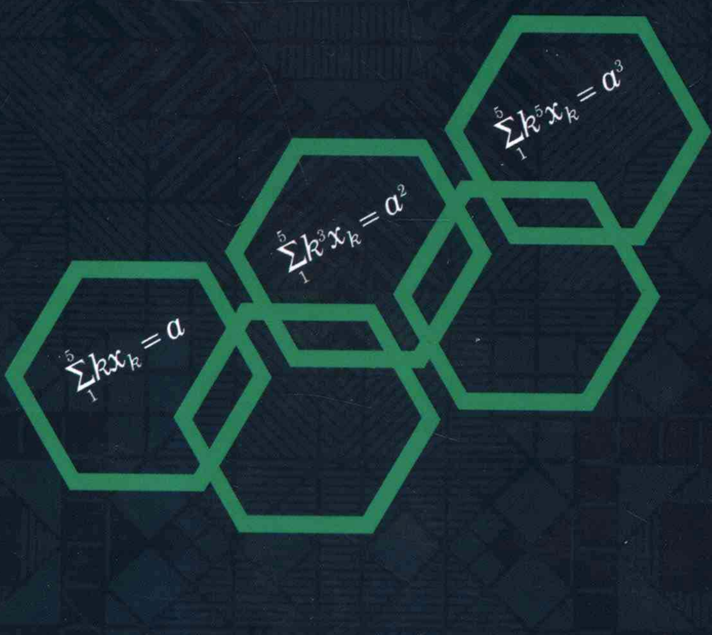
Solutions of Former Soviet Union Collegiate Math Olympic (I)

前苏联大学生数学奥林匹克竞赛题解（上编）

许康 陈强 陈挚 陈娟 编译



哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

Solutions of Former Soviet Union Collegiate Math Olympic (I)

前苏联大学生数学奥林匹克竞赛题解（上编）

许康 陈强 陈挚 陈娟 编译

哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书上编根据(前苏联)科学出版社 1978 年推出的 B · A · 萨多夫尼奇等编写的《大学生数学奥林匹克竞赛题集》译出,含 560 道题,半数有解答。

由于涉及各种层次的竞赛题,因此书中题目难度波动较大,有相对简单的问题,也有相当令人费解的难题,读者不妨依个人情况自选章节择题解读。

本书适合大学师生参考阅读。

图书在版编目(CIP)数据

前苏联大学生数学奥林匹克竞赛题解. 上编/许康等编译. —哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2012.4

ISBN 978-7-5603-3563-6

Ⅰ. ①前… Ⅱ. ①许… Ⅲ. ①高等数学-竞赛题-题解 Ⅳ. ①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 056084 号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 王勇钢
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传 真 0451-86414749
网 址 http://hitpress.hit.edu.cn
印 刷 哈尔滨市石桥印务有限公司
开 本 787mm×1092mm 1/16 印张 10.25 字数 200 千字
版 次 2012 年 4 月第 1 版 2012 年 4 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-3563-6
定 价 28.00 元

上编原序

近年来作为活跃大学生科学创造力的方式之一，大学数学奥林匹克竞赛得到广泛的开展。由于这种竞赛题目的拟制具有智巧性的特点，以致它要求学生不仅要牢固掌握教学大纲上所规定的必要知识，而且在方法上要有所发现、有所创造。一般说来，试题多以简易的形式阐述某个深邃的数学思想。

同时，虽说在数学竞赛方面已经拥有各种丰富的参考资料，但迄今还没有一本较为全面而又通俗的数学奥林匹克竞赛试题集问世。

因之，我们向读者提供的这本试题集，在某种程度上可以填补上述空白。本书是以下列各种试题为基础编写的：各所国立高等院校的数学奥赛试题（初赛），莫斯科市大学生数学奥赛（复赛）试题，全苏联"大学和科学技术进步"数学奥赛试题，国际大学生数学奥赛的某些试题，以及莫斯科大学数学力学系的数学竞赛试题与口试题。

