



西安交通大学
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

研究生创新教育系列教材

高等结构动力学

马建勋 编著



西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS



西安交通大学
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

研究生创新教育系列教材

高等结构动力学

常州大学图书馆
藏书章

马建勋 编著

西安交通大学出版社

· 西 安 ·

内容提要

本书系统地阐述了结构动力学的基本概念、理论、方法及应用。内容包括工程问题的抽象与动力学模型的建立,线性单自由度结构体系的自由振动和各种荷载作用下的强迫振动,线性多自由度结构体系的自由振动和强迫振动,连续体的自由振动和强迫振动,非线性结构体系的动力反应,线性结构体系的随机振动,以及动力学基本理论的工程应用和各种实用计算方法。

本书可作为土木工程、水利工程、机械工程等学科研究生的教学用书,也可作为相关的研究人员和工程技术人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等结构动力学/马建勋编著. —西安:西安
交通大学出版社,2012.7
ISBN 978-7-5605-4132-7

I. ①高… II. ①马… III. ①结构动力学
IV. ③42

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 249276 号

书 名 高等结构动力学
编 著 马建勋
责任编辑 桂 亮

出版发行 西安交通大学出版社
(西安市兴庆南路 10 号 邮政编码 710049)

网 址 <http://www.xjupress.com>
电 话 (029)82668357 82667874(发行中心)
(029)82668315 82669096(总编办)

传 真 (029)82668280
印 刷 陕西时代支点印务有限公司

开 本 727mm×960mm 1/16 印张 13.5 字数 243 千字
版次印次 2012 年 8 月第 1 版 2012 年 8 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5605-4132-7/O·381
定 价 27.00 元

读者购书、书店添货、如发现印装质量问题,请与本社发行中心联系、调换。

订购热线:(029)82665248 (029)82665249

投稿热线:(029)82664954

读者信箱:jdlgy@yahoo.cn

版权所有 侵权必究

总 序

创新是一个民族的灵魂,也是高层次人才水平的集中体现。因此,创新能力的培养应贯穿于研究生培养的各个环节,包括课程学习、文献阅读、课题研究等。文献阅读与课题研究无疑是培养研究生创新能力的重要手段,同样,课程学习也是培养研究生创新能力的重要环节。通过课程学习,使研究生在教师指导下,获取知识并理解知识创新过程与创新方法,对培养研究生创新能力具有极其重要的意义。

西安交通大学研究生院围绕研究生创新意识与创新能力改革研究生课程体系的同时,开设了一批研究型课程,支持编写了一批研究型课程的教材,目的是为了推动在课程教学环节加强研究生创新意识与创新能力的培养,进一步提高研究生培养质量。

研究型课程是指以激发研究生批判性思维、创新意识为主要目标,由具有高学术水平的教授作为任课教师参与指导,以本学科领域最新研究和前沿知识为内容,以探索式的教学方式为主导,适合于师生互动,使学生有更大的思维空间的课程。研究型教材应使学生在学习过程中可以掌握最新的科学知识,了解最新的前沿动态,激发研究生科学研究的兴趣,掌握基本的科学方法,把教师为中心的教学模式转变为以学生为中心教师为主导的教学模式,把学生被动接受知识转变为在探索研究与自主学习中掌握知识和培养能力。

出版研究型课程系列教材,是一项探索性的工作,也是一项艰苦的工作。虽然已出版的教材凝聚了作者的大量心血,但毕竟是一项在实践中不断完善的工作。我们深信,通过研究型系列教材的出版与完善,必定能够促进研究生创新能力的培养。

西安交通大学研究生院

前 言

结构动力学是研究结构体系的动力特性,以及在动力荷载或初始干扰下动力反应分析理论和方法的一门专业基础课程。

结构动力学作为土木工程学科研究生的专业基础课,是每一位土木工程研究生都应学习的课程。作者从1994年开始为结构工程研究生讲授高等结构动力学课程,陆续也为岩土工程研究生讲授这门课程。高等结构动力学已经成为土木工程研究生的必修课。本书是作者在多年讲授高等结构动力学课程讲义的基础上不断补充、不断修改、不断完善的结果。

