存在常数 $a\geqq 0, 0\leqq b<1, 0\geqq 0$使得对每一$u\in D(S)$有

$$(y,F(Su))\geqq-a\|u\|^{2}-b\|Su\|^{2}-C\quad(3\cdot 2)$$

其中 $y\in Au$，则 $S+A$ 是 m 增生的。

证明：设 $S\varepsilon=\varepsilon^{-1}〔1-(1+\varepsilon S)^{-1}〕=S(1+\varepsilon s)^{1}$ 为 S 的 Yosida 逼近。对任意 $u\in D(A), y\in Au z\in A(1+\varepsilon S)^{-1}u$ 利用 A 的增生性，我们有

$$\begin{aligned}\varepsilon(y,F(S_{\varepsilon}u)&=(y,F(\varepsilon S_{\varepsilon}u))\\&=(y,F(u-(1+\varepsilon S)^{-1}u))\\&=(y-Z,F(u-(1+\varepsilon S)^{-1}u))+(Z,F(\varepsilon S(1+\varepsilon S)^{-1}u))\\&\geqq\varepsilon(Z,F(S(1+\varepsilon S)^{-1}u))\end{aligned}$$

$\therefore(y,F(S\varepsilon u)\geqq(Z,F(S(1+\varepsilon S)^{-1}u))$对任意固定的元$u_0\in X$，由(3·2)式可得出

$$\begin{aligned}(y,F(S\varepsilon u))&\geqq(Z,F(S(1+\varepsilon S)^{-1}u))\\&\geqq-a\|(1+\varepsilon S)^{-1}u\|^{2}-b\|S(1+\varepsilon S)^{-1}u\|^{2}-0\\&\geqq-a〔\|(1+\varepsilon S)^{-1}u-(1+\varepsilon S)^{-1}u_{0}\|+\\&\quad+\|(1+\varepsilon S)^{-1}u_{0}\|〕^{2}-b\|S\varepsilon u\|^{2}-C\\&\geqq-a〔\|u-u_{0}\|+\|(1+\varepsilon S)^{-1}u_{0}\|〕^{2}-b\|S\varepsilon u\|^{2}-C\\&\geqq-a〔\|u\|+\|u_{0}\|+\|(1+\varepsilon S)^{-1}u_{0}\|〕^{2}-b\|S\varepsilon u\|^{2}-C\quad(3\cdot 3)\end{aligned}$$

因为$\|u_0\|$、$\|(1+\varepsilon S)^{-1}u_0\|$均为常数，所以令

$$\psi(r)=a(r+a_1)^2+C$$

其中$a_1=\|u_0\|+\|(1+\varepsilon s)^{-1}u_0\|$，则$\psi(r)$是 r 的非减函数，于是符合引理3·1条件，$S+A$ 是 m 增生的。

注3·3：(1)将条件(3·2)改为

$$(y,F(Su))\geqslant-\psi(\|u\|)-b\|Su\|^{2}$$

其中$\psi(\|u\|)\geqq 0$为$\|u\|$的非减函数，则定理3·2仍成立。

(2)利用 Yamamoto 和 okazawa〔9〕命题2·2，引理2·3也可将定理3·2中 X^*一致凸的条件改为 X 自反，A 和 B 弱闭的情形，定理可叙述为。

定理3·4：设 X 是自反 Banach 空间，A、S 是 X 上弱闭非线性单值 m 增生算子，且$D(S)\subset D(A)$。若存在非负常数$0\leqq b<1$和关于 $r\geqq 0$ 的非减函数$\psi(r)\geqq 0$ 使得对每一$u\in D(S)(Au,F(Su))\geqq-\psi(\|u\|)-b\|Su\|^{2}$则 $S+A$ 是 m 增生的。

参 考 文 献

1.V.Barbu·Nonlinear Semigroups and Differential Eguations in Banach Spaces,Noordhoff international Publ。Leyden,The Nethelands 1976。

2·P·R·Chernoff,Perturbations of dissipative Operators with relative bound one,proc·Amer·Math·Soc·33(1972)72-74。

3·K·Gustafson,A pertubation Lemma.Bull.Amer·Math·Soc,72(1966)334-338。

4·T·Kato,Perturbation Theory for Linear Operators。
znd ed.Die Grundlehren der math。wissenschaften,Band 132。
Springer --Verlag,Berlin and New York,1976。

