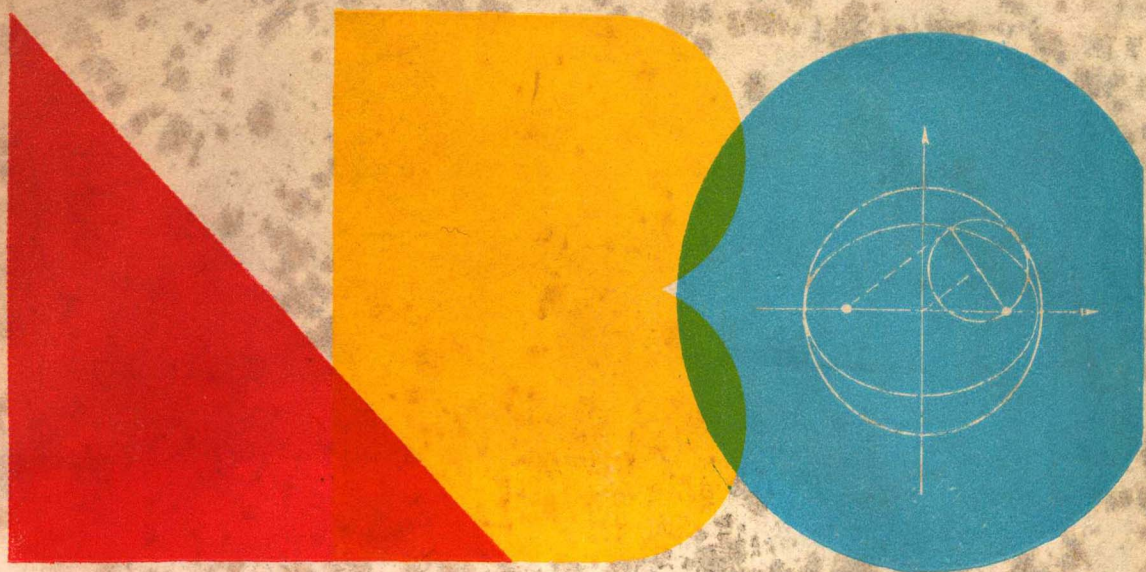




中学学科自测 ABC

高中代数（二年级用）

第三版

华东师大二附中编

上海科学技术出版社

重庆图书馆藏

196704 样

G634.62
03=3
2

2

中学学科自测 ABC

华东师大二附中 编

高中代数

· 第三版 ·

(二年级用)

高中代数

第二册

(代数二)

· 第三版 ·

华东师大二附中

编写



CS261865

上海科学技术出版社

155 012-8277 (总发行所)

155 012-8277

上海科学技术出版社

155 012-8277 (总发行所)

中学学科自测 ABC

高中代数

(二年级用)

·第三版·

华东师大二附中 编

上海科学技术出版社出版、发行

(上海瑞金二路450号)

新华书店上海发行所经销 上海东方印刷厂印刷

开本 787×1092 1/16 印张 6 字数 135000

1990年2月第1版

1994年6月第3版 1994年6月第12次印刷

印数 267,501-281,500

ISBN 7-5323-3562-3/G·661

定价: 3.50 元

沪新登字108号

前 言

根据现行各科教学大纲和初、高中语文、英语、数学、物理、化学等课本内容,结合我校各学科教师多年的教学实践,编写成这套《中学学科自测 ABC》自学参考书,全套书共 33 册。

本丛书第一版于 1990 年 2 月问世,四年来再版重印多次。这次第三版修订时,根据当前教学改革的实际情况,对有关内容作了必要的修改。其中,从起始年级开始,各册内容将逐年按新教材作相应的变动。丛书中对 A、B、C 三级的含义作了如下调整:

A 级——教学大纲要求学生必须掌握的基础知识。

B 级——在全面掌握基础知识的同时,着重提高知识综合应用的能力。

C 级——对学有余力的学生进一步开拓知识面,加强灵活解题的技巧和能力,配有适量的竞赛类题目。

本丛书每个年级一册,书后附有参考答案。学生可根据本校实际情况和自己的需求,选择相应的练习或试卷进行自我测试。

本书由李植时、李逸琪和陈贵瑶老师编写。有疏漏之处,请读者批评指正。

华东师大二附中

1994 年 1 月

目 录

第五章 不等式	1
知识要点与学习水平	1
一、不等式的性质	1
课堂练习(A级)	1
二、不等式的证明	2
课堂练习一(A级)	2
课堂练习二(A级)	2
课堂练习三(A级)	4
课堂练习四(A级)	4
三、不等式的解法	4
课堂练习一(A级)	4
课堂练习二(A级)	5
课堂练习三(A级)	7
四、含有绝对值的不等式	8
课堂练习(A级)	8
单元自测题(B级)	9
阶段自测试卷	12
A级(90分钟)	12
B级(90分钟)	14
C级(90分钟)	15
第六章 数列 极限 数学归纳法	18
知识要点与学习水平	18
一、数列	18
课堂练习一(A级)	18
课堂练习二(A级)	19
课堂练习三(A级)	22
课堂练习四(A级)	24
课堂练习五(A级)	27
单元自测题(B级)	29
二、极限	31
课堂练习一(A级)	31
课堂练习二(A级)	31
课堂练习三(A级)	32
三、数学归纳法	33
课堂练习一(A级)	33
课堂练习二(A级)	34
课堂练习三(A级)	34
课堂练习四(A级)	35

