

高等学校教材

高等工程流体力学

张鸣远 景思睿 李国君 编著

Higher Engineering Fluid Dynamics

高等学校教材

高等工程流体力学

GAODENG GONGCHENG LIUTI LIXUE

张鸣远 景思睿 李国君 编著



内容简介

本书主要是为工科低年级研究生和高年级本科生提供的一本基础流体力学教材。本书首先系统推导流体力学基本微分方程组,然后依次介绍基本方程在各个领域的应用,其中包括无粘和粘性流动、有旋与无旋流动、不可压缩与可压缩流动等。全书尽可能避免抽象的理论推导,力求反映新的科技进步和学科发展,注重物理背景介绍和联系工程实际,并附有较多的例题和课后练习题。由于本书自成体系,内容循序渐进,具有一定数学基础的读者均可读懂本书。

全书分13章,内容包括:流体力学的基础知识、流体力学的基本方程、涡量动力学、理想流体动力学基础、不可压缩平面势流、不可压缩空间轴对称势流、纳维-斯托克斯方程的精确解、小雷诺数流动、不可压缩层流边界层流动、流动不稳定性、湍流、理想流体的一维可压缩流动、理想流体的平面可压缩流动等。

本书可作为能源动力、机械、化工、环境工程、水利、力学等不同专业的研究生和高年级本科生教材,也可供相关专业的教师和工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

高等工程流体力学/张鸣远,景思睿,李国君编著.

--北京:高等教育出版社,2012.2

ISBN 978-7-04-033551-4

I. ①高… II. ①张… ②景… ③李… III. ①工程力学:流体力学—高等学校—教材 IV. ①TB126

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2011) 第 274394 号

策划编辑 周婷

责任编辑 周婷

封面设计 于涛

版式设计 杜微言

责任校对 金辉

责任印制 张泽业

出版发行 高等教育出版社
社址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印刷 三河市华润印刷有限公司
开本 787mm×960mm 1/16
印张 34
字数 620千字
购书热线 010-58581118

咨询电话 400-810-0598
网址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.landrace.com>
<http://www.landrace.com.cn>
版次 2012年2月第1版
印次 2012年2月第1次印刷
定价 60.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换
版权所有 侵权必究
物料号 33551-00

前 言

本书主要是为工科高等院校低年级研究生和高年级本科生编写的,期望他们通过本书的学习,拓宽流体力学的知识面,加深对流体力学问题物理本质的理解,为将来从事研究工作和处理复杂工程实际问题奠定理论基础。

作者长期在西安交通大学讲授研究生的流体力学课程,本书是在总结多年教学经验,并吸收了国内外相关教材和专著的精华,历经多次修改而成。书中首先系统推导流体力学基本微分方程组,然后依次介绍基本方程在各个领域的应用,其中包括无粘和粘性流动、有旋与无旋流动、不可压缩与可压缩流动等。全书共分十三章:第一章至第三章推导流体力学的基本微分方程组,分别介绍流体力学的基本概念、基本方程和流体的涡量动力学基础;第四章至第六章讲解无粘不可压缩流动,在对理想流体动力学基础作简要介绍后,分别讲解平面势流和空间轴对称势流;第七章至第十一章介绍粘性不可压缩流动,分别讲解纳维-斯托克斯方程的精确解、小雷诺数流动、层流边界层流动、流动不稳定性和湍流;第十二章和第十三章介绍无粘可压缩流动,分别讲解一维非定常可压缩流动和平面可压缩流动。

本书文字力求深入浅出,尽可能避免抽象的理论推导,注意删减陈旧的内容,反映新的科技进步和学科发展,注重物理背景介绍和联系工程实际,并附有较多的例题和课后练习题。编写过程中引入了直角坐标张量运算,为方便读者查阅,附录中给出了笛卡儿张量的简单介绍。书中标有“*”号的章节或练习题,建议作为选学或选作内容。