本书针对土木工程学科研究生的知识结构和需求,以及结构动力学的最新成果,力求使研究生通过学习能够掌握结构动力学的基本理论、分析模型的建立方法以及计算方法等,了解结构动力学的最新发展动向以及相关课程与结构动力学之间的联系,培养应用结构动力学理论解决工程实际问题的能力。本书将体现以下特点。

(1)系统性 力求结构动力学的基本理论是系统的和完备的,内容包括了确定性分析和非确定性分析(随机荷载反应分析)。确定性分析又包括线性体系和非线性体系,线性体系从单自由度体系到多自由度体系和分布质量的连续体,涉及各种初始条件和荷载类型;非线性体系从实用的角度重点讲述了数值法。

(2)实用性 以土木工程结构为背景,在强调基础理论的同时,注意理论与实际的结合。讨论了测振原理、隔振原理、阻尼的确定以及各种实用计算方法,为专业课程的学习以及从事科学研究和解决工程实际问题奠定扎实的基础。

(3)可自学 讲述过程系统连续、从简到难,并配备一定的例题,帮助读者理解和进一步认识所学内容。

本书除了结构动力学绪论一章外,分为五篇进行论述。

第一篇着重讨论线性单自由度体系的动力学问题。基于下述两个原因,将详细讨论单自由度体系的动力学问题:①许多实际结构的反应可用一个自由度来表达,因此单自由度的解可给出一个有用的最终结果;②在更复杂的线性结构体系里,总反应可表示为一系列广义单自由度体系反应的叠加。因此,单自由度分析方法为绝大多数的确定性结构动力分析方法奠定了理论基础。

第二篇论述线性多自由度体系的动力学问题。介绍线性弹性体系动力特性的分析方法,然后导出振型叠加法。借助于这个方法,可用各振型单独反应的和来表

示结构总的动力反应。

第三篇讨论连续体系这种具有无限个自由度体系的动力学问题。包括用偏微分方程建立连续体的运动方程,验证各种离散化的合理性,论述振型叠加法仍然适用,并且即使在这种情况下,只考虑有限个振型也能获得实用的解答。最后介绍了连续体离散化的方法。

第四篇讨论非线性体系的动力学问题。重点介绍非线性结构体系在动力荷载作用下的数值计算方法,这些方法对线性结构体系的动力反应分析也适用。

第一至第四篇只讨论确定性分析,它给出任何给定动力荷载下结构的反应时程。随机动力荷载的反应分析在第五篇专题介绍。随机过程是随机动力分析的基础,它们被用来描述随机荷载和随机动力反应。

本书写作过程中,参阅了同行专家许多研究成果和著作,在此谨向他们致以衷心的感谢。本书的出版得到了西安交通大学研究生院和西安交通大学出版社的资助和支持,作者表示诚挚的敬意和衷心的感谢。由于作者水平有限,书中难免有错误和疏漏,作者深表歉意并敬请广大读者指正。

目 录

第 0 章 绪论	(1)
0.1 结构动力分析的主要目的	(1)
0.2 结构动力问题的基本特性	(1)
0.3 结构动力体系的分类	(2)
0.4 动力荷载的类型	(2)
0.5 动力自由度	(3)

第一篇 线性单自由度体系

第 1 章 运动方程的建立	(4)
1.1 概述	(4)
1.2 建立运动方程的方法	(5)
1.3 重力的影响	(7)
1.4 刚体系运动方程的建立	(8)
第 2 章 自由振动	(11)
2.1 无阻尼自由振动	(11)
2.2 有阻尼自由振动	(13)
第 3 章 强迫振动	(19)
3.1 概述	(19)
3.2 简谐荷载作用下的动力反应	(19)
3.3 阶跃荷载作用下的动力反应	(27)
3.4 周期荷载的动力反应	(28)
3.5 一般荷载的动力反应	(33)
3.6 单位脉冲反应函数和频率反应函数之间的关系	(39)
3.7 冲击荷载的反应	(39)

