

线性代数 学考指导

XIANXING DAISHU XUE KAO ZHIDAO
XIANXING DAISHU XUE KAO ZHIDAO

主编 许定亮 副主编 文传军 姚俊



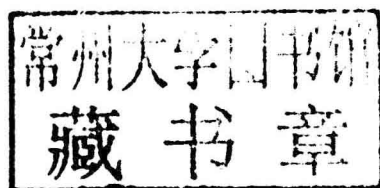
苏州大学出版社

SOOCHOW UNIVERSITY PRESS

线性代数学考指导

主 编 许定亮

副主编 文传军 姚 俊



苏州大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数学考指导 / 许定亮主编. — 苏州: 苏州大学出版社, 2012. 7

ISBN 978-7-5672-0195-8

I. ①线… II. ①许… III. ①线性代数-高等学校-自学参考资料 IV. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 158306 号

线性代数学考指导

许定亮 主编

责任编辑 李 娟

苏州大学出版社出版发行

(地址: 苏州市十梓街 1 号 邮编: 215006)

宜兴市盛世文化印刷有限公司印装

(地址: 宜兴市万石镇南漕河滨路 58 号 邮编: 214217)

开本 787×1092 1/16 印张 6.5 字数 162 千

2012 年 7 月第 1 版 2012 年 7 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5672-0195-8 定价: 13.00 元

苏州大学版图书若有印装错误, 本社负责调换
苏州大学出版社营销部 电话: 0512-65225020
苏州大学出版社网址 <http://www.sudapress.com>

前言

线性代数是一门基础数学课程,它的基本概念、理论和方法具有较强的逻辑性、抽象性和广泛的实用性,它的思想和方法在工程技术和经济管理中已得到广泛应用.

本书是编者根据教育部关于高等学校工科类和经济管理类本科数学基本课程教学基本要求,在多年从事工科类和经济管理类等专业线性代数教学和考研辅导经验的基础上编写而成的.

本书作为《线性代数》的配套学习指导书,由行列式、矩阵、向量组、线性方程组、相似矩阵与二次型五章内容组成,每章内容分主要内容、重要结论、典型例题、练习题四个部分.书末附两套自测模拟卷,练习题和自测模拟卷均配有参考答案,题目难易适中.另外,本书中还有部分近年来硕士研究生招生考试有关线性代数部分的试题,学生还可以把本书的学习作为线性代数课程学习的提高和补充.学生在使用本书时应首先学习好教材,然后再参考本书以便开拓自己的思路.本书中的例题有些有一定难度,尽量采用常规的方法解答.但是,线性代数这门课程的特点就在于它的灵活性,本书所对应的教材在编排习题时也有意安排了许多比较灵活的习题.因此,本书中许多例题都给出了多个解法,体现了处理问题手段的灵活性与多样性.对于一些技巧性比较强的解法,读者不必感到高深莫测,只要熟练掌握基本知识,多做习题,自然可以熟能生巧,达到“得道忘技”的程度.

本书由许定亮任主编,文传军、姚俊任副主编,参加编写的人员还有秦勇、高波、王忠英等.本书在编写过程中得到了常州工学院教务处领导和理学院领导的大力支持,同时也得到了苏州大学出版社的大力支持,在此向他们深表谢意!

由于编者水平有限,书中错误和疏漏之处在所难免,请广大读者和同行专家批评指正.

编者

2012年7月

目 录

第一章 行列式

一、主要内容	1
二、重要结论	2
三、典型例题	3
四、练习题	9

第二章 矩 阵

一、主要内容	11
二、重要结论	15
三、典型例题	16
四、练习题	28

第三章 向量组

一、主要内容	30
二、重要结论	33
三、典型例题	35
四、练习题	45

第四章 线性方程组

一、主要内容	47
二、重要结论	49
三、典型例题	50
四、练习题	61

第五章 相似矩阵与二次型

一、主要内容	63
二、重要结论	65
三、典型例题	66
四、练习题	75

自测模拟卷一	77
--------------	----

自测模拟卷二	79
--------------	----

参考答案	81
------------	----

第一章

行列式

行列式的计算是线性代数的基础,它在矩阵、方程组和向量组的研究中起着重要作用.