一段时间以来,作者较广泛地阅读了国内外研究生水平的流体力学教材,觉得与国内相应教材相比,国外优秀教材内容更新快,能较及时地反映新的科技进步,更接近工程实际,这些都是我们在编写教材时应给以足够注意和借鉴的。为我国的工科研究生教育提供一本适用的基础流体力学教材,是作者的心愿和本书的编撰目的。

本书由西安交通大学张鸣远教授、景思睿教授和李国君教授共同编写。景思睿参加了本书第七章、第八章和第九章的编写,李国君参加了第十一章的编写,张鸣远负责其余章节的编写和全书的统稿审定。

采用本书作为其任教学校流体力学课程教材的教师,若希望获得课堂教学

电子课件,请与张鸣远联系 myzhang@mail.xjtu.edu.cn。

衷心感谢西安交通大学研究生院在本书撰写和出版过程中给予的大力支持!

本书承蒙大连理工大学金生教授审阅,特致诚挚的谢意!

受作者学识所限,书中若有疏漏和不足之处,敬请读者指正。

作者

2011年7月

目 录

第一章 流体力学的基础知识	(1)
1.1 拉格朗日参考系与欧拉参考系	(1)
1.2 迹线、流线和脉线	(6)
1.3 物质导数	(11)
1.4 流体微团运动分析	(14)
1.5 有旋运动的基本概念	(21)
1.6 物质积分的随体导数	(26)
1.7 应力张量	(29)
1.8 本构方程	(38)
第二章 流体力学的基本方程	(50)
2.1 连续方程	(50)
2.2 纳维-斯托克斯方程	(54)
2.3 能量方程	(63)
2.3.1 总能量方程	(63)
2.3.2 机械能方程	(65)
2.3.3 热力学第一定律——内能方程	(67)
2.4 不可压缩流动与布西内斯克近似	(69)
2.4.1 不可压缩流动成立的条件	(70)
2.4.2 布西内斯克近似	(72)
2.5 牛顿流体的基本方程组	(75)
2.6 基本方程的数学性质	(76)
2.7 边界条件	(77)
第三章 涡量动力学	(90)
3.1 涡量场的运动学性质	(90)
3.2 开尔文定理	(93)
3.3 涡量动力学方程	(98)

3.4	希尔球涡和兰金涡	(102)
3.5	涡量场和散度场的诱导速度场	(105)
3.6	直线涡丝和圆形涡丝	(108)
3.6.1	直线涡丝	(108)
3.6.2	圆形涡丝	(111)
3.7	涡层	(118)
第四章	理想流体动力学基础	(122)
4.1	理想流体流动与高雷诺数流动	(122)
4.2	欧拉方程	(124)
4.3	流线坐标系中的欧拉方程	(126)
4.4	伯努利方程	(130)
4.4.1	伯努利方程	(130)
4.4.2	势流伯努利方程	(135)
4.4.3	能量伯努利方程	(137)
* 4.5	非惯性系中的欧拉方程	(138)
* 4.6	非惯性系中的伯努利方程	(141)
* 4.6.1	平移坐标系中的伯努利方程	(142)
* 4.6.2	旋转坐标系中的伯努利方程	(144)
* 4.6.3	非惯性系中的势流伯努利方程	(147)
第五章	不可压缩平面势流	(156)
5.1	流函数, 势函数与拉普拉斯方程	(156)
5.2	复位势和复速度	(159)
5.3	基本流动	(163)
5.4	圆柱绕流	(167)
5.4.1	无环量圆柱绕流	(168)
5.4.2	有环量圆柱绕流	(169)
5.5	布拉休斯公式	(174)
5.6	镜像法	(176)
5.6.1	平面定理——以实轴为边界	(177)
5.6.2	平面定理——以虚轴为边界	(178)
5.6.3	圆定理	(180)
5.7	保角变换	(183)

