普通高等教育“十二五”规划教材

概率论与数理统计

理工类

郭民之 主编

科学出版社

普通高等教育"十二五"规划教材

概率论与数理统计

（理工类）

主　编　郭民之

副主编　曾　黎　曹　军

　　　　聂彩仁　杨新平

参　编　田　维　胡俊山

　　　　白　虹　宗凤喜

　　　　杨　波

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书主要介绍概率论与数理统计的基本概念、原理和方法．以实际应用为背景，讲述力求简明通俗，突出概率统计课程理论学习与计算机运用相结合的特色，在规定的教学内容中加入简明实用的 Excel 函数命令和操作演示．内容包括随机事件与概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、方差分析与回归分析．每小节后都配有习题，书末附有习题参考答案．

本书可作为开设概率统计课程的师范院校及理工、经管类院校本、专科学生及相关读者，也可作为相关专业学生的教学参考书．

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计：理工类/郭民之主编．—北京：科学出版社，2012
普通高等教育"十二五"规划教材
ISBN 978-7-03-035270-5

Ⅰ.①概… Ⅱ.①郭… Ⅲ.①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 184388 号

责任编辑：胡云志 任俊红 唐保军 / 责任校对：张怡君
责任印制：阎 磊 / 封面设计：华路天然工作室

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
铭浩彩色印装有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2012 年 8 月第 一 版 开本：720×1000 B5
2012 年 8 月第一次印刷 印张：18
字数：353 000

定价：33.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

序　言

当今中国高等教育已从传统的精英教育发展到现代大众教育阶段. 高等学校一方面要尽可能满足民众接受高等教育的需求，另一方面要努力培养适应社会和经济发展的合格人才，这就导致大学的人才培养规模与专业类型发生了革命性的变化，教学内容改革势在必行. 高等数学课程是大学的重要基础课，是大学生科学修养和专业学习的必修课. 编写出具有时代特征的高等数学教材是数学教育工作者的一项光荣使命.

科学出版社"十二五"教材出版规划的指导原则与云南省大部分高校的高等数学课程改革思路不谋而合，因此我们组织了云南省具有代表性的十所高校的数学系骨干教师组成项目专家组，共同策划编写了新的系列教材，并列入科学出版社普通高等教育"十二五"规划教材出版项目. 本系列教材以大众化教育为前提，以各专业的发展对数学内容的需要为准则，分别按理工类、经管类和化生地类编写，第一批出版的有高等数学（理工类）、高等数学（经管类）、高等数学（化生地类）、概率论与数理统计（理工类）、线性代数（理工类），以及可供各类专业选用的数学实验教材. 教材的特点是，在不失数学课程逻辑严谨的前提下，加强了针对性和实用性.

参加教材编写的教师都是在教学一线有长期教学经验积累的骨干教师. 教材的第一稿已通过一届学生的试用，在征求使用本教材师生意见和建议的基础上作了进一步的修改，并通过项目专家组的审查，最后由科学出版社统一出版. 在此对试用本教材的师生、项目专家组以及科学出版社表示衷心感谢.

高等教育改革无止境，教学内容改革无禁区，教材编写无终点. 让我们共同努力，继续编出符合科学发展、顺应时代潮流的高质量教材，为高等数学教育做出应有的贡献.

郭　震

2012 年 8 月 1 日于昆明

前　言

概率论与数理统计的研究对象是随机现象及其规律性以及相关统计推断问题，而随机现象在现实世界中大量存在，这就决定了概率论与数理统计的理论和方法具有广泛的应用价值．从 1999 年我国高等院校扩大招生规模以来，至今十余年，我国高等教育已实现从精英教育向大众化教育的转变．但与之相应的教材建设还不尽如人意，或多或少地停留在传统模式上，过分追求逻辑的严密性和理论体系的完整性，重理论而轻实践．在计算机使用日益普及、信息化技术飞速发展的今天，如何把概率统计教学和计算机使用紧密结合是一个值得充分探讨的课题．本书是根据高等院校理工类专业概率论与数理统计教学大纲和教学基本要求，结合编者多年的教学实践经验编写而成的．教材的编写力求体现如下特点：

