周华任 马亚平 编著

随机运筹学

清华大学出版社

周华任　马亚平　编著

随机运筹学

清华大学出版社
北京

内容简介

本书着重介绍了运筹学中随机分支的基本原理和方法，这些内容在技术科学和管理科学中有广泛的应用。全书各章内容具有相对的独立性，注重结合实际，具有一定的深度和广度。本书可供读者选学其中部分内容，书中每章后面附有习题，便于自学。

本书可作为运筹学、应用数学、计算数学、管理科学和系统工程等专业本科生和工科院校研究生的教材使用，也可作为有关科研人员及工程技术人员的参考书。

图书在版编目（CIP）数据

随机运筹学/周华任，马亚平编著. --北京：清华大学出版社，2012.8

ISBN 978-7-302-27644-9

Ⅰ.①随…　Ⅱ.①周…　②马…　Ⅲ.①随机—运筹学　Ⅳ.①O22

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 272835 号

责任编辑：石　磊
封面设计：常雪影
责任校对：刘玉霞
责任印制：王静怡

出版发行：清华大学出版社

网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地　　址：北京清华大学学研大厦 A 座　　**邮　　编**：100084
社 总 机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 装 者：北京市清华园胶印厂
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×230mm　　**印　　张**：21.25　　**字　　数**：460 千字
版　　次：2012 年 8 月第 1 版　　**印　　次**：2012 年 8 月第 1 次印刷
印　　数：1～3000
定　　价：36.00 元

产品编号：032794-01

前 言

运筹学是近几十年来发展起来的一门学科。它的目的是为管理人员在做决策时提供科学的方法和依据。因此,它是实现管理现代化的有力工具。运筹学在生产管理、工程技术、科学实验、财政经济以及社会科学研究中都得到了极为广泛的应用。

应用运筹学去解决实际问题时,有两个重要的特点:一是从全局的观点出发达到整体优化;二是通过建立模型,如数学模型或者模拟模型,对要求解的问题得到最优的决策。运筹学中的数学模型大致可以分为两大类。一类是确定性模型,如线性规划、非线性规划、整数规划、图论等。这类模型在描述事物时,或是由于事物本身不含有随机因素,或是事物本身虽含有随机因素但它并不是一个主要因素,因而从数量关系上描述它们的数学模型具有确定性。另一类是随机模型。这类模型由于所描述的现实现象中随机性是主要因素,因而从数量关系上描述它们的数学模型具有随机性。运筹学中的随机模型可描述的对象十分广泛,这些模型从不同的应用角度可分为系统可靠性数学理论、随机模拟理论、博弈论、排队论、不确定性决策理论、统筹理论、随机存储理论、随机搜索与随机控制等。

本书选择了运筹学中随机模型的随机模拟方法、决策论、马尔可夫预测、矩阵对策、博弈论、统筹法、随机动态规划、排队论、存储论、系统可靠性数学理论等进行讲述,在深入介绍随机理论各分支问题与发展方向的同时,也尽可能地提供了各分支当前研究的现状与特点。为了便于读者学习,在引入随机模型之前,介绍了线性规划及其解法。

本书的理论叙述精练,例题丰富,解题过程详细,力求使实际应用与理论原理并重,从实际中引出问题,用运筹学的原理解释和分析问题,同时注重用实际问题来阐释运筹学的原理。书中除了介绍理论方法外,还强调实际计算的方便,对许多方法的表述进行了简化和表格化处理。书中部分例题给出了

程序实现的算法流程图，有的还给出了用 MATLAB 编写的程序源代码。这样既便于读者理解和掌握运筹学中的算法思想的原理和方法，也可帮助他们掌握算法的程序实现；既便于读者初次学习，也有助于读者提高解题技巧和方法。本书每章章末均附有一定数量的习题，这些习题大多围绕各章基本内容展开，读者选做其中一部分习题将获益良多。

本书可供运筹学、应用数学、计算数学、管理类和系统工程等专业本科生和工科专业研究生作为教材使用，也可作为教师参考书或者自学教材使用，同时也可作为有关科技人员和工程技术人员的参考书。

在编写的过程中，编者参考了众多的教材和参考书。在此谨向有关作者表示衷心的感谢。

本书由周华任、马亚平、蔡开华、王再奎、马元正、陈玉金参与编写。在编写过程中，还得到了钱颂迪、李世楷、姚泽清和郑琴等专家的有益启发和帮助，在此深表谢意。在策划、编写、审稿、校稿等方面，感谢清华大学出版社给予的大力支持和热情帮助。