5.8 茹科夫斯基变换	(186)
5.8.1 椭圆绕流	(187)
5.8.2 平板绕流和库塔条件	(188)
5.8.3 势流解的唯一性	(191)
5.9 茹科夫斯基翼型	(192)
5.10 施瓦茨-克里斯托费尔变换	(199)
* 5.11 面元法	(202)
* 5.12 水面重力波	(209)
第六章 不可压缩空间轴对称势流	(222)
6.1 速度势函数和斯托克斯流函数	(222)
6.2 速度势函数方程的解	(224)
6.3 基本流动	(226)
6.4 半无穷体绕流	(228)
6.5 圆球绕流	(231)
6.6 任意形状旋转体绕流	(234)
6.7 巴特勒球定理	(235)
6.8 达朗贝尔悖论	(238)
6.9 物体外奇点对物体的作用力	(240)
6.10 虚拟质量	(243)
第七章 纳维-斯托克斯方程的精确解	(250)
7.1 基本方程	(250)
7.2 定常的平行剪切流动	(252)
7.2.1 两平行平板间的库埃特-泊肃叶流动	(253)
7.2.2 管道内的泊肃叶流动	(258)
7.3 非定常的平行剪切流动	(264)
7.3.1 斯托克斯第一问题	(265)
7.3.2 斯托克斯第二问题	(268)
7.4 平面圆周运动	(271)
7.4.1 两旋转同心圆柱面间的库埃特流动	(272)
7.4.2 无限长直线涡丝的粘性扩散	(275)
7.5 具有对流加速度的二维流动	(277)
7.5.1 平面滞止区域的流动	(277)

7.5.2	收缩形和扩散形通道内的流动	(282)
7.5.3	多孔壁上的流动	(284)
7.6	量纲分析	(285)
第八章	小雷诺数流动	(296)
8.1	斯托克斯近似	(296)
8.2	绕圆球的缓慢流动	(300)
8.3	绕其他三维物体的缓慢流动	(307)
8.4	斯托克斯近似的局限性和奥辛近似	(308)
8.5	滑动轴承内润滑油的流动	(311)
8.6	赫尔-肖流动	(315)
8.7	通过多孔介质的缓慢流动	(318)
第九章	不可压缩层流边界层流动	(325)
9.1	边界层厚度	(326)
9.2	边界层方程	(327)
9.3	边界层分离	(330)
9.4	平壁边界层的布拉休斯解	(333)
9.5	福克纳-斯坎方程	(339)
9.5.1	绕楔形体或拐角的流动	(341)
9.5.2	朝向点汇的流动	(345)
9.6	平面自由射流	(347)
9.7	边界层方程的近似解法	(351)
9.7.1	卡门动量积分方程	(352)
9.7.2	卡门-波尔豪森方法	(356)
9.7.3	恩韦茨方法	(358)
第十章	流动不稳定性	(366)
10.1	谐波分析法	(366)
10.2	Kelvin - Helmholtz 不稳定性	(367)
10.3	贝纳尔对流	(371)
10.4	旋转库埃特流动的泰勒不稳定性	(375)
10.5	粘性平行剪切流动的稳定性	(378)

第十一章 湍流	(384)
11.1 湍流概述及湍流的统计平均	(384)
11.1.1 湍流的基本特性	(384)
11.1.2 湍流的统计平均	(386)
11.2 湍流的基本方程	(389)
11.2.1 连续方程,动量方程和能量方程	(389)
11.2.2 平均动能方程	(394)
11.2.3 湍动能方程	(398)
11.3 湍流统计理论简介	(400)
11.3.1 湍流脉动量的关联	(400)
11.3.2 湍流能谱分析	(401)
11.3.3 能量级串与涡拉伸	(402)
11.3.4 科尔莫戈罗夫局部各向同性假设与湍能谱的 $-5/3$ 幂次律.....	(407)
11.4 壁面上的湍流边界层流动	(409)
11.4.1 二维边界层流动方程	(410)
11.4.2 平均速度的分层结构	(410)
11.4.3 内层与壁面律	(412)
11.4.4 外层与科尔斯尾迹律	(413)
11.4.5 边界层内湍流量的测量结果	(416)
11.5 自由剪切湍流	(418)
11.6 湍流模型.....	(420)
11.6.1 布西内斯克公式和涡粘性模型	(420)
11.6.2 混合长度理论	(421)
11.6.3 Baldwin-Lomax 模型	(426)
11.6.4 $K-\epsilon$ 模型	(427)
11.6.5 雷诺应力模型	(430)
11.6.6 湍流对流传热	(433)
11.6.7 高级数值模拟简介	(434)
第十二章 理想流体的一维可压缩流动	(439)
12.1 流体的热力学性质	(439)
12.2 可压缩流动的基本方程组	(441)