第一，在教学思想和方法上以实际应用为背景，概念阐述尽量简明、注重专业理论素养和实际动手能力的协调发展，贯彻素质教育的理念．

第二，强调实用性，突出概率统计课程理论学习与计算机运用相结合的特色．在规定的教学内容中加入简明实用的 Excel 函数命令和操作演示，教师能用直观形象的实验展示数据分析、作图等教学过程，学生也能模仿书中内容进行计算和操作，解决相关实际数据分析问题．

第三，适应少学时要求，教材内容按每周 3 学时，17 周共 51 学时来编写．教师可以根据实际情况决定教学内容的取舍．

教材内容包括：随机事件与概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、方差分析与回归分析．每小节后都配有习题，书末附有习题参考答案．

教材的使用对象是开设概率统计课程的师范院校及理工、经管类院校本、专科学生及相关读者，本书也可以作为相关专业学生的教学参考书．

参加教材编写的有云南省八所师范院校的十位教师，其中第 2 章由德宏师范高等专科学校田维老师编写；第 3 章由红河学院曾黎老师编写；第 4 章前两节由曲靖师院宗凤喜老师编写，后两节由保山学院胡俊山老师编写；第 5 章由玉溪师院曹军老师编写；第 6 章由昭通学院白虹老师编写；第 7 章由云南师大经管学院聂彩仁老师编写；第 8 章由楚雄师院杨新平老师和杨波老师编写；云南师大数学学院郭民之老师编写了第 1 章和附表，负责全书总体设计安排，并进行统一的调整、校对、订正和统稿工作．

本书的编写得到云南省数学学会、云南师范大学和云南省多所高等师范院校

的大力支持,科学出版社龚剑波、任俊红两位编辑为本书的出版做了大量繁杂而细致的工作,在此一并表示感谢!

由于我们水平所限,编写时间较紧,书中存在的问题,敬请读者和同行批评指正.

编　者

2012 年 7 月

目　录

第 1 章　随机事件与概率

概率论是研究随机现象及其统计规律性的一门数学学科，而数理统计则是一门以概率论为理论工具的，研究如何收集、整理、分析和推断具有随机性的数据资料的学科．概率论是数理统计的理论基础，而数理统计是概率论的应用，二者相辅相成，相得益彰．本章首先要学习的随机事件及其概率是概率论中最基本、最重要的概念之一．

1.1　随 机 事 件

1.1.1　随机现象

大千世界，气象万千．我们身处一个不断变化的现实世界中，每天都要和各种各样无法预料的事情打交道：明天是否会下雨；今天上学会不会迟到；周末环城路会不会堵车；买一张彩票能否中奖；本周云南白药股价是否上涨；……这些无法预知结果的问题充满了我们的周围，吸引我们去关注．称这类在一定条件下其结果不能确定的现象为随机现象．相应地，在一定条件下其结果可以完全确定的现象称为确定性现象，如太阳每天东升西落；春夏秋冬，周而复始；同种电荷相互排斥，异种电荷相互吸引；在平面上画一个三角形，其内角和一定等于 180°；纯水在一个标准大气压下加热到 100℃，水必然会沸腾……

随机现象在现实世界中广泛存在，这决定了对随机现象的研究具有重要的理论意义和实用价值．概率论就是研究随机现象及其规律性的一门数学学科．可能有人会问：既然随机现象的结果无法预知，它怎么会有规律呢？若有，其规律性又如何体现呢？

实际上，随机现象是有规律的，其规律是一种集体性规律，或者说，是一种统计规律，即对随机现象进行大量试验或观察后所呈现出来的某种稳定性质．例如，在相同条件下，连续抛掷一枚均匀硬币很多次，就会发现掷出正面和掷出反面的机会大致均等，或者说，“出现正面”和“出现反面”这两个结果出现的频率都稳定在 1/2 这个值附近．又如，全世界人口中男、女人数大致各占一半；在正常情况下，一个城市每天居民的用水量、用电量大致稳定．尽管从少量的随机现象中一般无法看出其规律，但随着试验或观察次数的增加就会发现，随机现象的这种统计规律是客观存在的，这正是概率论这门学科能够存在并不断发展的客观基础．