我们认为：本题集对于广大读者，首先是各类高等院校的大学生、研究生、教师，高年级中学生、中学教师以及所有的数学爱好者，都将有所裨益。

第一部分第一章是由莫斯科各高等学校数学奥林匹克竞赛试题整理而成的。凡单号题大都附有完整解法或详尽提示；而双号试题则未作解，建议读者自行解算。

第一部分第二章由全苏联数学奥林匹克竞赛试题整理而成。这种竞赛将参赛大学分组,并按学生年级高低分场比赛。有关情况可见各题题号后的圆括号内文字说明。本章全部试题都附有解法。

最后,我们将一些颇有趣味而又不繁复的大学赛题、国际数学奥林匹克赛题、面试题等,整理成第三章。这章同样给单号题附上解答。

第一、三两章的题目,我们大体上按其学科分支归类及由浅入深的顺序适当编排。

我们对举办高等学校数学奥林匹克竞赛的所有单位,筹办一系列城市与全苏联数学奥林匹克竞赛的莫斯科大学力学-数学系全体成员及数学奥赛的各位参与者表示深切的谢意。

此外,莫斯科大学教授Ю·A·卡吉明,副教授A·B·米哈辽夫,Ю·B·涅斯捷连柯对许多试题的条件和解法进行了有益的讨论,数学奥赛的多次优胜者——莫斯科大学力学-数学系学生C·阔尼亚金参加了本书编写计划的讨论。我们对此尤为申谢。

B·A·萨多夫尼奇

A·C·波德阔尔金

目录

第一部分
问　　题

第一章 莫斯科各高等学校数学奥林匹克竞赛试题(初赛)

单 数 题

§1 数学分析

一、图形

1.(轻工,1977) 求作函数 $y=\lim\limits_{n\to\infty}\sin^{2n}x$ 的图形.

3.(自动化,1977) 求作函数

$$f(x)=\begin{cases}|x|^{\frac{1}{|x|}} & 当 x\neq 0 时\\ 1 & 当 x=0 时\end{cases}$$

的图形.

5.(经济统计,1975) 求作函数 $y=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}$ 的图形.

7.(机制,1977) 求作函数 $y=\cos(2\arccos x)$ 的图形.

9.(自动化,1975) 求作函数 $y=\lim\limits_{n\to\infty}(x-1)\arctan x^n$ 的图形.

11.(经济,1976) 求作函数 $y=x^x(x>0)$ 的图形.

13.(电讯,1977) 求作方程 $x^3+y^3-3xy=0$ 所表示的曲线.

二、多项式

15.(自动化,1975) 试求一个次数最低的多项式,使得当 $x=1$ 时有最大值6,而当 $x=3$ 时有最小值2.

17.(经济,1975) 试证一切具有正系数的非零多项式如果是偶函数,则处处向上凹且仅有一个极值点.

19.(机制,1976) 试证任何整系数多项式 $p(x)$ 不可能满足等式:$p(7)=5$,$p(15)=9$.

21.(师范,1976) 设 $p(x)$ 为整系数多项式,在五个整点其值均为5,求证 $p(x)$ 没有整根.

23.(数力,1976) 系数属于域 P 的多项式

$$p(z)=z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n$$

若它可以表为

$$p(z)=(b_0z+b_1)(c_0z^{n-1}+\cdots)\quad(b_0\neq 0)$$

这里 $c_i,b_i\in P$,则称之为 P 上的线性导出式. 试求 Z_2 上的 n 次多

项式 $p(z)$ 恰为 Z_2 上的线性导出式的概率 q_n，并求$\lim\limits_{n\to\infty}q_n$.

25. 设 $p(x)$ 为 n 次多项式且 $p(a)\geqslant 0$, $p'(a)\geqslant 0,\cdots$, $p^{n-1}(a)\geqslant 0, p^{(n)}(a)>0$，求证方程 $p(x)=0$ 的实根不超过 a.