12.3	小扰动在静止流体中的传播	(443)
12.4	有限振幅波的传播	(448)
12.4.1	等熵有限振幅波	(448)
12.4.2	有限振幅波的传播	(454)
12.5	正激波	(455)
12.6	中心膨胀波	(460)
12.7	激波管	(463)
12.8	一维定常等熵流动	(466)
第十三章 理想流体的平面可压缩流动		(470)
13.1	势流	(470)
13.2	小扰动理论	(471)
13.2.1	势流方程的线性化	(471)
13.2.2	边界条件的线性化	(473)
13.2.3	压强因数的线性化	(474)
13.3	波形壁绕流	(475)
13.3.1	亚声速绕流	(475)
13.3.2	超声速绕流	(477)
13.4	超声速薄翼	(481)
13.5	普朗特-格劳特法则	(484)
13.6	斜激波	(485)
13.7	普朗特-迈耶流动	(490)
13.8	激波-膨胀波法	(493)
附录 A 矢量的代数与微分运算		(500)
附录 B 笛卡儿张量		(503)
附录 C 正交曲线坐标系		(509)
附录 D 流体力学基本方程组		(514)
附录 E 复变函数		(519)
参考文献		(522)
索引		(525)

第一章 流体力学的基础知识

作为推导流体力学基本方程的理论准备,本章介绍一些重要的流体力学基本概念和定理。首先介绍流体力学中采用的两种参考系,即拉格朗日参考系和欧拉参考系;然后推导物质导数的表示式和雷诺输运公式,它们把拉格朗日参考系内的导数与欧拉参考系内的导数联系起来;最后在导入应变速率张量和应力张量的基础上,推导牛顿流体的本构方程。

1.1 拉格朗日参考系与欧拉参考系

可以将自然界所有物质的存在状态区分为固体和流体,固体和流体的区别在于它们对剪力或切向力的力学反应不同。固体在切应力的作用下会发生一定的变形,最终达到平衡状态,即固体在平衡状态下可以承受一定的切应力。流体不能承受切应力,无论受到的切应力多么小,流体都会发生连续变形,即产生流动,因此流体可定义为在任意微小剪力持续作用下都会发生连续变形的物质。

流体本质上由无限多的运动分子组成,但在流体力学研究中通常把流体视为连续介质,认为流体由无限多的流体质点连续无间隙地组成,这就是连续介质假设。连续介质假设成立的条件是研究的流场的分子平均自由程 l 远小于宏观特征尺度 L ,即

$$l/L \ll 1 \quad (1.1)$$

比值 l/L 称为克努森数(Knudsen number)。当满足式(1.1)时,可以将流体看作由无数流体质点(亦称流体微团)组成,流体质点的几何尺寸与流体分子间的距离相比充分大,流体质点中包含着大量的流体分子,因此流体的宏观物理量,即对流体分子的相应微观量的统计平均,具有确定的数值;而与流场的宏观尺寸相比,流体质点又充分小,可以看作占据空间的一个点。流体力学研究的最小单元是流体质点,在流体力学中讨论的流体速度、压强、温度和密度等,实际上是指流体质点的速度、压强、温度和密度等。