鉴于编者水平有限，书中不妥和错误之处在所难免，敬请专家和广大读者批评指正。

编　者

2012 年 5 月

目　录

第1章

线 性 规 划

线性规划(linear programming)是运筹学的一个重要和经典的分支。早在 20 世纪 30 年代,康托洛维奇研究并发表了《生产组织与计划的数学方法》,其中论述的就是线性规划问题。自 1947 年丹齐格提出了一般线性规划问题求解的方法——单纯形法之后,线性规划在理论上趋向成熟,在实际应用中日益广泛与深入。特别是在电子计算机能处理成千上万个约束条件和决策变量的线性规划问题之后,线性规划的适用领域变得更广泛了。从解决技术问题的最优化设计到工业、农业、商业、交通运输业、经济计划和管理决策等领域,线性规划都可以发挥作用。

1.1 线性规划问题及其数学模型

1.1.1 问题的提出

在生产实践中经常遇到一类问题,即如何合理地利用有限的人力、物力、财力等资源,以便得到最好的效果。

例 1.1 某工厂在计划期内安排生产甲、乙两种产品,已知生产单位产品所需的设备台时及 A、B 两种原材料的消耗,如表 1-1 所示。

表 1-1

	产品		设备及原材料有效消耗
	甲	乙	
设备消耗/台时	1	2	8
原材料 A 消耗/kg	4	0	16
原材料 B 消耗/kg	0	4	12

该工厂每生产一件产品甲可获利 2 元,每生产一件产品乙可获利 3 元,问应如何安排计划才能使工厂获利最多?

解 这个问题可以用以下的数学模型来描述,设 x_1,x_2 分别表示在计划期内产品甲、乙

的产量。因为设备的有效台时是8，这是一个限制产量的条件，所以在确定产品甲、乙的产量时，要考虑不超过设备的有效台时数，即可用不等式表示为

$$x_1+2x_2\leqslant 8$$

同理，因原材料A，B的限量，可以得到不等式

$$4x_1\leqslant 16$$

$$4x_2\leqslant 12$$

该工厂的目标是在不超过所有资源限量的条件下，如何确定产量 x_1，x_2 以得到最大的利润。若用 z 表示利润，则 $z=2x_1+3x_2$。综合上述，该计划问题可用数学模型表示为

$$(\text{目标函数})\quad \max z=2x_1+3x_2$$

$$(\text{约束条件})\begin{cases}x_1+2x_2\leqslant 8\\4x_1\leqslant 16\\4x_2\leqslant 12\\x_1,x_2\geqslant 0\end{cases}$$

例 1.2 有两个生产基地 A_1 及 A_2，用装载量为5个物资基数的运输工具，向三个销售地 B_1，B_2，B_3 运送物资。各生产基地可运出的物资基数、各销售地需要的物资基数，以及生产基地与各销售地间的距离如表1-2所示。

表 1-2

距离 / 生产基地	销售地			存储量
	B_1	B_2	B_3	
A_1	11	4	12	40
A_2	20	6	24	50
需要物资基数	40	30	20	90

试求费用最小的物资分配方案。

解 设 $x_{ij}(i=1,2,j=1,2,3)$ 为从生产基地 A_i 运往销售地 B_j 的物资基数，由题设可知该物资分配问题可用数学模型表示为

$$(\text{目标函数})\ \min y=11x_{11}+4x_{12}+12x_{13}+20x_{21}+6x_{22}+24x_{23}$$

$$(\text{约束条件})\begin{cases}x_{11}+x_{12}+x_{13}=40\\x_{21}+x_{22}+x_{23}=50\\x_{11}+x_{21}=40\\x_{12}+x_{22}=30\\x_{13}+x_{23}=20\\0\leqslant x_{ij}\leqslant 5,\text{且 } x_{ij} \text{ 均为整数}(i=1,2,j=1,2,3)\end{cases}$$

例 1.3 某航空公司有A，B两种类型的直升机。A型直升机每架能运输30人，B型直

升机每架能运输 20 人；A 型直升机需要 2 名驾驶员，B 型直升机只需要 1 名驾驶员，现总共有 50 名驾驶员可派去执行运输任务，该航空公司现有 A 型直升机 40 架，B 型直升机 20 架，问如何分派才能运输尽可能多顾客到预定地区？

解　假设 x_1, x_2 分别表示分派的 A 型和 B 型直升机的架数，则根据题设可知该分派问题可用数学模型表示为

$$\text{(目标函数)} \max z = 30x_1 + 20x_2$$

$$\text{(约束条件)}\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leqslant 50 \\ x_1 \leqslant 40 \\ x_2 \leqslant 20 \\ x_1, x_2 \geqslant 0, \text{且均为整数} \end{cases}$$