27.（石油化工，1976） 试证：若实系数多项式 $p(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$ 的根都是实数，则它的各阶导数 $p'(x)$，$p''(x),\cdots,p^{(n-1)}(x)$ 也只有实根. $(a_0\neq 0)$

29.（电机，1975） 若 $c_0+\dfrac{c_1}{2}+\cdots+\dfrac{c_n}{n+1}=0$，求证：多项式 $c_0+c_1x+\cdots+c_nx^n$ 至少有一个实根.

31.（数力，1977） 设 $p_1(x),\cdots,p_r(x)$ 分别为 $n_1,\cdots,n_r$ 次多项式，试证：如果 $n_1+\cdots+n_r<\dfrac{r(r-1)}{2}$，则多项式 $p_1,\cdots,p_r$ 线性相关.

33.（电讯，1976） 试证：如果多项式 $p(z)=a_0z^n+\cdots+a_n$ 的根都在上半平面，那么它的一阶导数的根也都在上半平面.

35.（物理技术，1977） 求证：多项式 $\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{(2x-x^2)^k-2x^k}{k}$ 为 x^{n+1} 所整除.

37.（数力，1977） $p(x)=c_nx^n+\cdots+c_0$ 是实系数多项式，其中 $c_p=0(1\leqslant p\leqslant n-1)$，且当 $i\neq p$ 时 $c_i\neq 0$，试证：若 $p(x)$ 有 n 个不同的实根，则 $c_{p-1}\cdot c_{p+1}<0$.

39.（数力，1975） 设 $f(x)$ 是任意复系数多项式，试证：存在那样的常数 c，使得对于任何整系数多项式 $p(x)$，多项式 $f(p(x))$ 的各个整根不大于 $\deg p+c$，这里 $\deg p$ 是多项式 $p(x)$ 的次数.

三、序列与极限

41.（电讯，1977） 已知：$S_1=\sqrt{2}, S_{n+1}=\sqrt{2+S_n}$，求证：数列 $\{S_n\}$ 有极限，并求这个极限.

43.（经济，1975） 试证数列 $2,2+\dfrac{1}{2},2+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2}},\cdots$ 有极限，并求这个极限.

45.（航空工艺，1977） 线段 AB 为已知，点列 $\{M_n\}$ 依下述方式组成：$M_1=A, M_2=B$，而每个 M_{n+1} 是联结点 M_{n-1} 和 M_n 的线段的中点. 问点列 $\{M_n\}$ 趋于线段 AB 上的哪一点？

47.（公路，1976）求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{1\times 2\times 3}+\frac{1}{2\times 3\times 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}\right)$$

49.（友谊，1976） n 为自然数，$\lim\limits_{n\to\infty}\sin n$ 存在吗？

51.(钢铁,1976) 计算

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{\frac{1}{n}}}{n+1}+\frac{2^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{2^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{n}}\right)$$

53.(航空,1977) 当 a,b 为怎样的实数值时,数列:$x_0=a$, $x_1=1+bx_0,\cdots,x_{n+1}=1+bx_n,\cdots$ 收敛?

55.(数力,1975) 数列$\{x_n\}(n=1,2,\cdots)$依下列方式构成:$x_1=x$(区间$[0,1]$ 上的某点);如果 $n\geqslant 2$,则当 n 为偶数时 $x_n=\frac{1}{2}x_{n-1}$;当 n 为奇数时,$x_n=\frac{1+x_{n-1}}{2}$. 问这数列可能有多少个极限点?

57.(电力技术,1975) 计算

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^3-1}{2^3+1}\times\frac{3^3-1}{3^3+1}\times\cdots\times\frac{n^3-1}{n^3+1}\right)$$

59.(动力,1975) 数列由递推公式 $U_1=b,U_{n+1}=U_n^2+(1-2a)U_n+a^2(n\geqslant 1)$ 所确定. 当 a,b 为怎样的值时数列$\{U_n\}$收敛?极限等于什么?