课堂练习五(A级)	35
课堂练习六(A级)	36
单元自测题(B级)	36
第一学期期末自测试卷	38
A级(90分钟)	38
B级(90分钟)	39
C级(90分钟)	41
第七章 略	
第八章 复数	44
知识要点与学习水平	44
一、复数的概念	44
课堂练习一(A级)	44
课堂练习二(A级)	45
二、复数的运算	46
课堂练习一(A级)	46
课堂练习二(A级)	47
单元自测题(B级)	49
三、复数的三角形式	51
课堂练习一(A级)	51
课堂练习二(A级)	53
课堂练习三(A级)	55
单元自测题(B级)	56
阶段自测试卷	58
A级(90分钟)	58
B级(90分钟)	59
C级(90分钟)	61
第九章 排列与组合 二项式定理	63
知识要点与学习水平	63
一、排列与组合	63
课堂练习一(A级)	63
课堂练习二(A级)	64
课堂练习三(A级)	64
课堂练习四(A级)	65
课堂练习五(A级)	66
二、二项式定理	67
课堂练习一(A级)	67
课堂练习二(A级)	68
单元自测题(B级)	69
第二学期期末自测试卷	
A级(90分钟)	71
B级(90分钟)	72
C级(90分钟)	74
参考答案	76

第五章 不 等 式

知识要点与学习水平

单 元	节 次	知 识 要 点	学 习 水 平			
			识记	理解	简单应用	综合应用
一、不等式的性质	5.1 不等式	(1) 两实数大小比较法则	✓	✓		
	5.2 不等式的性质	(2) 不等式的性质定理	✓	✓	✓	
二、不等式的证明	5.3 不等式的证明	(3) 比较法		✓	✓	✓
		(4) 平均不等式	✓	✓	✓	✓
		(5) 综合法		✓	✓	✓
		(6) 分析法		✓	✓	✓
三、不等式的解法	5.4 不等式的解法	(7) 同解不等式		✓		
		(8) 一元一次不等式(组)的解法		✓	✓	✓
		(9) 一元二次不等式(组)的解法		✓	✓	✓
		(10) 分式不等式的解法		✓	✓	
		(11) 无理不等式的解法		✓	✓	
		(12) 指数不等式的解法		✓	✓	✓
		(13) 对数不等式的解法		✓	✓	✓
四、含有绝对值的不等式	5.5 含有绝对值的不等式	(14) 含有绝对值的不等式的性质		✓	✓	
		(15) 含有绝对值的不等式的解法与证明		✓	✓	

一、不等式的性质

课堂练习(A级)

一、选择题*

1. $a, b \in R$, 下列命题正确的是().

(A) 若 $|a| > b$, 则 $a^2 > b^2$; (B) 若 $a > |b|$, 则 $a^2 > b^2$;

(C) 若 $a \neq |b|$, 则 $a^2 \neq b^2$; (D) 若 $|a| > b$, 则 $\frac{1}{a^2} < \frac{1}{b^2}$.

2. 已知 $a < b < 0$, 下列不等式能成立的是().

(A) $|a| < |b|$; (B) $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$; (C) $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$; (D) $(\sqrt{3})^a > (\sqrt{3})^b$.

3. 已知: $a, b, c, d \in R$, 则下列命题中必成立的是().

(A) $a > b, c > b$, 则 $a > c$; (B) $a > -b$, 则 $c - a < c + b$;

本书中的选择, 每小题都给出了代号为(A)、(B)、(C)、(D)的四个结论, 其中只有一个结论是正确的, 把你认为正确结论的代号写在题后的括号内, 下同.

(C) $a^2 > b^2$, 则 $-a < -b$; (D) $a > b, c < d$, 则 $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$.

4. 已知 $a+b > 0, b < 0$, 那么 $a, b, -a, -b$ 的大小关系是().

(A) $a > b > -a > -b$; (B) $a > -a > b > -b$;

(C) $a > -b > b > -a$; (D) $-a > -b > a > b$.

5. 若 $a, b, c \in \mathbb{R}$, 则 $a > b$ 是 $ac^2 > bc^2$ 的().

(A) 充分但不必要条件; (B) 必要但不充分条件;

(C) 充要条件; (D) 既不充分也不必要条件.

二、根据条件, 判断 x, y 的符号

1. 若 $x+y > 0$, 且 $xy > 0$, 则_____.

2. 若 $x+y < 0$, 且 $xy > 0$, 则_____.

3. 若 $x > y$, 且 $xy > 0$, 则_____.

4. 若 $x > y$, 且 $xy < 0$, 则_____.

三、对于 $a \in \mathbb{R}$, 下列各不等式能成立吗? 为什么?

1. $3a > 2a$. 2. $3+a > 2+a$. 3. $3+a > 3-a$. 4. $\frac{3}{a} > \frac{2}{a}$.

四、下列命题是否正确? 它的逆命题是否成立?