拉格朗日参考系与欧拉参考系 流体力学中通常采用两种不同的参考系描述流体质点的运动,即拉格朗日参考系和欧拉参考系。

在拉格朗日参考系中给出各个流体质点的空间位置随时间的变化,而相应的物理量则表示为流体质点和时间的函数。设在初始时刻 t_0 某一流体质点位于 $\mathbf{r}_0(x_0, y_0, z_0)$, 约定用 (x_0, y_0, z_0) 作为该流体质点的标志, 不同的 (x_0, y_0, z_0) 代表不同的流体质点(图 1.1), 于是流体质点在 t 时刻的位置矢量可表示为

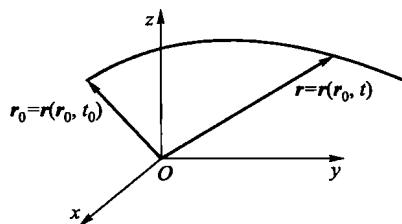


图 1.1 拉格朗日参考系

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t) \quad (1.2a)$$

或者

$$x = x(x_0, y_0, z_0, t), \quad y = y(x_0, y_0, z_0, t), \quad z = z(x_0, y_0, z_0, t) \quad (1.2b)$$

式中 x 、 y 和 z 分别是位置矢量 \mathbf{r} 在直角坐标系三个方向的分量。这里用 (x_0, y_0, z_0) 来区分不同的流体质点, 而用 t 来确定流体质点的空间位置。与流体质点相联系的物理量, 如压强、密度、温度则表示为

$$p = p(\mathbf{r}_0, t), \quad \rho = \rho(\mathbf{r}_0, t), \quad T = T(\mathbf{r}_0, t) \quad (1.2c)$$

在以上表示式中, 如果固定 (x_0, y_0, z_0) 而让时间 t 改变, 则得到某一确定流体质点的空间位置及与其相关物理量随时间的变化规律; 如果固定时间 t 而让 (x_0, y_0, z_0) 变化, 则得到同一时刻不同流体质点的空间位置及相关物理量。称 (x_0, y_0, z_0) 为拉格朗日坐标。

与拉格朗日参考系不同, 在欧拉参考系中把流体的运动表示为空间点 $\mathbf{r}(x, y, z)$ 和时间 t 的函数。在欧拉参考系中通常采用速度矢量

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \quad (1.3a)$$

或者用

$$u = u(x, y, z, t), \quad v = v(x, y, z, t), \quad w = w(x, y, z, t) \quad (1.3b)$$

来表示流体的运动。上式中 u 、 v 和 w 分别是速度矢量 \mathbf{u} 在直角坐标系三个方向的分量。与流体质点相联系的物理量, 如压强、密度、温度则表示为

$$p = p(\mathbf{r}, t), \quad \rho = \rho(\mathbf{r}, t), \quad T = T(\mathbf{r}, t) \quad (1.3c)$$

在以上表示式中, 如果固定 $\mathbf{r}(x, y, z)$ 而让时间 t 改变, 就得到某一空间点上的流体速度及相关物理量随时间的变化规律; 如果固定时间 t 而让 $\mathbf{r}(x, y, z)$ 变化, 则得到同一时刻流体速度及相关物理量在空间的分布规律。作为连续介质, 流体所在区域的空间点在任一时刻总会被一个流体质点所占据, 因此该时刻该空间点上的速度和物理量就是此时刻占据此空间点的流体质点的速度和物理量; 下一时刻占据此空间点的流体质点改变了, 空间点的速度和物理量也就发生了变化。称 (x, y, z) 为欧拉坐标。

当采用欧拉参考系时,空间坐标 x 、 y 和 z 以及时间 t 是相互独立的变量;而当采用拉格朗日参考系时, x 、 y 和 z 表示流体质点的空间位置,在流动过程中流体质点的空间位置随时间而变化,因此 x 、 y 和 z 都是时间 t 的函数。