61.(技术,1975) 求证:数列

$$x_0>0,x_{n+1}=\frac{x_n(x_n^2+3a)}{3x_n^2+a}\quad(a\geqslant 0)$$

的极限存在,并求此极限.

63.(动力,1977) 设 $a_1=1,a_k=k(a_{k-1}+1)$,求

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{a_k}\right)$$

65.(航空,1976) 设数列$\{x_n\}$的 $x_0=25,x_n=\arctan x_{n-1}$,求证:它有极限,并求此极限.

67.(钢铁,1975) 求数列 $y_1=x,y_{n+1}=a\sin y_n(n\geqslant 1)$ 的极限,其中 $|a|\leqslant\frac{\pi}{2}$,而 x 是实数.

69. 求$\lim\limits_{n\to\infty}n\sin(2\pi en!)$.

71.(物理技术,1977) 数列$\{x_n\}$由递推公式:$x_n=\sin x_{n-1}(n=2,3,\cdots)$给定;$x_1$ 是区间$(0,\pi)$内任意数,求证:当 $n\to\infty$ 时,$x_n\sim\sqrt{\frac{3}{n}}$.

73.(物理技术,1976) 设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$,求证:数列 $z_n=\frac{x_1y_n+x_2y_{n-1}+\cdots+x_ny_1}{n}$ 收敛于 ab.

75.(电机,1976) 在三角形的三边上写三个数 $a_1^{(1)},a_2^{(1)}$, $a_3^{(1)}$,然后擦掉这些数,每边换上刚才另外两边的算术平均数(即

换 $a_1^{(1)}$ 为 $a_1^{(2)}=\frac{a_2^{(1)}+a_3^{(1)}}{2}$,换 $a_2^{(1)}$ 为 $a_2^{(2)}=\frac{a_1^{(1)}+a_3^{(1)}}{2}$,换 $a_3^{(1)}$ 为 $a_3^{(2)}=\frac{a_1^{(1)}+a_2^{(1)}}{2}$),以后仿此办法继续进行. 求证:$\lim\limits_{n\to\infty}a_i^{(n)}(i=1,2,3)$ 存在且等于$\frac{a_1^{(1)}+a_2^{(1)}+a_3^{(1)}}{3}$.

77.(数力,1977) 设 $a_1,a_2,\cdots$ 为不小于 2 的各不相等的自然数,求证:从中可选出数列 $a_{i_1},a_{i_2},\cdots$ 满足关系 $a_{i_k}>i_k$.

79. 已知正数序列 $\{a_{jk}\}(j,k=1,2,\cdots)$,设对于任何 j 有 $\lim\limits_{k\to\infty}a_{jk}=+\infty$,求证:存在那样的数列 $\{b_k\}(k=1,2,\cdots)$ 满足 $\lim\limits_{k\to\infty}b_k=+\infty,\lim\limits_{k\to\infty}\frac{b_k}{a_{jk}}=0\ (j=1,2,\cdots)$.

81.(友谊,1977) 求极限

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k^3+6k^2+11k+5}{(k+3)!}$$

83.(铁运,1977) 设 $[x]$ 为不超过 x 的最大整数,而 $\{x\}=x-[x]$,求 $\lim\limits_{n\to\infty}|(2+\sqrt{3})^n|$.

85.(工业经济,1975) 数列 $\{x_n\}$ 对于所有的 m 和 n 满足条件 $0\leqslant x_{m+n}\leqslant x_n+x_m$,求证:数列 $\left\{\frac{x_n}{n}\right\}$ 收敛.

87.(数力,1976) 求证

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+n+\frac{n^2}{2!}+\cdots+\frac{n^n}{n!}\right)e^{-n}=\frac{1}{2}$$

四、连续性

89.(食品,1977) 举出函数的例子,它在除了 $x=0,\pm1,\pm2,\pm\frac{1}{2},\pm3,\pm\frac{1}{3},\cdots,\pm n,\pm\frac{1}{n},\cdots$ 以外的所有 x 的实数值处连续,而上列各点是它的无穷间断点.