第 4 章 支承运动的动力反应与阻尼理论	(45)
4.1 支承运动的相对位移反应 测振原理	(45)
4.2 支承运动的绝对位移反应 隔振原理	(48)
4.3 阻尼理论与阻尼值的确定	(53)
第 5 章 能量法和瑞利法	(60)
5.1 能量法	(60)
5.2 瑞利法	(61)
5.3 形状函数的选取	(63)
5.4 改进的瑞利法	(64)

第二篇 线性多自由度体系

第 6 章 运动方程的建立	(68)
6.1 引言	(68)
6.2 用刚度法建立运动方程	(68)
6.3 用柔度法建立运动方程	(71)
6.4 拉格朗日方程	(72)
第 7 章 无阻尼自由振动	(75)
7.1 频率与振型	(75)
7.2 振动分析的柔度法	(78)
7.3 正交条件	(79)
第 8 章 动力反应的分析	(83)
8.1 主坐标	(83)
8.2 非耦合的运动方程	(84)
8.3 阻尼正交性条件	(85)
8.4 振型叠加法概要	(88)
第 9 章 特征问题的实用计算方法	(93)
9.1 概述	(93)
9.2 矩阵迭代法	(93)
9.3 自由度的缩减	(101)
9.4 子空间迭代法	(106)

9.5 雅可比法	(109)
9.6 传递矩阵法	(112)

第三篇 线性连续体系

第 10 章 弦振动、杆的纵向振动和扭转振动	(120)
10.1 引言	(120)
10.2 弦振动	(120)
10.3 杆的纵向振动	(123)
10.4 杆的扭转振动	(129)
第 11 章 梁的弯曲振动	(132)
11.1 梁弯曲振动的运动方程	(132)
11.2 考虑粘滞阻尼时梁弯曲振动的运动方程	(133)
11.3 等截面梁的无阻尼自由振动	(134)
11.4 梁振型函数的正交性	(140)
11.5 主坐标	(141)
11.6 动力反应分析	(142)
第 12 章 波的传播	(144)
12.1 波的传播方程	(144)
12.2 边界条件的处理	(146)
12.3 杆件性能的突变	(148)
第 13 章 连续体的离散化	(152)
13.1 引言	(152)
13.2 集中质量法	(152)
13.3 瑞利-里兹法	(153)
13.4 有限元法	(155)

第四篇 非线性体系

第 14 章 非线性体系的运动方程	(169)
14.1 引言	(169)
14.2 增量形式的运动方程	(170)
14.3 迭代形式的运动方程	(171)

第 15 章 逐步积分法	(173)
15.1 概述	(173)
15.2 线性加速度法	(173)
15.3 威尔逊- θ 法	(177)
15.4 纽马克- β 法	(179)

第五篇 随机荷载动力反应

第 16 章 随机过程理论	(182)
16.1 引言	(182)
16.2 随机过程	(182)
16.3 随机过程的数字特征	(183)
16.4 平稳随机过程	(184)

第 17 章 线性单自由度体系的随机动力反应	(189)
17.1 转换函数	(189)
17.2 反应的均值和自相关函数	(190)
17.3 反应的功率谱密度函数	(192)
17.4 荷载与反应之间的互相关函数和互功率谱密度函数	(194)
17.5 由零初始条件引起的非平稳反应	(195)
17.6 窄频带体系的反应特征	(197)

第 18 章 线性多自由度体系的随机动力反应	(199)
18.1 时域反应	(199)
18.2 频域反应	(200)
18.3 离散荷载的反应	(201)
18.4 分布荷载的反应	(202)

参考文献	(203)
-------------	-------

附录 汉英名词对照	(204)
------------------	-------

第 0 章 绪 论

0.1 结构动力分析的主要目的

结构动力学是研究结构体系的动力特性,以及在动力荷载或初始干扰下动力反应分析理论和方法的一门专业基础课程。它借助于数学、力学、结构分析、实验和计算技术等理论基础和手段,探索结构动力反应的机理,阐明动力反应的规律,以便克服动力反应对结构的不利影响,充分利用其积极因素,为改善工程结构体系在动力条件下的安全性和可靠性提供坚实的理论基础和技术手段。