雅可比行列式 为了使读者熟悉拉格朗日参考系和欧拉参考系及其相互联系,下面分析一个流体微团的体积变化。设在初始时刻 t_0 一流体微团呈正六面体形状,边长分别为 δx_0 、 δy_0 和 δz_0 ,体积 $\delta\tau_0 = \delta x_0 \delta y_0 \delta z_0$ 。随时间推移,由于流体微团内各点速度彼此不同,流体微团发生了变形(图 1.2),三个相邻边可分别以矢量形式表示为

$$\delta r_1 = (\partial r / \partial x_0) \delta x_0, \quad \delta r_2 = (\partial r / \partial y_0) \delta y_0, \quad \delta r_3 = (\partial r / \partial z_0) \delta z_0$$

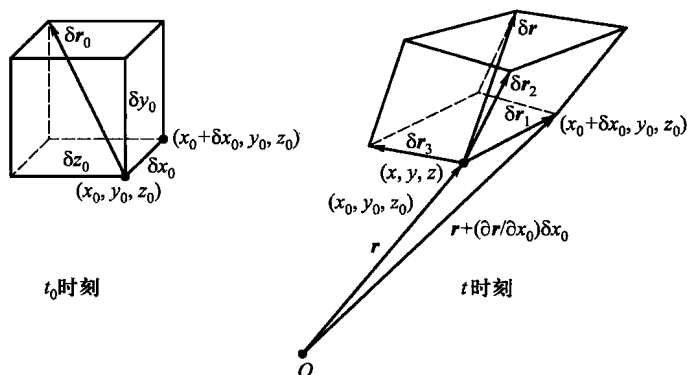


图 1.2 拉格朗日参考系中的流体微团

变形后的流体微团体积等于上述三个微元矢量的混合积,

$$\delta\tau = \left(\frac{\partial r}{\partial x_0} \times \frac{\partial r}{\partial y_0} \right) \cdot \frac{\partial r}{\partial z_0} \delta x_0 \delta y_0 \delta z_0 = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial x_0} & \frac{\partial y}{\partial x_0} & \frac{\partial z}{\partial x_0} \\ \frac{\partial x}{\partial y_0} & \frac{\partial y}{\partial y_0} & \frac{\partial z}{\partial y_0} \\ \frac{\partial x}{\partial z_0} & \frac{\partial y}{\partial z_0} & \frac{\partial z}{\partial z_0} \end{vmatrix} \delta\tau_0 = J \delta\tau_0$$

式中

$$J = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(x_0, y_0, z_0)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial x_0} & \frac{\partial y}{\partial x_0} & \frac{\partial z}{\partial x_0} \\ \frac{\partial x}{\partial y_0} & \frac{\partial y}{\partial y_0} & \frac{\partial z}{\partial y_0} \\ \frac{\partial x}{\partial z_0} & \frac{\partial y}{\partial z_0} & \frac{\partial z}{\partial z_0} \end{vmatrix} \quad (1.4)$$

称为 (x, y, z) 相对于 (x_0, y_0, z_0) 的雅可比行列式。设在时刻 t 和初始时刻 t_0 。流体微团的密度分别为 ρ 和 ρ_0 ，由质量守恒定律有 $\rho \delta\tau = \rho_0 \delta\tau_0$ ，于是

$$J = \frac{\delta\tau}{\delta\tau_0} = \frac{\rho_0}{\rho} \quad (1.5)$$

可见雅可比行列式 J 可视为表示一流体微团在时刻 t 和初始时刻 t_0 的体积之比，也可视为初始时刻 t_0 和时刻 t 的密度比。

拉格朗日参考系和欧拉参考系之间的相互转换 因为拉格朗日参考系和欧拉参考系是从不同观点出发描述同一运动，因此这两种参考系之间可以相互转换。式(1.2a)和(1.2b)给出了以拉格朗日坐标表示的运动规律，即流体质点 (x_0, y_0, z_0) 在时刻 t 的空间位置，于是流体质点的运动速度可表示为