理解行列式的概念,牢记行列式的性质,重点是计算三阶、四阶行列式和规律性较强的 n 阶行列式.

▶▶ 一、主要内容

1. 行列式的概念与性质

(1) 行列式的概念.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{p_1 p_2 \cdots p_n} (-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}.$$

行列式是一个“数”,是“取自不同行不同列元素积的代数和”.

例如,如果一个 n 阶行列式非零元素至多有 $n-1$ 个,则该行列式必为零.

$$\text{又如, } \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(4231)} 24 = -24.$$

(2) 行列式的性质.

设有行列式 $D = |a_1, a_2, \cdots, a_n|$, 则

- ① $D^T = D$; (转置值不变)
- ② $k|a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_n| \xrightarrow[\text{提取}]{\text{数乘}} |a_1, \cdots, ka_i, \cdots, a_n|$; (数乘行列式)
- ③ $|a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_j, \cdots, a_n| \xrightarrow[c_i \leftrightarrow c_j]{\text{对换}} |a_1, \cdots, a_j, \cdots, a_i, \cdots, a_n|$; (对换两列变号)
- ④ $|a_1, \cdots, a_i, \cdots, ka_i, \cdots, a_n| = 0$; (两列成比例值为零)
- ⑤ $|a_1, \cdots, a_i + b_i, \cdots, a_n| \xrightarrow[\text{合并}]{\text{分解}} |a_1, \cdots, a_i, \cdots, a_n| + |a_1, \cdots, b_i, \cdots, a_n|$;

$$\textcircled{6} |a_1, \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_n| \xrightarrow{c_j + k c_i} |a_1, \dots, a_i, \dots, a_j + k a_i, \dots, a_n|.$$

注 行列式中的行与列有同等的地位, 行列式中凡是对行成立的性质对列也同样成立, 反之亦然.

2. 代数余子式的概念与性质

(1) 代数余子式的概念.

在 n 阶行列式 D 中, 划去元素 a_{ij} 所在的行与列, 余下元素相对位置不变所组成的 $n-1$ 阶行列式称为元素 a_{ij} 的余子式, 记为 M_{ij} . 而称 $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ 为元素 a_{ij} 的代数余子式.

(2) 代数余子式的性质.

- ① A_{ij} 与第 i 行、第 j 列元素均无关, 特别地, 与元素 a_{ij} 无关;
- ② 某行(列)元素与其他行(列)元素对应的代数余子式乘积之和等于 0;
- ③ 某行(列)各元素与其对应的代数余子式乘积之和等于行列式, 即行列式按行(列)展开定理.

3. 行列式按行(列)展开定理

$$D = \begin{cases} \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{ik} \quad (i = 1, 2, \dots, n), & \text{按第 } i \text{ 行,} \\ \sum_{k=1}^n a_{kj} A_{kj} \quad (j = 1, 2, \dots, n), & \text{按第 } j \text{ 列.} \end{cases}$$

►► 二、重要结论

(1) 数乘行列式与数乘矩阵的关系: $|kA_n| = k^n |A_n|$.

(2) 行列式乘法公式: $|A_n B_n| = |A_n| |B_n|$.

注意 A, B 为同阶方阵.

(3) 三角行列式:

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n, \quad \begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \ddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n.$$

(4) 拉普拉斯公式:

$$\begin{vmatrix} A & \\ & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & \\ & B \end{vmatrix} = |A| |B|,$$

$$\begin{vmatrix} A_n & \\ B_m & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_n & \\ B_m & \end{vmatrix} = (-1)^{nm} |A_n| |B_m| \stackrel{\text{一般}}{\neq} -|A_n| |B_m|.$$

(5) 范德蒙行列式:

$$V(x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (x_i - x_j).$$

(6) 特征值与行列式的关系: $|A| = \prod_{i=1}^n \lambda_i$ (λ_i 为 A 的特征值).

此外, $|A_n^*| = |A_n|^{n-1}$, $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$, 等等.