1. 若 $a < b > 0$, 则 $a^2 > b^2$. 2. 若 $a < b$, 则 $a(m+2)^2 < b(m+2)^2$.

3. 若 $ka > kb > 0$, 则 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$. 4. 若 $a < b < 0, c < d < 0$, 则 $\frac{a}{d} > \frac{b}{c}$.

五、比较大小

1. 若 $m > n$, 试比较 $m^4 - m^3n$ 和 $n^3m - n^4$ 的大小.

2. 若 $x > y, n \in \mathbb{N}$, 试判断 x^{2n+1} 与 y^{2n+1} 的大小.

3. 若 $a > 1$, 试比较 $a + \frac{a}{a+2}$ 与 $1 + \frac{a-1}{a+2}$ 的大小.

六、用不等式基本性质证明

1. 若 $a < b < 0$, 求证: $a^2b < ab^2$.

2. 若 $a > b > 0, d < c < 0$, 求证: $\frac{\sqrt{a}}{c} < \frac{\sqrt{b}}{d}$.

二、不等式的证明

课堂练习一(A级)

试用比较法证明下列各题:

1. $3(1+a^2+a^4) \geq (1+a+a^2)^2$. 2. $3(a^2+b^2+c^2) \geq (a+b+c)^2$.

课堂练习二(A级)

一、填空题

1. 若 $ab = 1, a, b \in \mathbb{R}$, 则 $a^2 + b^2 \geq$ _____.

2. 若 $a, b \in \mathbb{R}^+$, 且 $ab = 1$, 则 $a + b \geq$ _____.

3. 若 $a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 = 1$, 则 $ab \leq$ _____.

4. 若 $a, b \in R^+$, $a+b=1$, 则 $ab \leq$ _____.

5. 若 $a, b, c, d \in R^+$, 则 $\left(\frac{b}{a} + \frac{d}{c}\right)\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) \geq$ _____.

6. 若 $a, b, c \in R^+$, 则 $\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} \geq$ _____.

7. 若 $a > 1, b > 1$, 则 $\log_a b + \log_b a \geq$ _____.

8. 若 $a, b, c \in R^+$, 则 $\frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} \geq$ _____.

二、求证

1. $\frac{x^2+3}{\sqrt{x^2+2}} > 2$.

2. $\frac{x^2}{1+x^4} \leq \frac{1}{2}$.

三、设 a, b, c, d, m, n 为正数, 且 $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, 试证: $\frac{a}{b} < \frac{ma+nc}{mb+nd} < \frac{c}{d}$.

四、证明题

1. 已知 a, b, c 为不全相等的正数, 求证: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > \frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ac}}$.

2. 已知 a, b, c 为互不相等的正数, 求证: $\frac{2}{a+b} + \frac{2}{b+c} + \frac{2}{c+a} > \frac{9}{a+b+c}$.

3. 已知 $a > b > 0$, 求证: $a + \frac{1}{(a-b)b} \geq 3$.

4. 已知 $a, b, c \in R^+$, 求证: $3\left(\frac{a+b+c}{3} - \sqrt[3]{abc}\right) \geq 2\left(\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}\right)$.

5. 已知 $a, b \in R^+$, 求证: $a+b + \frac{1}{\sqrt{ab}} \geq 2\sqrt{2}$.

6. 已知 $a, b \in R$, 求证: $\frac{1}{2}(a^2+b^2)+1 \geq \sqrt{a^2+1} \sqrt{b^2+1}$.

7. 已知 $x \geq 0, y \geq 0$, 求证: $\sqrt{x+y} \geq \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{2}}$.

8. 已知 $a, b, c \in R$, 求证: $3(a^2+b^2+c^2) \geq (a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca)$.

9. 若 $a, b \in R^+$, 则 $\frac{1}{2a} + \frac{1}{2b} \geq \frac{2}{a+b}$.

10. a, b 为不相等的正数, 求证: $(a+b)(a^2+b^2)(a^3+b^3) > 8a^3b^3$.

11. 已知 $a, b, c \in R$, 求证:

(1) $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 \geq abc(a+b+c)$; (2) $a^2+b^2+c^2+3 \geq 2(a+b+c)$.

五、选择题

1. 不等式 $a+b > 2\sqrt{ab}$ 成立的充分条件是().

(A) $a, b \in R$;

(B) $a, b \in R^+$;

(C) $a, b \in R$, 且 $a \neq b$;

(D) $a, b \in R^+$, 且 $a \neq b$.

2. 设 $x, y \in R$, 且 $x+y=5$, 则 3^x+3^y 的最小值为().

(A) 10;

(B) $6\sqrt{3}$;

(C) $4\sqrt{6}$;

(D) $18\sqrt{3}$.

3. 已知函数:

(1) $y_1 = x + \frac{4}{x}$ ($x \neq 0$),

(2) $y_2 = \cos x + \frac{4}{\cos x}$ ($0 < x < \frac{\pi}{2}$),

$$(3) y_3 = \frac{1}{3} \left(x + 8x + \frac{8}{x^3} \right) \quad (x > 0),$$

$$(4) y = (1 + \operatorname{ctg} x) \left(\frac{1}{2} + 2 \operatorname{tg} x \right) \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2} \right)$$

其中以 4 为最小值的函数个数是().