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}_0, t) = (\partial\mathbf{r}/\partial t)_{\mathbf{r}_0} \quad (1.6)$$

上式右侧偏导数的下标“ \mathbf{r}_0 ”表示对时间求导时保持 \mathbf{r}_0 不变，即求导是针对某一确定流体质点的。由于行列式 $J = \partial(x, y, z)/\partial(x_0, y_0, z_0)$ 表示同一流体质点在 t 时刻和初始时刻 t_0 的体积之比，因此它总是一个有限大的正数，于是从数学上讲一定可以求得式(1.2a)的反函数

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}_0(\mathbf{r}, t) \quad (1.7)$$

将上式代入以拉格朗日坐标表示的速度式 $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r}_0, t)$ ，即得到以欧拉坐标表示的速度，

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}[\mathbf{r}_0(\mathbf{r}, t), t] = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$$

一般来讲，利用式(1.7)可以把拉格朗日坐标表示的量转换为欧拉坐标来表示，利用式(1.2a)则可以把欧拉坐标表示的量转换为拉格朗日坐标来表示。

如果已知以欧拉坐标表示的速度式 $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ ，则利用初始条件 $t=t_0$ 时 $\mathbf{r}=\mathbf{r}_0$ ，积分微分方程

$$\frac{dx}{dt} = u(x, y, z, t), \quad \frac{dy}{dt} = v(x, y, z, t), \quad \frac{dz}{dt} = w(x, y, z, t) \quad (1.8)$$

即可得到以拉格朗日坐标表示的表达式(1.2b)。

在流体力学研究中采用欧拉参考系常常比采用拉格朗日参考系优越，因为采用欧拉参考系时速度、压强、温度和密度等均是空间位置和时间的函数，即速度场、压强场、温度场和密度场等，于是可以广泛利用场论和矢量、张量分析的知识，使理论研究具有强有力的数学工具。而采用拉格朗日参考系时，各相关物理量的定义区域不是场，因为它们不是空间坐标的函数，而是质点 (x_0, y_0, z_0) 的函数，于是就无上述便利。另外，在解决工程实际问题时常常没有必要知道各个流体质点的运动历史，通常只要知道了空间的速度、压强、温度和密度分布等就可

使问题基本得到解决,因此欧拉参考系在流体力学中得到广泛应用。当然也不应忽视拉格朗日参考系的作用,在某些情形下应用拉格朗日参考系则更为方便,比如在气固两相流动的数值计算中,常常需要应用拉格朗日坐标分析固体颗粒的运动轨迹。

依据速度和其他流场变量,如压强、温度和密度等,与时间 t 的函数关系可以将流动区分为定常流动与非定常流动,即当以欧拉坐标表示的速度和其他变量均与时间 t 无关时称流动为定常流动,否则称为非定常流动。

依据速度场及其他流场变量与空间坐标的函数关系,又可以将流动区分为一维、二维和三维流动,当式(1.3)表示的变量是一个、二个或三个空间坐标的函数时分别称为一维、二维或三维流动,而当流场变量与三个空间坐标均无关时则称为均匀流动。

例 1.1 以拉格朗日坐标 (x_0, y_0, z_0) 表示的流体运动规律为

$$\begin{aligned}x &= x_0 \\y &= (y_0 + z_0)e^{at}/2 + (y_0 - z_0)e^{-at}/2 \\z &= (y_0 + z_0)e^{at}/2 - (y_0 - z_0)e^{-at}/2\end{aligned}$$

(1) 计算雅可比行列式的值;(2) 分别以拉格朗日坐标和欧拉坐标表示速度和加速度;(3) 确定流动是否为定常流动。

$$\text{解: (1) } J = \begin{vmatrix} \partial x / \partial x_0 & \partial y / \partial x_0 & \partial z / \partial x_0 \\ \partial x / \partial y_0 & \partial y / \partial y_0 & \partial z / \partial y_0 \\ \partial x / \partial z_0 & \partial y / \partial z_0 & \partial z / \partial z_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh at & \sinh at \\ 0 & \sinh at & \cosh at \end{vmatrix} = 1$$