91.(电机,1977) 函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上一致连续. 可以断定极限 $\lim\limits_{x\to+0}f(x)$,$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在吗?

93.(铁运,1976) 在区间 $[0,1]$ 的每点取有限值,但在这区间的任何点的任何邻域无界的函数存在吗?

95.(友谊,1976) 函数 $f(x,y)$ 分别关于 x 和 y 连续,且关于 y 单调,试证这函数是 x,y 的二元连续函数.

97.(经济,1976) 函数 $f(x)$ 在圆上有定义且连续,试证可在直径上找到对称于圆心的两点 a 和 b,使 $f(a)=f(b)$.

99.(化工机械,1976) 求 $\lim\limits_{x\to0}\sqrt[1-\cos x]{1+x^2e^x}$.

101. (航空,1976)　求极限

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{1-e^{-x}}-\sqrt{1-\cos x}}{\sqrt{\sin x}}$$

103. (经济统计,1977)　试确定下列等式中的 λ 和 μ

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt[3]{1-x^3}-\lambda x-\mu)=0$$

105. (电子技术,1977)　计算

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(\tan x)-\sin(\sin x)}{\tan x-\sin x}$$

107. (工业经济,1975)　函数 $f(x)$ 在半轴 $[0,+\infty)$ 上有定义且一致连续,又知对任何 $x\geqslant 0$,有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x+n)=0$($n$ 为整数),求证:$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

109. (电机,1976)　设 A 是所有在区间 $[a,b]$ 上连续的函数的环,$I\subset A$ 是 A 的真理想子环,试证:若 $f_1,\cdots,f_n\in I$,则存在点 $x_0\in[a,b]$,使 $f_i(x_0)=0$,对于每个 $i(i=1,2,\cdots,n)$ 成立.

111. (师范,1975)　是否存在定义在区间 $[0,1]$ 上的实连续函数,使得 $[0,1]$ 上的每一个值都是点的某个连续统内的各点所对应的函数值?

113. (数力,1976)　设 E 是区间 $[0,1]$ 的闭子集,而 $f(x)$ 是 E 上的实连续函数,试证:它可以补充定义到区间 $[0,1]$ 上其余所有的点,并且它仍然在 E 上连续.

五、微分

115. (食品,1977)　小艇在静水中行驶时阻力与运动速度成正比.一摩托艇当发动机停转时速度为200 m/min,而 $\frac{1}{2}$ min后,速度为 100 m/min,那么,发动机停转后两分钟它的速度是多少?

117. (机制,1976)　设 $f(x)=\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\frac{\sin 7x}{7}$,求证:$f'\left(\frac{\pi}{9}\right)=\frac{1}{2}$.

119. (机制,1977)　求函数 $y=x^2\cos 2x$ 在 $x=0$ 的十阶导数值.

121. (钢铁,1976)　设当 $x>0$ 时,$f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$,试证:当 $x\to 0^+$ 时,$f(x)=e+Ax+Bx^2+o(x^2)$,并求 A 和 B.

123. (建筑,1977)　设 $f(x)$ 是在 $(-\infty,+\infty)$ 上可微的奇函数.

a) 求证:$f'(x)$ 是偶函数;b) 逆命题正确吗?

125. (建筑,1977)　设 $f(x)$ 是二阶连续可微的偶函数,$f''(0)\neq 0$,求证:点 $x=0$ 是这函数的极值点.

127.(钢铁,1975) 设函数$f(x)$在区间$[0,1]$上可微,且$f'(0)f'(1)<0$,试证:在区间$(0,1)$内可找到点c,使$f'(c)=0$.