(A) 0; (B) 1; (C) 2; (D) 3.

六、填空题

1. 函数 $y = 4x^2 + 1 + 9x^{-2} (x > 0)$, 当 $x =$ _____ 时, 此函数有最 _____ 值, 等于 _____.

2. 函数 $y = 2x + \frac{8}{x^2} + 3$, 当 $x =$ _____ 时, 此函数有最 _____ 值, 等于 _____.

课堂练习三(A级)

试用分析法证明下列各题

1. a, b 为正数, 求证: $\sqrt{a} + \sqrt{b} > \sqrt{a+b}$.

2. 若 $c \geq 1$, 则 $\sqrt{c+1} - \sqrt{c} < \sqrt{c} - \sqrt{c-1}$.

课堂练习四(A级)

证明题

1. 求证: $\frac{1}{\log_5 19} + \frac{2}{\log_3 19} + \frac{3}{\log_2 19} < \frac{1}{\log_2 \pi} + \frac{1}{\log_5 \pi}$.

2. 已知 $a, b, c \in R^+$, 求证: $a^a b^b \geq a^b b^a$.

3. 若 $a, b, c \in R^+$, 且 $a+b+c=1$, 求证: (1) $a^{-1} + b^{-1} + c^{-1} \geq 9$.

(2) $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \leq \sqrt{3}$. (3) $\left(\frac{1}{a} - 1\right)\left(\frac{1}{b} - 1\right)\left(\frac{1}{c} - 1\right) \geq 3$.

4. 已知: $a, b, x \in R$, 且 $a^2 + b^2 = 1$, 求证: $a \cos x + b \sin x \leq 1$.

三、不等式的解法

课堂练习一(A级)

一、选择题

1. 下面四个命题中, 命题为真的是().

(A) 如果 $x^2 > x$, 则有 $x > 0$; (B) 如果 $x^2 > 0$, 则有 $x > 0$;

(C) 如果 $x < 0$, 则有 $x^2 > x$; (D) 如果 $x < 1$, 则有 $x^2 < x$.

2. 不等式 $3x + 7 + \frac{1}{2x+1} \geq x + 1 + \frac{1}{2x+1}$ 的解是().

(A) $x \geq -3$; (B) $x \geq -3$ 且 $x \neq -\frac{1}{2}$; (C) $x \leq -3$; (D) $-3 \leq x < -\frac{1}{2}$.

3. 当 $m < -1$ 时, 不等式 $3m + x > 2 - mx$ 的解是().

(A) $x < \frac{2-3m}{m+1}$; (B) $x > \frac{2-3m}{m+1}$;

(C) $x < \frac{3m-2}{m+1}$, (D) $x > \frac{3m-2}{m+1}$.

4. 不等式 $(x^2 - 2x - 3)(x^2 - 4x + 4) < 0$ 的解集为().

(A) $\{x | x < -1, \text{ 或 } x > 3\}$; (B) $\{x | -1 < x < 3\}$;

(C) $\{x | -1 < x < 2 \text{ 或 } 2 < x < 3\}$; (D) 以上答案都不是.

5. 不等式组 $\begin{cases} x^2 - 3x - 4 < 0 \\ 3x - 4 > 0 \end{cases}$ 的解集为().

(A) $\{x | -4 < x < 1\}$; (B) $\{x | -1 < x < 4\}$;

(C) $\{x | -1 < x < \frac{4}{3} \text{ 或 } \frac{4}{3} < x < 4\}$; (D) 不同于以上的答案.

6. 使关于 x 的方程 $(m-2)x^2 - (3m-16)x + 6m = 0$ 有两个负根的实数 m 的范围是().

(A) $m > 2$ 或 $m < 0$; (B) $-2 < m < 0$;

(C) $-\frac{2}{5} \leq m < 0$; (D) $-2 < m < 2$.

二、填空题

1. 若 $-2 < a < b < 3$, $-2 < c < 0$, 则 $c(a-b)$ 的取值范围是_____.

2. 若不等式 $ax^2 + x + b > 0$ 的解为 $-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}$, 则 $a =$ _____, $b =$ _____.

3. 不等式 $(m+3)x^2 - 5x - 4 < 0$ 适合 x 的任何实数值, 则 m 的取值范围是_____.

4. 若 $\arcsin(2x-5) < \arcsin(x-2)$, 则 x 的范围是_____.

5. 若 x, y 是关于 m 的方程 $m^2 - 2am + a + b = 0$ 的两个实数根, 则 $(x-1)^2 + (y-1)^2$ 的最小值是_____.

6. 当 $a \in$ _____ 区间时, $\sin \alpha - \cos \alpha = a$ 恒有意义.

三、解下列不等式(组)

1. $x(x-2)^2 > -3(x-2)^2$. 2. $(2x+1)(x-3)(3x+2)^2(x+8) > 0$.

3. $(x^2-2)(x^3-1)(2-x)^2 > 0$. 4. $\frac{1+ax}{3} + \frac{4a-x}{2} < \frac{a}{6}$.