1.1.2　随机试验与样本空间

随机现象是概率论研究的对象．要获得对随机现象规律性的认识，必须要通过试验或观察来获取数据资料．有时研究者可以做试验主动地得到试验结果，如连续抛掷一枚硬币记录正面出现的次数；有时可以通过观察被动地得到数据，如观察记录一小时内通过某路口的车辆数，以下把试验或观察都称为试验．一般地，针对某种目的的一组条件的实现称为**试验**．概率论中所说的试验通常要求能够重复进行，由此才能探究其统计规律．

定义 1.1.1　具有以下三个特征的试验称为**随机试验**，记为 E：

(1) 可重复性：试验可以在相同条件下重复进行；

(2) 可界定性：每次试验的可能结果不止一个，但试验可能出现哪些结果是明确的；

(3) 不确定性：每次试验有且仅有一种结果出现，并且在试验之前无法预知哪个结果会出现．

设 ω 为随机试验 E 的一个可能出现的基本结果，称 ω 为 E 的一个样本点(或一个基本事件)，样本点的全体所成的集合 Ω 称为**样本空间**，记为 Ω，即 $\Omega=\{\omega\}$. 在每次试验中必有一个样本点出现且仅有一个样本点出现．在具体问题中，弄清楚 Ω 的构成是十分重要的．

例 1.1.1　以下几个试验均为随机试验：

(1) E_1：抛掷一枚硬币，观察其出现正面还是反面．记 $\omega_1=$“出现正面”，$\omega_2=$“出现反面”，则样本空间由两个样本点构成，即 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2\}$. 若用字母 H(head)和 T(tail)分别表示正面和反面，则可以直接记为 $\Omega=\{\mathrm{H},\mathrm{T}\}$.

(2) E_2：将抛掷一枚硬币两次视为一次试验，观察其出现正、反面的情况，则其样本空间为 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4\}$，其中这 4 个样本点分别表示 HH，HT，TH，TT 四种可能结果，也可以直接记为 $\Omega=\{\mathrm{HH},\mathrm{HT},\mathrm{TH},\mathrm{TT}\}$.

(3) E_3：抛掷一枚骰子，记录其出现的点数，则其样本空间为 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_6\}$，其中 $\omega_i(i=1,2,\cdots,6)$表示“出现 i 点”，也可以直接记为 $\Omega=\{1,2,\cdots,6\}$.

(4) E_4：记录某电话总机一天内接到的呼叫次数，则样本空间为 $\Omega=\{\omega_0,\omega_1,\omega_2,\cdots\}$，其中 $\omega_i(i=0,1,2,\cdots)$表示“接到 i 次呼叫”.

(5) E_5：从某种型号的一批电视机中任意抽出一台，测量其寿命 T，则其样本空间为 $\Omega=\{T:T\geqslant 0\}$.

需要注意的是，每一个随机试验都对应于一个样本空间 Ω，样本点的数目可以是有限的，如例 1.1.1(1)～(3)中的 Ω；也可以是无限的，如例 1.1.1(4)，(5)中的 Ω. 此时，分别称它们为有限样本空间和无限样本空间．

1.1.3　随机事件

通过试验研究随机现象的规律时，通常关心的是随机现象中可能出现也可能不出现的结果，这些结果称为**随机事件**，简称事件（event），通常用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示．例如，例 1.1.1 E_1 中的"出现正面"（即 ω_1），记为 A；E_3 中的"出现偶数点"，记为 B；E_5 中的"寿命大于 5000h"，记为 C；……一般的随机事件是由若干样本点共同组成的，如上述三个事件可分别表示为 $A=\{\omega_1\}$，$B=\{\omega_2,\omega_4,\omega_6\}$，$C=\{T:T>5000\}$．

从集合论的观点来看，随机事件是样本空间的一个子集．当且仅当事件 A 所含的一个样本点出现时称为**事件 A 出现**（或者说**事件 A 发生**）．样本点实际上是随机事件中特殊的一种，即只包含一个样本点的随机事件，故也称之为基本事件．样本空间 Ω 的最大子集（即 Ω 本身）称为必然事件，其最小子集（即空集 $\varnothing$）称为不可能事件．必然事件 Ω（不可能事件 $\varnothing$）在每次试验中都会出现（都不会出现）．严格来说，Ω 及 $\varnothing$ 实际上已经不具有随机性了，但通常把它们看成特殊的随机事件．