0.2 结构动力问题的基本特性

结构动力学问题在两个重要的方面不同于结构静力学问题。第一个不同点就是动力荷载与静力荷载的区别。动力荷载的特征是荷载的大小、方向和作用点随时间而变化,因而结构的反应也随时间变化。如果单纯从荷载本身性质来讲,绝大多数实际荷载严格地说都应属于动力荷载。如果从荷载对结构所产生的影响这个角度来看,则可分为两种情况:一种情况是荷载虽然随时间变化,但变得很慢,荷载对结构产生的影响与静荷载相比相差甚微,在这种荷载作用下的结构计算问题实际上仍属于静力荷载作用下的结构计算问题,这种荷载实际上可看作静力荷载;另一种情况是荷载不仅随时间在变,而且变得较快,荷载对结构产生的影响与静力荷载相比相差较大。因此,在这种荷载作用下的结构计算问题属于动力计算问题,换句话说,这种荷载实际上应看作动力荷载。由于荷载和反应随时间而变化,因此动力问题不像静力问题那样具有单一的解,而必须建立相应于反应时程中感兴趣的全部时间的一系列解答。显然动力分析要比静力分析更复杂且更消耗时间。

更重要的是第二个不同点,动力计算与静力计算的区别。静力荷载产生的反应直接依赖于给定的荷载,可根据力的平衡原理来计算。如果荷载是动力的,则所产生的反应与加速度有联系,这些加速度又产生与其反向的惯性力。于是,反应不仅要平衡外加荷载,而且要平衡由于加速度所引起的惯性力。根据达朗贝尔原理,

动力计算问题可转化为形式上的静力平衡问题来处理,但这是一种动平衡,是在引进惯性力条件下的平衡。换句话说,在动力计算中形式上是在列平衡方程,但要注意两点:在所考虑的力系中要包括惯性力;考虑的是瞬间平衡,荷载和反应都是时间的函数。

以这样一种方式抵抗结构的加速度的惯性力,是结构动力学问题的一个最重要的区别特征。一般来说,如果惯性力是结构内部弹性力所平衡的全部荷载中的一个重要部分,则在解题时必须考虑问题的动力特性。另一方面,如果运动是如此缓慢,以致惯性力小到可以忽略不计,即使荷载和反应可能随时间而变化,但对任何瞬时的分析,仍可用静力结构分析的方法来解决。可见静力的和动力的分析方法在性质上是根本不同的。请读者注意,我们讨论的是“动力”问题而不是“动”问题,强调在结构分析时惯性力能否忽略不计而不是是否随时间变化。

在线性结构分析中,更为方便的是区分施加荷载中的静力和动力分量,分别计算对每种荷载分量的反应,最后将两个反应分量叠加得出总反应。

0.3 结构动力体系的分类

任何结构体系只要它具有弹性和惯性就构成一个结构动力体系。

根据弹性和惯性参数的分布情况可分为两大类:离散体系和连续体系。连续体系具有连续分布的参数,但可通过适当方式转化为离散体系。

按自由度划分,可分为有限自由度体系和无限自由度体系。前者与离散体系相对应,而后者与连续体系相对应。有限自由度体系又可分为单自由度体系和多自由度体系。

按参数的变化规律划分,若体系参数的变化可用时间的确定函数描述,称为确定性体系。在确定性体系中参数不随时间变化的称为常参数体系;反之,则称为变参数体系。若体系参数的变化无法用时间的确定函数描述,只能用有关统计特性描述,这种体系就称为随机体系。本书仅限于讨论常参数体系。

实际结构体系的弹性力和阻尼力往往不符合线性模型。但在许多情况下,只要位移幅值不大,常常简化为线性的,可得出足够准确的结果,这种简化为线性化模型的体系称为线性体系。凡是不能简化为线性体系的都称为非线性体系。

0.4 动力荷载的类型

任何类型的结构在其使用期限内都可能承受这样或那样的动力荷载。动力荷载一般可分为确定性荷载和非确定性荷载。如果荷载随时间的变化是确定的,不管它随时间的变化多么复杂,我们将把它称为确定性荷载,而任何特定的结构体系

在确定性荷载作用下的反应分析通常定义为确定性分析。另一种情况,如果荷载随时间的变化不是完全已知的,但可从统计方面来进行定义,这种荷载则称为非确定性荷载,一般指**随机荷载**,而相应的反应分析称为随机动力分析。