5. $\begin{cases} 16-x^2 \geq 0, \\ x^2-x-6 > 0. \end{cases}$ 6. $\begin{cases} (x+4)(x+2)(x-1)(x-3) > 0, \\ x(x+3)(2-x)(3-x)(4-x) \geq 0. \end{cases}$

四、求 p, q 的整数值, 使方程 $x^2 + px + q = 0$ 与 $x^2 + qx + p = 0$ 都没有实数解.

五、试求 m 的范围, 使 $f(x) = x^2 - 2mx + 2m + 1$, 当 $0 \leq x \leq 1$ 时恒大于 0.

六、已知二次函数 $y = f(x)$ 的图象通过原点, 且 $1 \leq f(1) \leq 3$, $3 \leq f(-1) \leq 7$, 试求 $f(2)$ 的取值范围.

课堂练习二(A级)

一、选择题

1. 不等式 $x > \frac{1}{x}$ 的解集为().

(A) $\{x | x \geq \pm 1\}$; (B) $\{x | x < -1 \text{ 或 } x > 1\}$;

(C) $\{x|-1 < x < 1\}$; (D) 以上答案均不对.

2. 不等式 $2x+5-\sqrt{x-6} \geq 5x-1-\sqrt{x-6}$ 的解是().

(A) $2 \leq x \leq 6$; (B) $x \geq 6$; (C) $x \leq 2$; (D) 以上答案均不对.

3. 若 $m > 0, n > 0$, 则不等式 $m > \frac{1}{x} > -n$ 的解是().

(A) $-\frac{1}{n} < x < 0$ 或 $0 < x < \frac{1}{m}$; (B) $-\frac{1}{m} < x < 0$ 或 $0 < x < \frac{1}{n}$;

(C) $x < -\frac{1}{n}$ 或 $x > \frac{1}{m}$; (D) $-\frac{1}{m} < x < \frac{1}{n}$.

4. 如果 $x \in (1, +\infty)$, 那么函数 $y = \frac{x^2-x+1}{x-1} - 1$ 的最小值是().

(A) 2; (B) 1; (C) -2; (D) -1.

5. 下面四个结论中, 正确的结论是().

(A) 不等式 $\sqrt{\frac{x-1}{x-3}} \leq 1$ 与不等式 $\frac{x-1}{x-3} \leq 1$ 同解;

(B) 不等式 $\sqrt{\frac{x-1}{x-3}} \leq 1$ 与不等式 $\left| \frac{x-1}{x-3} \right| \leq 1$ 同解;

(C) 不等式 $\sqrt{\frac{x-1}{x-3}} \leq 1$ 与不等式 $1 < x < 3$ 同解;

(D) 不等式 $\sqrt{\left(\frac{x-1}{x-3}\right)^2} \leq 1$ 与不等式 $\left| \frac{x-1}{x-3} \right| \leq 1$ 同解.

6. 不等式 $\frac{1}{x-1} > x+1$ 的解集是().

(A) $\{x|x < -3\}$; (B) $\{x|x > 1\}$;

(C) $\{x|x < -\sqrt{2}\} \cup \{x|1 < x < \sqrt{2}\}$; (D) $\left\{x \left| \frac{4}{3} < x < \sqrt{2} \right.\right\}$.

二、填空题

1. 不等式 $(x-1)\sqrt{x^2-x-2} \geq 0$ 成立, 则 x 取值范围是_____.

2. n 满足 $-\frac{1}{10} < \frac{3n}{n+1} - 3 < -\frac{1}{10}$, 且 n 为不大于 30 的正整数, 则 $n =$ _____.

3. 函数 $y = \sqrt{x^2 - \frac{1}{x}}$ 的定义域为_____.

4. 函数 $y = \frac{2}{\sqrt{3x^2-6x+4}}$ 的定义域为_____, 值域为_____.

5. 已知 $A = \{x|3-x \geq \sqrt{x-1}, x \in \mathbb{R}\}$, $B = \{x|x^2 - (a+1)x + a \leq 0, x \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}\}$, 若 $A=B$, 则 $a =$ _____.

6. 不等式 $\sqrt{3(3-x)} > 3-2x$ 的解集为_____.

三、解下列不等式

1. $\frac{3x^2+7x-14}{x^2+3x-4} \leq 2$.

2. $\frac{c}{b-x} > a$, 其中 $a > 0, b > 0, c < 0$.

3. $4x^2-13+\sqrt{x+3} \geq 8x-1+\sqrt{x+3}$.

4. $\sqrt{x^2-3x+2} > x+3$.

5. $\sqrt{2x+1} + \sqrt{x-1} > \sqrt{3x}$.

6. x 为何值时, 等式 $\frac{x^2-6x+8}{x^2+2} = \sin\varphi$ ($0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$) 成立?

7. 解关于 x 的不等式 $\sqrt{x^2-4mx+4m^2} > m+3$.

四、试求 a 的取值范围, 使 $a, a+1, a+2$ 成为一个钝角三角形的三条边.

五、试求 m 的取值范围, 使方程 $(1-m^2)x+2mx-1=0$ 的两根都在 0 与 1 之间.

课堂练习三(A级)

一、选择题

1. 已知 $-1 < a < 0$, 下列不等式中成立的是().