1.1.4　随机事件的表示

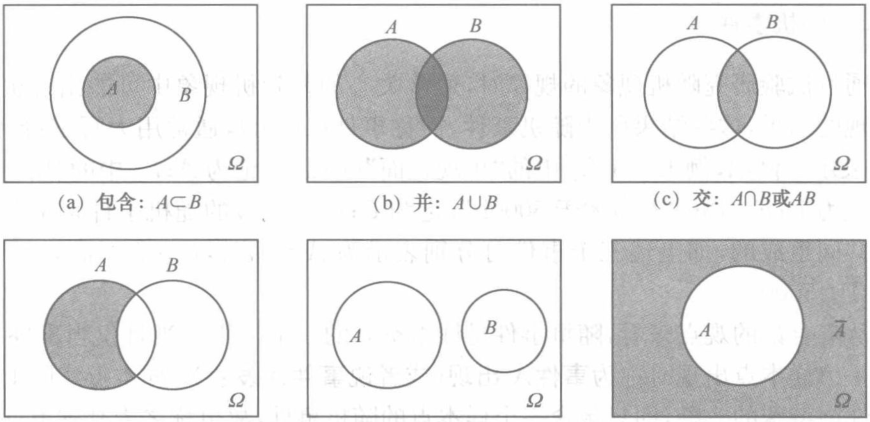
随机事件可以用不同的形式来描述，可以用文字语言叙述，如"买一张彩票中奖"；可以用数字，如"3"表示出现 3 点；还可以用符号或字母，如"+"或"H"均可表示"出现正面"等．但随机事件表示形式的多样性不方便进行理论研究，为此，在第 2 章中将引入随机变量来对随机事件进行统一的描述．这样做的主要目的是要借助微积分这一处理变量的有力工具来研究随机事件．粗略地说，随机变量就是用来表示随机现象结果的变量，常用大写字母 $X,Y,Z,\cdots$ 表示．随机变量根据出现的样本点 ω 的不同而取不同的值来表示随机事件．例如，用 X 表示掷一颗骰子出现的点数，则"$X=3$"就表示"出现 3 点"这一随机事件．事实上，任意随机事件 A 都可以用一个随机变量 X 来表示．例如，令

$$X=X(\omega)=\begin{cases}1, & \omega\in A,\\ 0, & \omega\notin A,\end{cases}$$

则容易看出"$X=1$"等价于事件 A 发生．讨论实际问题时，根据需要，可引入不同的随机变量．关于随机变量的进一步讨论详见第 2 章．

1.1.5　随机事件之间的关系及运算

讨论事件之间的关系及运算，其主要目的是想把复杂事件表示为简单事件的组合形式，希望通过对简单事件的了解去把握复杂的事件．由于随机事件可看成样本空间 Ω 的子集，因此，事件之间的关系及运算也就相当于集合之间的关系及运算．任意两个事件 A,B 的关系可用维恩（Venn）图表示如下，如图 1.1.1 所示．



(a) 包含：$A\subset B$　　(b) 并：$A\cup B$　　(c) 交：$A\cap B$或AB

(d) 差：$A-B$　　(e) 互不相容：$A\cap B=\varnothing$　　(f) 互逆：$\bar{A}=\Omega-A$

图 1.1.1　事件的关系

以下用 A,B,C,A_i,B_i 等表示随机事件．先引入几个关于事件关系的常用概念.

1. 事件的包含

若 A 发生必然导致 B 发生,即 A 中的每一个样本点都包含在 B 中,则称 A 包含于 B,记为 $A\subset B$,如图 1.1.1(a)所示．这时,也可以等价地说 B 包含 A,记为 $B\supset A$. 显然,对任意事件 A,有 $\varnothing\subset A\subset\Omega$.

特别地,当 $A\subset B$ 且 $B\supset A$ 时,称事件 A 与 B **相等**,记为 $A=B$.