从以上三例可以看出，它们都属于一类优化问题，其共同特征如下：

(1) 每个问题都用一组决策变量$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$表示某一方案，这组决策变量的每一种取值，就代表一个具体方案。

(2) 每个问题都存在一定的约束条件，这些约束条件可以用一组线性等式或线性不等式表示。

(3) 每个问题都有一个要求达到的目标，它可用决策变量的线性函数(称为目标函数)来表示。按问题的不同，要求目标函数实现最大化或最小化。

满足以上三个条件的数学模型称为线性规划的数学模型。其一般形式为

$$\max(\min) z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \tag{1-1}$$

$$\text{s. t.} \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leqslant (=, \geqslant) b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leqslant (=, \geqslant) b_2 \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (1\text{-}2) \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leqslant (=, \geqslant) b_m \\ x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (1\text{-}3) \end{cases}$$

在线性规划的数学模型中，(1-1)式称为目标函数；(1-2)式、(1-3)式称为约束条件；(1-3)式也称为变量的非负约束条件。一般地，满足约束条件用 s. t. 表示，这里 s. t. 为英文“subject to”的缩写，意即“受约束于”，如(1-2)式。

1.1.2　图解法

线性规划的求解方法很多，其中图解法简单直观，有助于了解线性规划问题求解的基本原理。现对上述例 1.1 用图解法求解。在以 x_1, x_2 为坐标轴的直角坐标系中，非负约束条件 $x_1, x_2 \geqslant 0$ 是指(x_1, x_2)在第一象限。例 1.1 的每个约束条件都代表一个半平面。如约束条件 $x_1 + 2x_2 \leqslant 8$ 是代表以直线 $x_1 + 2x_2 = 8$ 为边界的左下方的半平面。若同时满足 $x_1, x_2 \geqslant 0$，$x_1 + 2x_2 \leqslant 8$，$4x_1 \leqslant 16$ 和 $4x_2 \leqslant 12$ 的约束条件的点，必然落在 x_1, x_2 坐标轴和这三个半平面的边界交成的区域内。由例 1.1 的所有约束条件为半平面交成的区域见图 1-1

中的阴影部分。阴影区域中的每一个点(包括边界点)都是这个线性规划问题的解(称为可行解),因而此区域是例 1.1 的线性规划问题的解集合,称它为可行域。

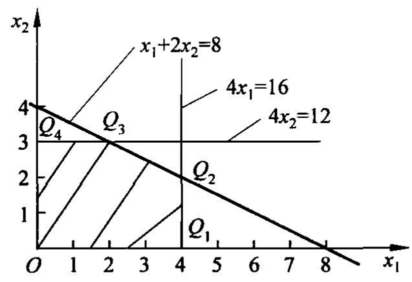

图 1-1

再分析目标函数 $z=2x_1+3x_2$,在图 1-1 的坐标平面上,它可表示以 z 为参数、$-2/3$ 为斜率的一族平行线

$$x_2=-\frac{2}{3}x_1+\frac{z}{3}$$

位于同一直线上的点具有相同的目标函数值,因而称它为“等值线”。当 z 值由小变大时,直线 $x_2=-\frac{2}{3}x_1+\frac{z}{3}$沿其法线方向向右上方移动。当移动到 Q_2 点时,z 值在可行域边界上达到最大(见图 1-2),这就得到了例 1.1 的最优解 Q_2,Q_2 点的坐标为(4,2)。于是可计算出满足所有约束条件的最大值 $z=14$。

因此最优生产计划方案是:生产 4 件产品甲,生产 2 件产品乙,可得最大利润 14 元。

上例中得到的问题最优解是唯一的,但对一般的线性规划问题,求解结果还可能出现以下几种情况:

1. 无穷多最优解(多种最优解)

若将例 1.1 中的目标函数变为 $\max\ z=2x_1+4x_2$,则表示目标函数的以 z 为参数的这族平行直线与约束条件 $x_1+2x_2\leqslant 8$ 的边界线平行。当 z 值由小变大时,将与线段 Q_2Q_3 重合(见图 1-3)。线段 Q_2Q_3 上任意一点都使 z 取得相同的最大值,这个线性规划问题有无穷多最优解。