(A) $(0.2)^a > 2^a > \left(\frac{1}{2}\right)^a$; (B) $\left(\frac{1}{2}\right)^a > 2^a > (0.2)^a$;

(C) $2^a > \left(\frac{1}{2}\right)^a > (0.2)^a$; (D) $(0.2)^a > \left(\frac{1}{2}\right)^a > 2^a$.

2. 设 $x < 5$, 下列不等式中必成立的是().

(A) $x \cdot \left| \lg \frac{1}{\sqrt{2}} \right| < 5 \cdot \left| \lg \frac{1}{\sqrt{2}} \right|$; (B) $\left| x \lg \frac{1}{\sqrt{2}} \right| < \left| 5 \lg \frac{1}{\sqrt{2}} \right|$;

(C) $|x| \cdot \lg \frac{1}{\sqrt{2}} < 5 \lg \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \right|$; (D) $x \lg \frac{1}{\sqrt{2}} < 5 \lg \frac{1}{\sqrt{2}}$.

3. 如果 $x = \frac{1}{\log_{\frac{1}{2}} 3} + \frac{1}{\log_{\frac{1}{3}} 9}$, 则 x 满足().

(A) $3 < x < 4$; (B) $2 < x < 3$; (C) $1 < x < 2$; (D) $-2 < x < -1$.

4. 若 $A = \{x | x^2 - 3x + 2 \leq 0\}$, $B = \{x | \log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{2}}(x+1) < -1\}$, 全集为实数集 R , 则

$\overline{A \cup B}$ 为().

(A) $\{x | 1 < x \leq 2\}$; (B) $\{x | x \leq 1 \text{ 或 } x > 2\}$;

(C) $\{x | 1 \leq x \leq 2\}$; (D) $\{x | 1 \leq x \leq 2 \text{ 或 } x < -2\}$.

5. 若 $x > 0$, 则正确的关系是().

(A) $\lg(1+x) = 1 + \lg x$; (B) $\lg(1+x) < \frac{x}{1+x}$;

(C) $\lg(1+x) > x$; (D) $\lg(1+x) < x$.

6. 不等式 $a^x > a^{\frac{1}{x}}$ ($a > 0$) 的解为().

(A) $-1 < x < 0$ 或 $x > 1$; (B) $0 < x < 1$ 或 $x < -1$;

(C) 当 $a > 1$ 时, $-1 < x < 0$ 或 $x > 1$, 当 $0 < a < 1$ 时, $0 < x < 1$ 或 $x < -1$;

(D) 以上都不对.

二、填空题

1. 试比较下列各式中 m 和 n 的大小:

(1) $\left(\frac{5}{3}\right)^m > \left(\frac{5}{3}\right)^n$, 则 m _____ n ; (2) $(0.2)^m > (0.2)^n$, 则 m _____ n ;

(3) $a^m > a^n (a > 0, a \neq 1)$, 则 _____; (4) $\log_a m > \log_a n (a > 0, a \neq 1)$, 则 _____.

2. 设 $a = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}, b = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}}, c = \left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{1}{6}}$, 则 a, b, c 的大小关系是 _____.

3. 已知 $\log_a \frac{2}{3} < 1$, 则 a 的取值范围是 _____.

4. 不等式 $(\sin 70^\circ)^{3x+2} > (\sin 70^\circ)^{x-17}$ 的解集是 _____.

5. 函数 $y = \lg[1 + \lg(1 + \lg x)]$ 的定义域是 _____.

6. 函数 $y = \frac{\lg(9-3^x)}{\lg(x+2)}$ 的定义域是 _____.

三、解下列不等式

1. $5^x + 5^{x-1} < 750$. 2. $x^{2x+1} > x^{x+4}$ 3. $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_2(x^2-3x+1)} < 1$.

4. $4^x - 3 \cdot 2^x - 1 > 0$. 5. $\sqrt{\lg x - 1} < 3 - \lg x$.

6. $\log_{\sqrt{2}}(x^2 - 2x + 8) + 2\sqrt{\log_2(x^2 - 2x + 8)} \geq 12$. 7. $10^{21\lg x} > \log_2 32 - 4x$.

8. $\log_{kx} x + \log_x (kx)^2 > 0$. 9. $\log_{x+4}(x^2 - 3x - 4) < \log_{x+4}(5 - 3x)$.

10. $\log_{\sqrt{2}}(5^x - 1) \log_{\sqrt{2}} \frac{2\sqrt{2}}{5^x - 1} > 2$.

四、含有绝对值的不等式

课堂练习(A级)

一、选择题

1. 若 $a, b \in R$, 且 $ab > 0$, 则下列不等式中不正确的是().

(A) $|a+b| \geq a-b$; (B) $2\sqrt{ab} \leq |a+b|$;

(C) $|a+b| < |a| + |b|$; (D) $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2$.

2. 不等式 $\frac{|a+b|}{|a|+|b|} \leq 1$ 成立的充要条件是().

(A) $ab \neq 0$; (B) $a^2 + b^2 \neq 0$; (C) $ab > 0$; (D) $ab < 0$.

3. 设 a, b, c 为实数, 又给出四个命题:

(1) $5 \leq 5$; (2) $a < b$, 则 $\frac{a}{c^2} < \frac{b}{c^2}$;

(3) $\frac{a}{c^2} < \frac{b}{c^2}$, 则 $a < b$; (4) $\frac{b}{a} + \frac{a}{b} \geq 2$.