2. 事件的并

“两事件 A 与 B 中至少有一个发生”也是一个事件,此事件由 A 与 B 的所有样本点构成,称为 A 与 B 的并,记为 $A\cup B$,如图 1.1.1(b)所示．若并事件 $A\cup B$ 发生,那么或 A 发生,或 B 发生,当然也可能 A 与 B 同时发生．

可将并的概念推广到有限个事件以及可数多个事件的情形．称事件“$A_1,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生”为 n 个事件 $A_1,\cdots,A_n$ 的并,记为 $A_1\cup\cdots\cup A_n$ 或 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$,进一步,称事件“$A_1,A_2,\cdots$中至少有一个发生”为可数多个事件 $A_1,A_2\cdots$的并,记为 $A_1\cup A_2\cup,\cdots$或 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$.

3. 事件的交

“两事件 A 与 B 同时发生”也是一个事件,此事件由 A 与 B 的公共的样本点构成,称为 A 与 B 的交,记为 $A\cap B$,或简记为 AB,如图 1.1.1(c).

同上,可将交的概念推广.称事件“$A_1,\cdots,A_n$ 同时发生”为 n 个事件 $A_1,\cdots,A_n$ 的交,记为 $A_1\cap\cdots\cap A_n$ 或 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$,也常常记为 $A_1A_2\cdots A_n$. 进一步,称事件“$A_1,A_2,\cdots$同时发生”为可数多个事件 $A_1,A_2,\cdots$的交,记为 $A_1\cap A_2\cap\cdots$或 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$.

4. *事件的差*

“A 发生而 B 不发生”也是一个事件,此事件由 A 中不包含于 B 内的所有样本点构成,称为 A 与 B 的差,记为 $A-B$,如图 1.1.1(d)所示.

根据具体情况,常常需要灵活地使用如下并事件的不同表达形式:

$$\begin{aligned}A\cup B&=A\cup(B-A)=A\cup(B-AB)=B\cup(A-B)\\&=B\cup(A-AB)=(A-B)\cup AB\cup(B-A).\end{aligned}$$

5. *互不相容*

若事件 A 与 B 不能同时发生,则称 A 与 B 互不相容,或称 A 与 B 互斥.易见

$$A\text{ 与 }B\text{ 互斥}\Leftrightarrow AB=\varnothing,$$

如图 1.1.1(e)所示.

6. *互逆*

若两事件 A 与 B 同时满足如下条件:$A\cup B=\Omega$ 且 $AB=\varnothing$,也就是说,事件 A 与 B 必发生其一,但 A 与 B 又不能同时发生,则称 A 与 B 互为逆事件(或对立事件),简称 A 与 B 互逆.若记 A 的逆事件为 $\overline{A}$,则 $\overline{A}=B$. 实际上,$\overline{A}=\Omega-A=B$. 同理,$\overline{B}=\Omega-B=A$,如图 1.1.1(f)所示.

一般地,对任意两个事件 A 与 B 有 $A\overline{B}=A-B$,这由上面的维恩图容易看出.

例 1.1.2　袋中装有 10 个相同的小球,标号分别为 $1,2,\cdots,10$. 从袋中任意取出一球,用 $i(i=1,2,\cdots,10)$表示基本事件“取到 i 号球”,记 $A=$“取到 3 号球”$=\{3\}$,$B=$“取到奇号球”$=\{1,3,5,7,9\}$,$C=$“取到偶号球”$=\{2,4,6,8,10\}$,$D=\{1,5,7,9\}$,则有 $A\subset B$,$A\cup B=B$,$AB=A$,$B-A=\{1,5,7,9\}=D$,$B=A\cup D$,A 与 C 互斥,即 $AC=\varnothing$,$A\cup C=\{2,3,4,6,8,10\}$,B 与 C 互逆,$A\cup B\cup C=\Omega\cdots\cdots$

注 1.1.1　A 与 B 互逆可以推出 A 与 B 互斥,但反之未必成立.例如,在例 1.1.2 中,A 与 C 互斥,但 A 与 C 并不互逆.