确定性荷载可以用确定的函数来表达,可分成**周期荷载**和**非周期荷载**两种基本类型。

第一类是周期荷载。这类荷载随时间作周期性的变化,在多次循环中这些荷载都相继地出现相同的时间过程。周期荷载中最简单也是最重要的一种是简谐荷载。周期荷载的另一些形式称为非简谐性周期荷载。借助于傅里叶分析,任何周期荷载可用一系列简谐分量的和来表示。因此,简谐荷载下的反应分析是分析周期荷载反应的基础。

第二类是非周期荷载。非周期荷载可以是短持续时间的冲击荷载也可以是长持续时间的一般荷载。冲击波或爆炸是冲击荷载的典型发生源,对于这种短持续时间荷载来说,可以使用特殊的简化分析形式。一般形式的长持续时间荷载,例如由地震引起的荷载,就只能完全用一般性的动力分析程序来处理。

一般来说,动力荷载作用下的结构反应主要是用结构的位移来表示的。因此,确定性分析能导出相应于荷载时程的位移-时间过程。结构的其他反应,如应力、应变、内力等等,通常作为分析的次要方面,从所得到的位移反应求得。另一种情况是,随机分析提供有关位移的统计参数,而这种位移是由统计定义的随机荷载所产生的。由于这时位移随时间的变化是不确定的,因而其他的反应,如应力、内力等等,必须用特定的随机分析方法直接计算,而不是由已得到的位移来计算。

0.5 动力自由度

与静力分析一样,首先需要选择一个合理的计算简图。两者选择的原则基本相同,但在动力分析中由于要考虑惯性力的作用,还需要研究质量在运动过程中的自由度问题。为了表示结构全部有意义的惯性力的作用(或者确定全部质量的位置),所必须考虑的位移分量的数目(或独立几何参数的数目)称为结构体系的动力自由度。如果结构体系任意时刻的惯性力只需要一个独立参数来表示,则称为单自由度体系;如果需要多于一个且是有限个独立参数来表示,则称为多自由度体系。

实际结构的质量都是连续分布的,可以说具有无限个自由度。如果所有结构都按无限自由度计算,不仅非常困难而且也没有必要。为了避免数学上的过于繁杂,通常需要将实际结构简化为有限自由度体系,这一简化过程称为结构体系的离散化。常用的离散化方法主要有集中质量法、广义坐标法和有限单元法三种。

第一篇 线性单自由度体系

第 1 章 运动方程的建立

1.1 概 述

线性单自由度体系的动力分析虽然简单,却很重要。许多实际结构的动力学问题可按线性单自由度体系进行分析或进行初步估算,而且线性单自由度体系的动力分析也是线性多自由度体系动力分析的基础。在动力荷载作用下的任何线性单自由度体系均可以用图 1-1 所示的理想化模型质量-弹簧-阻尼器来表示,其主要物理特性有结构的惯性特性——质量 m 、弹性特性——弹簧刚度系数 k 、能量耗散机理——阻尼系数 c 以及随时间变化的外部荷载 $p(t)$ 。质量块 m 受到滚筒的约束仅能作平移运动,因此这个体系只有一个动力自由度,用位移坐标 u 来表示,并以静平衡位置(弹簧没有变形的位置)为坐标原点。

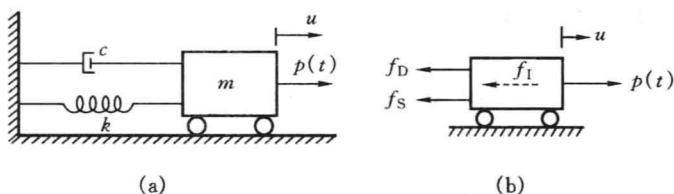


图 1-1 理想化的单自由度体系

(a)理想化简图;(b)隔离体的受力图

结构动力分析的首要目的就是计算结构体系的动位移,描述结构动位移的数学表达式称为结构的运动方程,而运动方程的解就提供了所求结构的位移过程。

结构动力体系运动方程的建立,可能是整个动力分析过程中最重要的有时也是最困难的问题。建立结构运动方程的方法有多种,不论采用哪种方法,对于同一坐标所得到的运动方程应该是一致的。下面分别用基于达朗贝尔原理的直接平衡法、虚位移原理和哈密尔顿原理建立图 1-1 所示的理想化模型的运动方程。必须指出这三种方法是完全等同的,在研究不同的问题时每种方法都各有其优点,选用