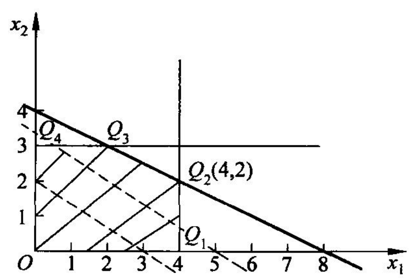

图 1-2

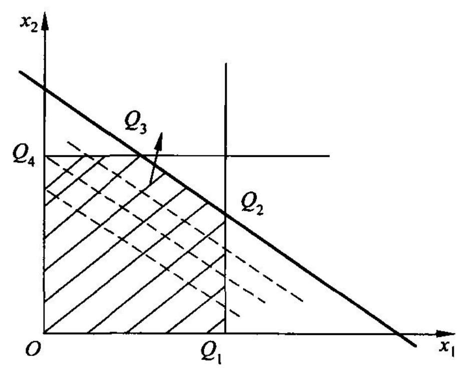

图 1-3

2. 无界解

对下述线性规划问题:

$$\max z = 2x_1 + 4x_2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} -2x_1 + x_2 \leqslant 4 \\ x_1 - x_2 \leqslant 2 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

用图解法求解结果见图 1-4。从图 1-4 中可以看到,该问题可行域无界,目标函数值可以增大到无穷大。称这种情况为无界解。

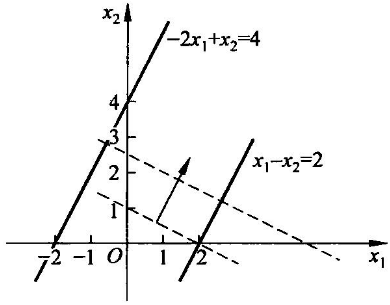

图 1-4

3. 无可行解

如果在例 1.1 的数学模型中增加另一个约束条件 $-2x_1+x_2 \geqslant 4$,该问题的可行域为空集,即无可行解,也不存在最优解。

建模时应注意,当求解结果出现 2,3 两种情况时,一般说明线性规划问题的数学模型有错误。前者缺乏必要的约束条件,后者是有矛盾的约束条件。

从图解法中直观地看到,当线性规划问题的可行域非空时,它是有界或无界凸多边形。若线性规划问题存在最优解,它一定在有界可行域的某个顶点得到;若在两个顶点同时得到最优解,则它们连线上的任意一点都是最优解,即有无穷多最优解。

图解法虽然直观、简便,但当变量数多于 3 个时,它就不合适了。下面要介绍一种代数方法——单纯形法。为了便于讨论,先来规定线性规划问题的数学模型的标准形式。

1.1.3 线性规划问题的标准形式

由前节可知,线性规划问题有各种不同的形式。目标函数有的要求 max,有的要求 min;约束条件可以是"$\leqslant$"形式的不等式,也可以是"$\geqslant$"形式的不等式,还可以是等式。决策变量一般要满足非负约束条件,但也允许在$(-\infty,\infty)$范围内取值,即无约束条件。这里将各种形式的数学模型统一变换为如下标准形式:

$$(M_1) \quad \max z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \\ x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant 0 \end{cases}$$

或者写成

$$(M'_1)\quad \max z=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i, & i=1,2,\cdots,m\\ x_j\geqslant 0, & j=1,2,\cdots,n\end{cases}$$

在标准形式中规定各约束条件的右端项满足 $b_i>0$。若某一个 $b_i<0$,则可在此等式两边同乘以-1。

使用向量和矩阵符号,标准形式可表述为

$$(M''_1)\quad \max z=\boldsymbol{cx}$$

$$\text{s. t.}\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{p}_jx_j=\boldsymbol{b}\\ x_j\geqslant 0, & j=1,2,\cdots,n\end{cases}$$

其中

$$\boldsymbol{c}=(c_1,c_2,\cdots,c_n),\quad \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{p}_j=\begin{bmatrix}a_{1j}\\a_{2j}\\\vdots\\a_{mj}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_m\end{bmatrix}$$

向量 $\boldsymbol{p}_j$ 对应的决策变量是 x_j。

完全用矩阵描述时标准形式还可以写为

$$\max z=\boldsymbol{cx}$$
$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0}$$

其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\cdots,\boldsymbol{p}_n),\quad \boldsymbol{0}=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$$

以上数学符号的意义如下:

$\boldsymbol{A}$——约束条件的 $m\times n$ 系数矩阵,一般 $m<n$;

$\boldsymbol{b}$——资源向量;

$\boldsymbol{c}$——价值向量;

$\boldsymbol{x}$——决策变量向量。

实际碰到的各种线性规划问题的数学模型都可以变换为标准形式,即标准型,然后求解。

下面讨论如何变换为标准型的问题。

(1) 若要求目标函数实现最小化,即 $\min z=\boldsymbol{cx}$,这时只需将目标函数最小化变换为求目标函数最大化,即令 $z'=-z$,于是得到 $\max z'=-\boldsymbol{cx}$。这就同标准型的目标函数的形式