则其中真命题是().

(A) (1)和(2); (B) (2)和(3); (C) (1)和(3); (D) (3)和(4).

4. 设 $A = \{x | |x+1| \leq 2\}$, $B = \{x | x^2 - 5x + 6 \geq 0\}$, 则 A, B 间的关系是().

(A) $A \supset B$; (B) $A = B$; (C) $A \subset B$; (D) $A \cap B = \phi$.

5. 设 $|x-2| < a$ 时, 不等式 $|x^2-4| < 1$ 成立, 正数 a 的取值范围为().

(A) $a > \sqrt{5} - 2$; (B) $0 < a \leq \sqrt{5} - 2$;

(C) $a \geq \sqrt{5} - 2$; (D) 以上都不对.

6. 已知 $f(x) = x^2 - ax + 1$, 且 $f(1) < 1$, 则 a 的取值区间为().
 (A) $(-\infty, 1)$; (B) $(1, 3)$; (C) $(3, +\infty)$; (D) $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$.

二、填空题

1. 若 $\left| \frac{1}{2x} \right| \geq 3$, 则 x 的取值范围是_____.
2. 若 $\left| \frac{5}{a} \right| < 1$, 则 a 的取值范围是_____.
3. 若 $\sqrt{m^2} < a$, 则 $a > 0$ 时, m 的范围是_____; 当 $a \leq 0$ 时, 则 $m \in$ _____.
4. 若 $\sqrt{n^2} > n$, 则 n 的取值范围为_____.
5. 若 $M = \left\{ x \mid x \geq \frac{1}{5} \right\}$, $N = \{ x \mid |2x - 1| < 3 \}$, 则 $M \cap N =$ _____, $M \cup N =$ _____.
6. 试用 $<$ 、 $>$ 、 $\leq$ 、 $\geq$ 填入空格内:

$$(1) \frac{|a| - |b|}{|a - b|} \text{_____} \frac{|a| + |b|}{|a + b|}; \quad (2) \frac{|a| + |b|}{||a| - |b||} \text{_____} \frac{||a| - |b||}{|a + b|}.$$

三、解下列不等式

1. $|x^2 - 4x + 3| > x^2 - 4x + 3$.
2. $x^2 - 3|x| + 2 < 0$.
3. $5 < |2x + 3| + x \leq 11$.
4. $\frac{|x + 2| - |x|}{\sqrt{4 - x^2}} > 0$.
5. $|\sqrt{2x - 3} - 4| > 1$.
6. $\left(\frac{1}{3}\right)^{|1 + 2x| + |2 - x|} < \frac{1}{27}$.

四、求函数 $y = \frac{\left(x + \frac{1}{2}\right)^0}{|x| - x}$ 的定义域与值域.

五、证明题

1. 若 $|h| < \frac{a}{4}$, $|k| < \frac{a}{6}$, 求证: $|2h - 3k| < a$.
2. 已知 $|x - A| < \frac{\varepsilon}{3}$, $|y - B| < \frac{\varepsilon}{3}$, $|z - C| < \frac{\varepsilon}{3}$, 求证:
 (1) $|x + y + z - (A + B + C)| < \varepsilon$. (2) $|x + y - z - (A + B - C)| < \varepsilon$.
3. 已知: $|x - a| < \frac{\varepsilon}{2m}$, $|y - b| < \frac{\varepsilon}{2|a|}$, $|y| < m$, 求证: $|xy - ab| < \varepsilon$.
4. 若 $\left| \frac{1 + ab}{a + b} \right| < 1$, 求证: $|a|$ 和 $|b|$ 中必有一个大于 1, 而另一个小于 1.
5. 求证: $\frac{|a + b|}{1 + |a + b|} \leq \frac{|a|}{1 + |a|} + \frac{|b|}{1 + |b|}$.
6. 设 $M = \sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta} + \sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta}$,
 求证: $|a| + |b| \leq M \leq \sqrt{2(a^2 + b^2)}$.
7. 若 $|a| \leq 1$, $|b| \leq 1$, 证明: $|ab \pm \sqrt{(1 - a^2)(1 - b^2)}| \leq 1$.
8. 已知 $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$, 当 $a \neq b$ 时, 求证: $|f(a) - f(b)| < |a - b|$.

单元自测题(B级)

一、选择题(每小题 3 分, 共 30 分)

1. 如果 $a, b, c \in R$, 则下面四个命题中, 正确的命题是().

- (A) 如果 $a > b, c > b$ 则 $a > c$; (B) 如果 $a > -b$, 则 $c - a < c + b$;
(C) 如果 $a > b$, 则 $ac^2 > bc^2$; (D) 如果 $a > b, c < d$, 则 $ac > bd$.

2. 设 a, b 为实数, 两个不等式 $a > b, \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$ 同时成立的充要条件是().

- (A) $a > 0, b > 0$; (B) $a < 0, b < 0$;
(C) $a > 0, b < 0$; (D) $a < 0, b > 0$.

3. 已知 $a < 0, -1 < b < 0$, 那么 a, ab, ab^2 之间的大小关系是().