5·T·Kato,Nonlinear Semigroups and evolution equations J·Math·Soc.
Japan,19(1967),508-520。

6·N·Okazawa,Perturbations of linear m-- accretive operators。Proc·Amer·Math·Soc, 37(1973)169--174。

7.____________, Remarks on linear m-- accretive operators in a Hilbert Space, J, Math。Soc。Japan, 27(1975) 160-165。

8.____________, Singular Perturbations of m- accretive Operators, J·Math· Soc。Japan 32(1980)19--44。

9 .A · Yamamoto and N · Okazawa, Weakly Closed m-accretive operators, Proc · Amer · Math · Soc · 66(1977)284—288 ·

10.K · Yosida, Functional Analysis · 5th, ed · Die Grundlehren der math · Wissenschaften, Band 123, Springer--Verlag , Berlin and New York · 1978 ·

《Banach空间中的非线性极大单调算子的扰动》

数学系：泛函分析专业
78级研究生　崔宏志
指导教师　杨从仁教授
马绍芹副教授

本文在〔1〕与〔2〕的基础上，部分地完善了〔1〕与〔2〕的一些结果。定理1·1推广了〔2〕的定理2·2的结果。推论1·1是关于m（≥2）个极大单调算子的扰动。定理1·2给出了一个单调算子对一个极大单调算子扰动的新条件。定理1·3在加强的条件下推广了〔2〕的定理2·3的结果。定理2·1给出了两个极大循环单调算子的和仍为极大循环单调算子的充要条件。推论2·1给出了两个极大循环单调算子扰动的一个具体条件。

导　　言

X是实的B－空间，其共轭空间为X^*。$x^*\in X^*$在$x\in X$的值以(x, x^*)示之。

$X\times X^*$的子集A被称为单调的，如果对任意$[x_i, X_i^*]\in A$，$i=1, 2$，都有$(x_1-x_2, x_1^*-x_2^*)\geq 0$。

若A没有真单调扩张，则A称为极大单调的。

当X及X^*是自反的且严格凸时，A是$X\times X^*$中的单调集（或称单调算子），那么，A是极大单调的充要条件是$R(A+\lambda F)=X^*$，其中$\lambda>0$，F是$X\to X^*$的共轭映象。

当X及X^*是自反的且严格凸，A是$X\times X^*$中的极大单调集，则对任意$x\in X$及$\lambda>0$，方程

$F(x_\lambda-x)+\lambda X_\lambda^*=0$，其中$[X_\gamma, X_\gamma^*]\in A$在A中有唯一解。今定义

$J_\lambda x=x_\lambda$，$A_\lambda x=x_\lambda^*$

如果A与B皆为$X\times X^*$中的极大单调集，由〔1〕的推论1·1知，对$\lambda>0$，$A+B_\lambda$也是极大单调集。

由〔2〕的定理2·1知，当X与X^*是严格凸的，且A与B均为$X\times X^*$中的极大单调集，对任意$f^*\in X^*$，$F(x_\lambda)+x_\lambda^*+B_\lambda x_\lambda=f^*$，$[x_\lambda, X_\gamma^*]\in A$，那么$f^*\in R(F+A+B)$的充要条件是$\{\|B_\gamma x_\lambda\|;\ \lambda\downarrow 0\}$为有界集。

由〔2〕的定理2·2知，X是自反的，A与B是$X\times X^*$中的极大单调集，若

$[\mathrm{int}\,D(A)]\cap D(B)\neq\phi$

则A＋B也是极大单调的。

由〔2〕的定理2·3，当X是自反的，A与B是$X\times X^*$中的极大单调集，且D(A)$\cap$D(B)

$|Bx|\leq h(\|x\|)|Ax|+C(\|x\|)$，$\forall x\in D(A)$

此处h(r)，G(r)均非减函数，且k(r)<1，$\forall r\in R$

那么，A+B是极大单调的。

A：$X\to X^*$称为循环单调的，如果

$$(x_0-x_1,\ x_0^*)+(x_1-x_2,x_1^*)+\cdots+$$
$$+(x_n-x_0,\ x_n^*)\geqslant 0$$

对任意$x_i^*\in Ax_i$，i＝0，1，2，…，n

若A没有真循环单调扩张，则称A是极大循环单调的。

由〔1〕的定理2·1，当X是实B－空间，φ是X上的正常凸下半连续函数，则$\partial\varphi$是$X\times X^*$中的极大单调集。

由〔1〕的定理2·3，当X是实的B－空间，$A\subset X\times X^*$，A是极大循环单调集的充要条件是存在X上的下半连续的正常凸函数φ，使$A=\partial\varphi$，而且除去加上一个常数外，A唯一决定φ。