7. *事件的运算法则*

由集合的运算性质可知,事件之间的运算满足如下运算规律:

(1) **交换律**:$A\cup B=B\cup A$,$AB=BA$;

(2) **结合律**:$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$,$(AB)C=A(BC)$;

(3) **分配律**:$A(B\cup C)=AB\cup AC$,$A\cup(BC)=(A\cup B)(A\cup C)$;

(4) **对偶律**:$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$,$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$;$\overline{\bigcup A_i}=\bigcap\overline{A_i}$,$\overline{\bigcap A_i}=\bigcup\overline{A_i}$.

对偶律也称为德摩根公式,其中 A_i 的下标 i 可以取值于有限指标集、可数指标集,甚至任意指标集．对偶律可以这样来记忆:并的逆=逆的交,再反过来念:交的逆=逆的并．

事件的这些运算规律的证明与集合的运算规律的证明完全一致,均是先证明左边事件(集合)包含于右边事件(集合),再证明右边事件(集合)包含于左边事件(集合),从而得到等号两边的事件(集合)相等．证明留作思考题．

1.1.6 用简单事件表示复杂事件

在实际中碰到的事件多为较为复杂的事件,往往需要用一些简单事件来表示它们,以便对其进行讨论．

例 1.1.3 一射手对目标连续射击三次,记 A_i="第 i 次射击命中目标"($i=1,2,3$),则可用简单事件 A_1,A_2,A_3 来表示下列复杂事件:

(1) 事件"至少命中目标一次"可表示为 $A_1\cup A_2\cup A_3$．

(2) 事件"只有第二次射击命中目标"可表示为 $\overline{A}_1A_2\overline{A}_3$.

(3) 事件"恰好命中目标一次"可表示为$(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3)\cup(\overline{A}_1A_2\overline{A}_3)\cup(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)$.

(4) 事件"前两次射击中至少命中目标一次"可表示为 $A_1\cup A_2$．

事实上,本事件由 6 个样本点构成,由分配律有

$$\begin{aligned}&(A_1\overline{A}_2A_3)\cup(\overline{A}_1A_2A_3)\cup(A_1A_2A_3)\cup(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3)\cup(\overline{A}_1A_2\overline{A}_3)\cup(A_1A_2\overline{A}_3)\\&=[(A_1\overline{A}_2\cup\overline{A}_1A_2\cup A_1A_2)A_3]\cup[(A_1\overline{A}_2\cup\overline{A}_1A_2\cup A_1A_2)\overline{A}_3]\\&=[(A_1\cup A_2)A_3]\cup[(A_1\cup A_2)\overline{A}_3]=(A_1\cup A_2)(A_3\cup\overline{A}_3)\\&=(A_1\cup A_2)\Omega=A_1\cup A_2.\end{aligned}$$

(5) 事件"至少命中目标两次"可表示为$(A_1A_2)\cup(A_1A_3)\cup(A_2A_3)$.

(6) 事件"恰好命中目标两次"可表示为$(A_1A_2\overline{A}_3)\cup(A_1\overline{A}_2A_3)\cup(\overline{A}_1A_2A_3)$.

(7) 事件"至多命中目标两次"可表示为$\overline{A_1A_2A_3}$.

(8) 事件"至少有一次未命中目标"可表示为 $\overline{A}_1\cup\overline{A}_2\cup\overline{A}_3$.

注 1.1.2 用简单事件来表示复杂事件,其方法和形式通常不唯一．例如,在例 1.1.3 中,(7)和(8)的两个事件实际上是同一个事件,这由事件的对偶律容易看出．读者在解决实际问题时,往往根据需要选择一种适当的表示方法．

1.1.7 事件域简介

我们已经知道,随机事件是样本空间 Ω 的一个子集．现在反过来问,Ω 的任意一个子集是否一定是随机事件呢? 回答是否定的．对一个随机事件,人们最关心

的是其发生的可能性的大小，它可以用一个数量指标（即后面要定义的概率）来刻画．能对应于这样一个发生可能性大小指标的 Ω 的子集才是我们感兴趣的随机事件，或者说，样本空间 Ω 中那些能定义概率的子集才能看成随机事件．没有必要把 Ω 的一切子集都看成随机事件，事实上这也做不到，因为 Ω 中确实存在无法定义概率的子集，这种情形和实轴的有限区间内可以找出不能测量其长度的子集相类似．对于 Ω 中那些能定义概率的子集，根据基本的运算需求，还应该要求这些子集的有限或者可列个成员的并、交以及子集的差、逆等仍然可以定义概率．Ω 中满足这些要求的子集的全体构成 Ω 的一个子集族 F，称为事件域，也叫做 σ 代数．以后讨论的任意一个随机事件都是事件域 F 中的某个成员．

习　题　1.1

1. 将一枚均匀硬币连抛三次，若用 H 和 T 分别表示“出现正面”和“出现反面”，试写出该随机试验的样本空间，并用样本点表示事件 A=“恰好出现一次正面”，B=“至多出现一次正面”，C=“至少出现两次正面”.