$J=1$ 表示流动过程中流体微团体积保持不变,这种流动称为不可压缩流动。

(2) 以拉格朗日坐标表示的速度为

$$\begin{aligned}u &= (\partial x / \partial t)_{r_0} = 0 \\v &= (\partial y / \partial t)_{r_0} = a(y_0 + z_0)e^{at}/2 - a(y_0 - z_0)e^{-at}/2 \\w &= (\partial z / \partial t)_{r_0} = a(y_0 + z_0)e^{at}/2 + a(y_0 - z_0)e^{-at}/2\end{aligned}$$

以拉格朗日坐标表示的加速度为

$$\begin{aligned}a_x &= (\partial u / \partial t)_{r_0} = 0 \\a_y &= (\partial v / \partial t)_{r_0} = a^2(y_0 + z_0)e^{at}/2 + a^2(y_0 - z_0)e^{-at}/2 \\a_z &= (\partial w / \partial t)_{r_0} = a^2(y_0 + z_0)e^{at}/2 - a^2(y_0 - z_0)e^{-at}/2\end{aligned}$$

对以拉格朗日坐标表示的流体运动规律进行简单变换,可以得到

$$x_0 = x, \quad (y_0 + z_0)e^{at} = y + z, \quad (y_0 - z_0)e^{-at} = y - z$$

将以上各式分别代入以拉格朗日坐标表示的速度和加速度式中,得到以欧拉坐标表示的速度和加速度为

$$u = 0, \quad v = ax, \quad w = ay$$

$$a_x = 0, \quad a_y = a^2y, \quad a_z = a^2z$$

(3) 由于以欧拉坐标表示的速度和加速度式中无时间变量 t , 因此流动是定常流动。

1.2 迹线、流线和脉线

迹线 迹线是流体质点在空间运动过程中描绘出来的曲线, 即轨迹。当给定速度场时迹线可通过式(1.8)计算,

$$\frac{dx}{dt} = u(x, y, z, t), \quad \frac{dy}{dt} = v(x, y, z, t), \quad \frac{dz}{dt} = w(x, y, z, t)$$

以上方程中 t 是自变量, x 、 y 和 z 是流体质点的空间坐标, 且都是 t 的函数。积分上述方程, 并利用初始条件 $t=t_0$ 时 $x=x_0$ 、 $y=y_0$ 和 $z=z_0$, 可得迹线方程

$$x = x(x_0, y_0, z_0, t), \quad y = y(x_0, y_0, z_0, t), \quad z = z(x_0, y_0, z_0, t)$$

或者

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t)$$

一个流体质点的速度矢量总是和该质点的迹线相切, 因此迹线也可以定义为始终与同一流体质点的速度矢量相切的曲线。

流线 流线是流场中的一条曲线, 该曲线上每一点的速度矢量方向和曲线在该点的切线方向相同(图 1.3)。对于非定常流动, 空间给定点的速度大小和方向都随时间连续变化, 因此谈到流线总是指某一给定瞬时的流线。与迹线不同, 流线在同一时刻和不同流体质点的速度矢量相切。设 $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$ 是沿流线的线元, 而 $\mathbf{u} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}$ 是线元所在点的速度矢量, 根据流线定义, $d\mathbf{r}$ 和 \mathbf{u} 相互平行, 于是有

$$d\mathbf{r} \times \mathbf{u} = 0$$

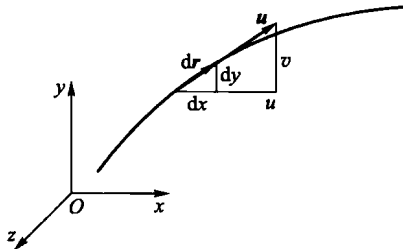


图 1.3 流线