由〔5〕的定理3知，当f_1与f_2是X上的正常凸函数，若存在$x_0\in X$，使$f_1(x_0)<\infty$，$f_2(x_0)<\infty$，且f_1与f_2至少有一个在x_0连续，则$\partial(f_2+f_2)=\partial f_2+\partial f_2$

每个命题证完后，以“▯”示之。

I、由于单调算子的扰动

定理1·1 设X是自反的实B－空间，A与B皆为$X\times X^*$中的极大单调集，若存在$x_0\in D(A)\cap D(B)$，及某球面$S\supset D(A)$，其中$S=\{x\in X;\ \|x-x_0\|=r>0\}$，而且$Ax_0US$是$X^*$中的有界集。那么，A+B也是极大单调的。

证明：与〔1〕的定理1·1的证明相同。▯

推论1·1 设X是自反的实B－空间，$A_1,A_2,\cdots,A_m$为$X\times X^*$中的m(任意自然数)个极大单调集，若∃

$$x_0\in\bigcap_{i=1}^{m}D(A_i)\text{ 及某球面 }S\subset\bigcap_{i=1}^{m-1}D(Ai)\text{，其中 }S=\{x\in X;\ \|x-x_0\|=r>0\}\text{，而且}$$

$$\left(\bigcup_{i=1}^{m-1}A_i(x_0)\right)\cup\left(\bigcup_{i=1}^{m-1}A_iS\right)$$

是X^*中的有界集，则$\sum\limits_{i=1}^{m}A_i$是极大单调的。

证明：今对算子的个数，用数学归纳法证之。当m＝2时，已由定理1·1所证。若此命题对m－1个算子真确，下面看m个算子的情形。

此时对A_2，A_2，…，A_{m-1}，A_m这m－1个算子，有

$$x_0 \in \bigcap_{i=2}^{m} D(A_i), \quad S \subset \bigcap_{i=2}^{m-1} D(A_i)$$

而且 $\left(\bigcup_{i=2}^{m-1} A_i(x_0)\right) \bigcup \left(\bigcup_{i=2}^{m-1} A_i S\right)$ 是 X^*中的有界集。由归纳法的假设，$\sum_{i=2}^{m} A_i$ 是极大单调集。令$B = \sum_{i=2}^{m} A_i$。即B是极大单调集。

因 $\sum_{i=1}^{m} A_i = A_1 + B$

显然，$x_0 \in D(A_1) \bigcap D(B)$，$S \subset D(A_1)$，并且

$A_1(x_0) \bigcup A_1 S$ 是X^*中有界集，由 $m=2$时的真确性，得到 $A_1 + B$是极大单调的。

下一定理是一个单调算子对一个极大单调算子的扰动。

定理1·2 设X是自反的实B－空间，A是 $X \times X^*$ 中的极大单调集，且有 $\{\{x_0\} \bigcup S\} \subset D(A)$，其中 $x_0 \in X$，$S = \{x \in X; \|x - x_0\| = r > 0\}$，$Ax_0 \cup AS$ 是 X^* 中的有界集。B是单值、单调，hemi一连续的（见〔4〕P 199）且 $D(A) \subset D(B)$。那么 $A + B$ 是极大单调的。

证明：因B是hemi一连续的，所以D(B)是X中的凸集。这样 $\overline{D(B)}$ 是闭凸的，令 $K = \overline{D(B)}$

由〔1〕的定理1·4知，存在 $X \times X^*$ 中的极大单调集$\overline{B}$，并且 $B \subset \overline{B}$，$D(\overline{B}) \subset K$。

因 $x_0 \in D(A) \subset D(B) \subset D(\overline{B})$，所以有 $x_0 \in D(A) \bigcap D(\overline{B})$，又$Ax_0 \bigcup AS$是有界集，由定理1·1知，$A + \overline{B}$是极大单调集。

下面证　$A + B = A + B$

显然，$A + B \bigcap A + \overline{B}$，今只须证$A + B \supset A + \overline{B}$

首先证$\overline{B}|_{D(B)} \subset B + \partial I_k$，其中 I_k 是k的指标函数，∂I_k 是 I_k 的次微分，$\overline{B}|_{D(B)}$是$\overline{B}$在D(B)上的限制。