- (A) $a > ab > ab^2$; (B) $ab^2 > ab > a$;
(C) $ab > a > ab^2$; (D) $ab > ab^2 > a$.

4. 如果 $a + b > 2$, 则 $ab > 1$ 是 $a > 1$ 且 $b > 1$ 的().

- (A) 充要条件; (B) 非充分也非必要条件;
(C) 充分非必要条件; (D) 必要非充分条件.

5. 已知 $a < b < |a|$, 下列不等式中必成立的是().

- (A) $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$; (B) $ab < 1$; (C) $\frac{a}{b} > 1$; (D) $a^2 > b^2$.

6. $x^2 > a^2$ 等价于().

- (A) $x \geq \pm a$; (B) $-a < x < a$;
(C) $x < -a$ 或 $x > a$ (D) $x > |a|$ 或 $x < -|a|$.

7. $\lambda > 0$, 则 $\frac{2-3\lambda}{1+\lambda}$ 之值().

- (A) 大于 0; (B) 介于 -1 与 1 之间;
(C) 介于 -2 与 2 之间 (D) 小于 -1 或大于 1.

8. 不等式 $\frac{3x^2-4x-23}{x^2-9} \geq 2$ 的解集是().

- (A) $(-\infty, -3] \cup [-1, 3] \cup [5, +\infty)$;
(B) $(-\infty, -3) \cup (-1, 3) \cup (5, +\infty)$;
(C) $(-\infty, -3] \cup (-1, 3] \cup [5, +\infty)$;
(D) $(-\infty, -3) \cup [-1, 3) \cup [5, +\infty)$.

9. 下列四个不等式中, 与不等式 $x > \frac{1}{2}$ 同解的不等式是().

- (A) $4^x > 2$; (B) $x + \frac{1}{x^2-1} > 1 - 2x + \frac{1}{x^2-1}$;
(C) $x \lg x^2 > \lg x$; (D) $2x \cdot \sqrt{\frac{1}{x-3}} > \sqrt{\frac{1}{x-3}}$.

10. 已知 $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^{2x^2-5x+6}$, $g(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^{x^2+x+6}$, 则不等式 $f(x) \leq g(x)$ 的解集是

().

- (A) $\{x | 0 \leq x \leq 6\}$; (B) $\{x | 0 < x < 6\}$;
(C) $\{x | x < 0 \text{ 或 } x > 6\}$; (D) $\{x | x \leq 0 \text{ 或 } x \geq 6\}$.

二、填空题(每小题 3 分, 共 30 分)

1. 函数 $y = \sqrt{\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 3}}$ 的定义域是_____.

2. 如果 $\frac{1}{7} \leq a \leq 7$, 则 $a + \frac{1}{a}$ 的取值范围是_____.

3. 如果关于 x 的不等式 $(2a - b)x + a - 5b > 0$ 的解是 $x < -\frac{10}{7}$, 则关于 x 的不等式 $ax > b$ 的解是_____.

4. 当 $x > 0$ 时, 函数 $y = 2 - 3x - \frac{4}{x}$ 的最大值是_____.

5. 设 $a > b > 0$, 则 $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$ 与 $\frac{a - b}{a^2 + b^2}$ 的大小关系是_____.

6. 当 $0 < a < 1$ 时, $a^{\frac{1}{a}}$, a^{-a} , a^a 的大小关系是_____.

7. 如果一元二次方程 $(2 - k)x^2 - x + 1 = 0$ 有两个不相等的实数根, 那么 k 的取值范围是_____.

8. x, y, z 均大于 1 时, $\log_x y + \log_y z + \log_z x$ 的最小值为_____.

9. 当 $n > 2$ 时, $\log_n(n - 1)$ 与 $\log_{n+1}n$ 的大小关系是_____.

10. 如果 $0 < a < b$, $a + b = 1$, 则 $\frac{1}{2}$, b , $2ab$, $a^2 + b^2$ 中, 最大的一个是_____.

三、(每小题 4 分, 共 12 分)

1. 求不等式 $\log_{0.3}(\sqrt{2x+5} - x) \geq 0$ 的解集.

2. 如果不等式 $\frac{x^2 + x \lg x - 2}{x^2 - x + 1} \geq -3$ 对一切实数 x 恒成立, 求 x 的取值范围.

3. 解不等式: $\frac{1 - x^2}{1 + x^2} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} > 0$.

四、(每小题 5 分, 共 10 分)

解关于 x 的不等式:

1. $|\log_a x - 1| < 3a - 1$, 其中 $a > 0$, $a \neq 1$. 2. $\sqrt{a^2 - x^2} > a$.

五、(本题满分 8 分) 方程 $x^2 - 5x \lg k + 6 \lg^2 k = 0$ 的两根中, 仅有一个较小的根在区间 $(1, 2)$ 内, 求 k 的取值范围.

六、证明题(每小题 5 分, 共 10 分)

1. 已知 $a, b, c \in \mathbb{R}$, 求证: $a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a + b + c)$, 并指出等号成立的条件.

2. 已知 $x > y > 0$, 且 $xy = 2$, 求证: $\frac{x^2 + y^2}{x - y} \geq 4$.