2. 顺序抛掷两颗均匀骰子观察出现的点数．

(1) 写出该随机试验的样本空间；

(2) 用样本点表示事件 A=“点数和不小于 10”，B=“点数和为偶数”.

3. 化简下列各式：

(1) $(A\cup B)(B\cup C)$；

(2) $(A\cup B)(A\cup\overline{B})$；

(3) $(\overline{A}\overline{B}\overline{C})\cup(A\overline{B}\overline{C})\cup(\overline{A}B\overline{C})\cup(\overline{A}\overline{B}C)\cup(AB\overline{C})\cup(A\overline{B}C)\cup(\overline{A}BC)$.

4. 证明

$$A-BC=(A-B)\cup(A-C).$$

5. 说明两个事件 A,B 都不发生与不都发生的区别，并用维恩图表示出来．

6. 三个事件 A,B,C 互不相容与 $ABC=\varnothing$ 是否是一回事？为什么？

1.2　统计概率、古典概率及几何概率

随机事件发生的可能性有大有小．例如，从一批质量好的产品中任取一件，“取到不合格品”的可能性较小；对高水平的篮球运动员来说，“罚球命中”的可能性就大；抛掷一枚骰子，“出现 3 点”比“出现奇数点”的可能性小，因为前者只是后者的特例；说某人通过考试的把握有八九成，意即这个人“考试及格”的可能性较大，达到 80%～90%. 需要用一个数量指标来刻画随机事件发生的可能性的大小．在实际生活中，人们往往用百分比（即介于 0 和 1 之间的一个实数）来度量这个指标，这个指标通常记为 $P(A)$，称为随机事件 A 发生的**概率**．

然而,对于一个给定的事件 A,到底应该用哪个数量指标来作为它的概率呢?这决定于讨论具体问题时所采用的随机试验 E 和事件 A 的特殊性．在概率论发展的历史上,曾先后出现过概率的古典定义、几何定义和统计定义．这些定义各适合一类随机现象,也各自有一定的局限性．为了克服这些局限性,德国数学家希尔伯特(Hilbert,1862—1943)在 1900 年的数学家大会上倡议要建立概率的公理化体系．经过很多学者的努力,最后由苏联数学家柯尔莫哥洛夫 kolmogorov (1903—1987)集前人之大成,他在测度论的基础上,于 1933 年首次提出了概率的公理化定义．这个定义既概括了历史上几种概率定义的共同特性,又避免了它们各自的局限性和含混之处．概率的公理化定义一经提出,就很快获得举世公认,这是概率论发展史上的一个里程碑式的大事件．自此以后,概率论得到了迅速的发展.

1.2.1　统计概率

随机事件发生的可能性大小是客观存在的,重要问题是如何用一个合理的数量指标来刻画它．设 E 为任一随机试验,A 为其中任一事件,在相同的条件下,把 E 独立地重复做 n 次,以 $\mu_n(A)$表示事件 A 在这 n 次试验中出现的次数(也称频数),则比值 $f_n(A)=\mu_n(A)/n$ 称为事件 A 发生的**频率**．通过大量长期的实践,人们发现当试验次数不断增加时,事件 A 发生的频率 $f_n(A)$稳定在某个常数 p 附近,以 p 为中心左右摆动,即事件 A 发生的频率随着试验次数的增加表现出一种稳定性,这是一个不依赖于任何主观意愿的客观事实．

历史上,有不少人做过著名的投币试验．抛掷一枚均匀硬币很多次,记录正面向上的次数和频率(陈家鼎等,2007),如表 1.2.1 所示．从表中容易看出,事件"正面向上"的频率稳定在常数 0.5 附近．

表 1.2.1　历史上著名的抛掷硬币试验的记录资料

实验者	投币次数	正面向上的次数	频率
蒲丰	4040	2048	0.5069
皮尔逊	12000	6019	0.5016
维尼	30000	14994	0.4998

又如,英文文献中各个字母的使用频率也相当稳定．表 1.2.2 给出了英文字母和空格使用频率的统计表(Brillouin,1956).