129. 函数$f(x)$在半轴$(0,+\infty)$上有一阶连续导数,$f(0)=1$,$|f(x)|\leqslant e^{-x}(x\geqslant 0)$,试证:存在那样的点$x_0$,使$f'(x_0)=-e^{-x_0}$.

131.(友谊,1976) 设函数$f(x)$在区间$[x_1,x_2]$,$0<x_1<x_2$可微,求证$\frac{1}{x_2-x_1}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ f(x_1) & f(x_2)\end{vmatrix}=f(\xi)-\xi f'(\xi)$,其中$\xi\in(x_1,x_2)$.

133.(经济统计,1977) 函数$\varphi(x)$可微且满足条件$\varphi'(x)=F[\varphi(x)]$.这里$F(x)$具有各阶导数,试证:函数$\varphi(x)$也具有各阶导数.

135.(工程建筑,1977) 已知$y=f(x)$有斜渐近线且$f''(x)>0$,试证函数$y=f(x)$的图象是从这条渐近线的上方趋近于它.

137.(机制,1976) 如果对于任何a与b,$f(\frac{a+b}{2})\geqslant\frac{1}{2}(f(a)+f(b))$,则连续函数$f(x)$称为凸函数.试证:若$f(x)$是凸函数,则:

a) $f(\frac{a_1+\cdots+a_n}{n})\geqslant\frac{1}{n}(f(a_1)+\cdots+f(a_n))$;

b) $f(\sum\limits_{i=1}^{n}p_ia_i)\geqslant\sum\limits_{i=1}^{n}p_if(a_i)$,这里$p_i>0$,$\sum\limits_{i=1}^{n}p_i=1$.

139.(计算,1976) 设函数$f:(a,b)\to\mathbf{R}$连续可微,又设对于(a,b)中的任何x与y,存在唯一的点z,有

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}=f'(z)$$

求证:$f(x)$是严格凸函数或严格凹函数.

141.(电子,1976) 设$f(x)$是$(-\infty,+\infty)$上无限次可微函数,且:

a) 存在$L>0$,$|f^{(n)}(x)|\leqslant L$对于所有$x\in(-\infty,+\infty)$及$n\in\mathbf{N}$成立.

b) $f(\frac{1}{n})=0$,$n=1,2,3,\cdots$

求证:$f(x)\equiv 0$.

143.(电子技术,1976),设

$$\varphi(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0\end{cases}$$

且函数$f(x)$在$x=0$可微,试证:函数$f(\varphi(x))$在$x=0$有等于0的导数.

145.(铁运,1976)　函数

$$f(x)=\begin{cases}x^k\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

在 $x=0$ 是几阶可微？而它在 $x=0$ 是几阶连续可微？

147.(电子技术,1977)　设 $f(x)$ 二阶可微, $f(0)=f(1)=0$, 且 $\min\limits_{x\in[0,1]}f(x)=-1$. 运用泰勒公式证明 $\max\limits_{x\in[0,1]}f''(x)\geqslant 8$.

149.(物理技术,1976)　汽车从 A 站开动到 B 站停止,两站间距离为 S,经过的时间为 T,求证:这汽车在某个时刻的加速度的绝对值不小于 $\frac{4S}{T^2}$.

151.(物理技术,1976)　设 $f(x)$ 在区间 $(-a,a)$ 无限次可微,而序列 $f^{(n)}(x)$ 在 $(-a,a)$ 上一致收敛, $\lim\limits_{n\to\infty}f^{(n)}(0)=1$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}f^{(n)}(x)$.

153.(计算,1976)　设 $f(x)$ 是无限次可微函数,它将区间 $[0,+\infty)$ 映射为 $(0,1]$,又 $(-1)^kf^{(k)}(x)\geqslant 0$,对于 $k=0,1,\cdots$, $x\in[0,+\infty)$ 成立. 而 $g(x)=\dfrac{1-f(x)}{x}$. 求证 $(-1)^kg^{(k)}(x)\geqslant 0$.