对任意 $[x, x^*] \in \overline{B}|_{D(B)}$，又对 $A[u, u^*] \in B$，由B的单值性，$u^* = \overline{B}u \in \overline{B}u$，由$\overline{B}$的单调性，

$$0 \leq (x - u, \; x^* - u^*)$$

$$0 \leq (x - u, \; x^* - Bu), \quad Au \in D(B)$$

因D(B)凸，可取$u = (1-t)x + t\omega$，其中$0 < t \leq 1 A\omega \in D(B)$，故有

$$0 \leq (t(x - \omega), \; x^* - B((1-t)x + t\omega))$$

$$0 \leq (x - \omega, \; x^* - B(x + t(\omega - x))),$$

由B的hemi一连续性，当$t \downarrow 0$时，取极限有 $0 \leqslant (X - \omega, X^* - BX)$，$A\omega \in D(B)$

再由线性泛函 x^*-Bx 的连续性，得到

$$0\leqslant(x-w,\ x^*-Bx),\ Aw\in\overline{D(B)}=K,$$

根据次微分的定义，有

$$x^*-Bx\in\partial I_k(x)$$

即 $x^*\in Bx+\partial I_k(x)$，$[x,\ x^*]\in B+\partial I_k$，因而 $\overline{B}|D(B)\subset B+\partial I_k$，因 $D(A)\subset D(B)$，更有

$$A+\overline{B}\subset A+B+\partial I_k$$

但 $A+B+\partial I_k$ 是 $X\times X^*$ 中的单调集，而 $A+\overline{B}$ 是极大单调集，所以

$A+\overline{B}=A+B+\partial I_k$，

其次证 $A+\partial I_k=A$，为此只须证 $A\subset A+\partial I_k$，对任意 $[u,\ u^*]\in A$，

$$[u,\ u^*]=[u,\ u^*]+[u,\ 0]$$

其中 $[u,\ 0]\in\partial I_K$，故 $A+\partial I_K=A$，最后有

$$A+B=A+\overline{B}$$

推论1·2 X 是自反的实 B－空间，A 是 $X\times X^*$ 中的极大单调集，且 $\operatorname{int}D(A)\neq\phi$，$B$ 是单值，单调 hemi－连续的算子且 $D(A)\subset D(B)$，那么 $A+B$ 是极大单调的。

证明：因 $\operatorname{int}D(A)\neq\phi$，这样 $\exists x_0\in\operatorname{int}D(A)$，由〔3〕的定理5·3及〔1〕的定理1·5，存在

$B(x_0,\ r)=\{x\in X;\ \|x-x_0\|\leqslant r,\ r>0\}$ 使得

$B(x_0,\ r)\subset\operatorname{int}D(A)\subset D(A)$，并且 $\bigcup\limits_{x\in B(x_0,\ r)}Ax$ 有界。

这样，定理1·2的条件完全被满足，所以 $A+B$ 是极大单调的。

〔2〕的定理2·3的条件(i i)被局部条件代替时，在一般的自反 B－空间，还不知正确与否。但在加强一些条件时也可成立。

定理1·3 X 是自反的实 B－空间，A，B 皆为 $X\times X^*$ 中的极大单调集，若存在 X 上的紧子集 K，使得 $D(A)\subset D(B)\cap K$，并且对 $x\in\overline{D(A)}$ 存在 x 的一个邻域 V_x 使得

$$|By|\leqslant k_x\ (\|y\|)\ |Ay|+Cx\ (\|y\|),\ Ay\in Vx\cap D\ (A)$$

其中 $|By|=\inf\{\|y^*\|;\ y^*\in By\}$，$k_x\ (r)$，$c_X\ (r)$ 均非减函数，$k_x\ (r)<1$ 对 $\forall r\in R$，则 $A+B$ 是极大单调的。

证明：由〔3〕的定理5·5知，度量空间是Hausdorff空间，因此 X 是Hausdorff空间。

又由〔3〕的定理3·9，Hausdorff空间中的紧子集是闭集，这样 K 是闭集。

又 $D\ (A)\subset K$，故有 $\overline{D(A)}\subset K$

再由〔3〕的定理3·10，紧空间中的闭集也是紧的。将 K 视为紧空间，$\overline{D(A)}$