哪一种方法取决于所考虑的动力体系的特点和使用者个人的习惯。

1.2 建立运动方程的方法

1. 基于达朗贝尔原理的直接平衡法

对于这种简单的理想化结构模型,设在任一时刻 t , 质量块的位置为位移 $u(t)$, 取此状态的质量块作为隔离体, 此时沿着自由度方向作用的力有荷载 $p(t)$ 以及由于运动所引起的弹性恢复力 f_s 和阻尼力 f_D , 如图 1-1(b) 所示。其中, 弹性恢复力 f_s 的方向与位移的方向相反, 大小等于位移与弹簧刚度系数的乘积, 即

$$f_s = ku(t) \quad (1-1)$$

假设阻尼是粘滞阻尼, 则阻尼力 f_D 的方向与速度的方向相反, 大小与速度成正比, 即

$$f_D = c\dot{u}(t) \quad (1-2)$$

式中: 比例系数 c 又称为粘滞阻尼系数; “ $\cdot$ ” 表示对时间 t 的导数。

建立运动方程最直接的方法是应用牛顿第二定律, 然而对于工程领域, 应用达朗贝尔原理可能更为方便。达朗贝尔原理认为, 质量所产生的惯性力 f_I 的方向与加速度方向相反, 大小等于质量与加速度的乘积, 即

$$f_I = m\ddot{u}(t) \quad (1-3)$$

如果引入抵抗加速度的惯性力 f_I 后, 动力学方程就变为作用于隔离体上所有力(包括惯性力)在坐标 u 方向的平衡表达式, 即

$$f_I + f_D + f_s = p(t) \quad (1-4)$$

将式(1-1)、(1-2)和(1-3)的三个表达式代入方程(1-4), 便得到线性单自由度体系的运动方程

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = p(t) \quad (1-5)$$

这种由力的平衡直接建立运动方程的方法即为直接平衡法, 这种推导方法也称为刚度法。

另一方面, 运动方程也可从位移协调条件来推导, 认为质量块的位移是所有力(包括惯性力)作用的结果, 即

$$u(t) = f[p(t) - f_I - f_D] \quad (1-6)$$

式中: f 表示弹簧的柔度系数。注意到柔度系数与刚度系数互为倒数

$$f = \frac{1}{k} \quad (1-7)$$

代入式(1-6)整理后仍能得到方程(1-5), 这种推导方法称为柔度法。

2. 虚位移原理

虚位移原理可表述如下:如果一组力系处于平衡状态,则这组力系在一个虚位移(即体系约束所允许的任何微小位移)上所做的虚功等于零。因此,将虚位移原理应用到动力学问题时,所要考虑的力系中还要包括按照达朗贝尔原理所定义的惯性力。然后,引入相应于每个自由度的虚位移,并使所做的虚功等于零,这样即可得出运动方程。这个方法的主要优点是虚功为标量,计算时避免了直接平衡法中力的矢量运算。

如果结构体系相对复杂,而且包含许多彼此联系的质点或有限尺寸的质量块,则直接写出作用于体系上所有力的平衡方程可能是困难的,此时,虚位移原理就可以用来代替直接平衡法建立运动方程。

用虚位移原理建立图 1-1 所示体系的运动方程也是有实用意义的。作用于质量块上的力示于图 1-1(b),如果给质量块一个虚位移 δu (约束所允许的微小位移,方向同 u),则作用在质量块上的四个力所做的总虚功应该等于零,即

$$-f_1\delta u - f_D\delta u - f_S\delta u + p(t)\delta u = 0$$

将式(1-1)、(1-2)和(1-3)代入上式并提取公因子 δu ,得到

$$[-m\ddot{u}(t) - c\dot{u}(t) - ku(t) + p(t)]\delta u = 0$$

因为虚位移 δu 不等于零,必有括号内因子等于零,即得到运动方程(1-5)。

3. 哈密尔顿原理

避免建立平衡矢量方程的另一个方法是以变分形式表示的能量方程,通常最广泛应用的是哈密尔顿原理,此原理可表达为

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - V) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_{nc} dt = 0 \quad (1-8)$$