155.(友谊,1977)　函数 $p(x)$ 称为 n 阶循环函数:如果它满足 $p(x)\equiv p^{(n)}(x)$,而当 $k<n$ 时 $p(x)\not\equiv p^{(k)}(x)$. 试证:对于任何自然数 n 存在 n 阶循环函数.

157. 函数 $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 内有各阶导数,在 $x=0$ 时,它们均不为 0,设对于 $0<|x|<1$ 及自然数 n 有泰勒公式 $f(x)=f(0)+f'(0)x+\cdots+\dfrac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1}+\dfrac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}x^n$,其中 $0<\theta<1$. 试求: $\lim\limits_{x\to 0}\theta$.

159.(数力,1977)　函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有定义且可微, λ 是实数. 试证:当且仅当 $f'(x)e^{\lambda x}$ 不减时,函数 $f'(x)+\lambda f(x)$ 不减.

161.(数力,1977)　设 $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^1$ 满足条件:

a) 对于 $\mathbf{R}^n$ 中每个 $x=(x_1,\cdots,x_n)$ 存在

$$\lim_{t\to+0}\frac{f(tx)-f(0)}{t}=V(x_1,\cdots,x_n)$$

b) $V(\alpha x+\beta y)=\alpha V(x)+\beta V(y)$;

c) 存在 $M>0$,使得 $|f(x)-f(y)|<M\|x-y\|$.

求证:当 $x\to 0$ 时, $f(x)=f(0)+V(x)+O(\|x\|)$.

六、积分

163.(物理技术,1977)　试求区间 $[0,+\infty)$ 上恒正的可微函数 $f(x)$,如果已知当进行变量替换 $\xi=\int_0^x f(t)\,dt$ 时,它变为函

数 $e^{-\xi}$.

165. 函数$f(x)$在区间$[0,1]$上可积,且$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x > 0$. 试证:存在着区间$[a,b] \subset [0,1]$,在$[a,b]$上$f(x) > 0$.

167. (石油化工,1976) 试求介于曲线$(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2)$,$(x^2+y^2) \geqslant a^2$之间的面积.

169. (动力,1977) 试求曲线$r = r(\varphi)$使得由这曲线及当$\varphi = 0$,$\varphi = \varphi_1$时的两条极径所围成的扇形面积Q,可以按照公式$Q = \frac{1}{4}r^2(\varphi_1)$求出.

171. (食品,1977) 试求地球周围大气的质量(地球视为半径为R_0的球体),如果大气密度依$r(h) = r_0 e^{-kh}$的规律减少,其中h是到地球表面的距离.

173. (铁运,1977) 试求圆环体(即半径为R的圆绕不与它相交的轴旋转所成的几何体)的体积,如果已知圆心到轴的距离为d.

175. (水土,1975) 给出凸多面体S,而空间物体T_r由所有到S的距离不大于r的点组成,设T_r的体积为$V(r)$,试求

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{V(r)}{r^3}$$

177. (纺织,1977) 计算

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\mathrm{d}x \quad (a > 0, b > 0)$$

179. (公路,1977) 已知:如果$f(x)$单调而$\int_0^\infty f(x)\mathrm{d}x$收敛,则

$$\int_0^\infty f(x)\mathrm{d}x = \lim_{h\to+0}\sum_{n=1}^\infty f(nh)$$

试求极限$\lim\limits_{t\to1^-}(1-t)\left(\frac{t}{1+t} + \frac{t^2}{1+t^2} + \cdots + \frac{t^n}{1+t^n} + \cdots\right)$.

181. (电机,1976) 求证:$\int_0^{\sqrt{2\pi}} \sin x^2 \mathrm{d}x > 0$.

183. (物理技术,1977) 设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续且满足关系式$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leqslant \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$,求证

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)$$

185. 函数$f(x)$在整个数轴上连续且恒正,又知对所有t

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t-x|}f(x)\mathrm{d}x \leqslant 1$$