表 1.2.2　英文字母和空格的使用频率统计

字母	空格	E	T	O	…	Q	Z
频率	0.2	0.105	0.072	0.065	…	0.001	0.001

大量事实表明，当试验次数逐渐增大时，事件 A 发生的频率 $f_n(A)$ 稳定在某个常数 p 附近，称 p 为**频率的稳定值**．这种频率的稳定性即通常所说的统计规律性，因此，用频率的稳定值来表征事件发生的可能性大小是合理的，由此可得如下定义：

定义 1.2.1　设 E 为随机试验，A 为其中任一事件，当试验次数 n 充分大时，事件 A 发生的频率 $f_n(A)$ 稳定在某个常数 p 附近，则称 p 为事件 A 发生的统计概率，记为 $P(A)=p$.

频率的稳定性意义重大．一方面，它能适当地反映出 A 发生的可能性大小．在许多实际问题中，当概率不易求出时，可以取频率作为概率的近似值．另一方面，频率的概念比较简单，容易掌握，常常可以由频率的性质去推测概率的性质．例如，由频率的定义有 $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$，$f_n(\Omega)=1$，$f_n(\varnothing)=0$，于是可以推知统计概率 $P(A)$ 也满足性质 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$，$P(\Omega)=1$，$P(\varnothing)=0$.

注 1.2.1　不能按微积分中数列的极限概念来理解概率的统计定义．也就是说，不能认为 $P(A)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(A)$．只能在一定概率意义下证明 $f_n(A)$ 趋近于 $P(A)$，在 4.4 节中将会利用大数定律给出这一事实的严格证明．

例 1.2.1　抛掷硬币试验可以在 Excel 中进行模拟．在安装 Office 时选择“完全安装”，就可以把模拟抛掷硬币试验需要的“分析工具库”装入 Excel 中，然后在打开的 Excel 界面中依次点击【工具】/【加载宏】/【分析工具库】/【确定】，此时就可以在 Excel 主菜单的【工具】栏下看到【数据分析】这个子菜单．依次点击【工具】/【数据分析】/【随机数发生器】，出现“随机数发生器”对话框，如图 1.2.1 所示．按图中所示，输入相应选项，其中的“伯努利”分布也称为“0-1”分布，它按照输入的概率 $P(A)=0.5$ 产生“1”，按照概率 $1-P(A)=0.5$ 产生“0”，因此，可以把“1”理解

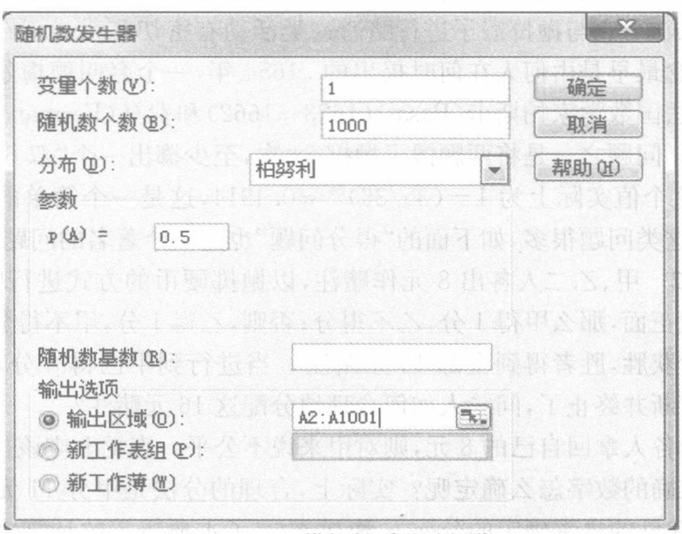


图 1.2.1　模拟投币试验操作