式中: T 、 V 分别为体系的动能和势能(包括应变能及任何保守外力的势能); δW_{nc} 为作用于体系上的非保守力(包括阻尼力及任意外荷载)所做的虚功。

哈密尔顿原理说明:在任何时间区间 $[t_1, t_2]$, 动能减势能的变分加上所考虑的非保守力所做的虚功必须等于零。这个方法和虚位移原理方法的不同之处在于不明显使用惯性力和弹性力,而分别被动能和势能的变分项所代替。因此,这种建立方程的方法的优点是它只和纯粹的标量——能量有关。

现在,用哈密尔顿原理来推导图 1-1 所示体系的运动方程。根据定义结构体系的动能为

$$T = \frac{1}{2} m \dot{u}^2(t) \quad (1-9a)$$

势能仅为弹簧的应变能

$$V = \frac{1}{2} k u^2(t) \quad (1-9b)$$

非保守力为阻尼力 f_D 和作用的荷载 $p(t)$, 这些力所做的虚功可表示为

$$\delta W_{nc} = -f_D \delta u + p(t) \delta u = -\dot{c}u(t) \delta u + p(t) \delta u \quad (1-9c)$$

把式(1-9)的各式代入式(1-8), 对第一项进行变分并经整理后可得

$$\int_{t_1}^{t_2} [\dot{m}u(t) \delta \dot{u} - \dot{c}u(t) \delta u - ku(t) \delta u + p(t) \delta u] dt = 0 \quad (1-10)$$

以上各项积分中, 仅第一项含有速度的变分, 可以进行如下的分部积分

$$\int_{t_1}^{t_2} \dot{m}u(t) \delta \dot{u} dt = \int_{t_1}^{t_2} \dot{m}u(t) d(\delta u) = \dot{m}u(t) \delta u \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \ddot{m}u(t) \delta u dt \quad (1-11)$$

因为在哈密尔顿原理中假定在积分限 t_1 和 t_2 时的位移是给定的, 故其变分 δu 为零, 因此式(1-11)右边的第一项等于零。将式(1-11)代回方程(1-10), 结果可以写作

$$\int_{t_1}^{t_2} [-\ddot{m}u(t) - \dot{c}u(t) - ku(t) + p(t)] \delta u dt = 0 \quad (1-12)$$

由变分 δu 的任意性, 如果要使方程(1-12)成立, 被积函数必须等于零, 于是这个方程就可以变成方程(1-5)的形式。

这个例子表明, 同一运动方程可以用三种基本方法中的任一种来导出。

1.3 重力的影响

现在讨论图 1-2(a)所示的结构体系, 作用在质量块上的力系(包括惯性力)如图 1-2(b)所示, 结构体系的动平衡关系可以写成

$$f_1 + f_D + f_s = p(t) + W \quad (1-13)$$

式中: W 是质量块的重量。

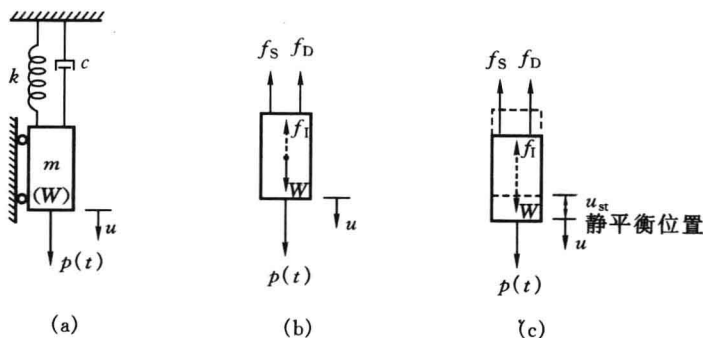


图 1-2 重力对单自由度体系平衡的影响