►► 三、典型例题

题型 1 行列式的概念与性质

【例 1】 [填空题].

$$(1) \begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 2x & 1 \end{vmatrix} \text{ 的展开式中 } x^3 \text{ 的系数为 } \underline{\hspace{2cm}}.$$

【解】 第 1 行只能取第 1 列的元素 x . 若取第 4 列的元素 2, 则划去第 1 行的一个 x , 由于第 3 列的两个 x 只能取其一, 故不能得到 x^3 . 同样第 1 行第 2 列的元素 1 和第 1 行第 3 列的元素 1 均因所在行和列至少有两个 x , 也不可能取. 因此, 第 1 行只能取第 1 列的元素 x . 同理可知, 第 2 行只能取第 2 列的元素 x . 从而含 x^3 的只有两项: 主对角线项 x^3 和非主对角线项 $(-1)^{\tau(1243)} 2x^3 = -2x^3$, 故所求 x^3 的系数为 -1 .

(2) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 均为 3 维列向量, 记矩阵

$$A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), B = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3, \alpha_1 + 3\alpha_2 + 9\alpha_3),$$

如果 $|A| = 1$, 那么 $|B| = \underline{\hspace{2cm}}$.

【解】 抽象行列式计算主要应用行列式的性质和矩阵运算.

方法 1 (性质法)

$$\begin{aligned} |B| &= |\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3, \alpha_1 + 3\alpha_2 + 9\alpha_3| \\ &\xrightarrow[c_3 - c_2]{c_2 - c_1} |\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_2 + 3\alpha_3, \alpha_2 + 5\alpha_3| \\ &\xrightarrow{c_3 - c_2} |\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_2 + 3\alpha_3, 2\alpha_3| \\ &\xrightarrow{\text{提取}} 2 |\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_2 + 3\alpha_3, \alpha_3| \\ &\xrightarrow{c_2 - 3c_3} 2 |\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_2, \alpha_3| \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{c_1 - c_2 - c_3} 2|\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3| = 2|A| = 2.$$

方法 2 (矩阵法)

$$\text{因为 } B = A \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{bmatrix}, \text{ 所以 } |B| = |A| \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 2.$$

注意体会行列式性质的应用以及具体与抽象两种形式的行列式.

(1) [具体数字行列式]

$$\text{已知 } \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 5, \text{ 则 } \begin{vmatrix} b_1 + c_1 & c_1 + a_1 & a_1 + b_1 \\ b_2 + c_2 & c_2 + a_2 & a_2 + b_2 \\ b_3 + c_3 & c_3 + a_3 & a_3 + b_3 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

(2) [抽象的向量行列式]

$$\text{已知 } |a, b, c| = 5, \text{ 则 } |b + c, c + a, a + b| = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【例 2】 [选择题]

(1) 多项式

$$p(x) = \begin{vmatrix} a_{11} + x & a_{12} + x & a_{13} + x & a_{14} + x \\ a_{21} + x & a_{22} + x & a_{23} + x & a_{24} + x \\ a_{31} + x & a_{32} + x & a_{33} + x & a_{34} + x \\ a_{41} + x & a_{42} + x & a_{43} + x & a_{44} + x \end{vmatrix}$$

的次数至多是

()

(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) 4

【解】 第 2, 3, 4 行均减去第 1 行:

$$p(x) = \begin{vmatrix} a_{11} + x & a_{12} + x & a_{13} + x & a_{14} + x \\ a_{21} - a_{11} & a_{22} - a_{12} & a_{23} - a_{13} & a_{24} - a_{14} \\ a_{31} - a_{11} & a_{32} - a_{12} & a_{33} - a_{13} & a_{34} - a_{14} \\ a_{41} - a_{11} & a_{42} - a_{12} & a_{43} - a_{13} & a_{44} - a_{14} \end{vmatrix}.$$

按第 1 行展开易知 $p(x)$ 至多是 1 次多项式. 选择 A.

$$(2) \text{ 四阶行列式 } \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} \text{ 等于}$$

()

(A) $a_1 a_2 a_3 a_4 - b_1 b_2 b_3 b_4$

(B) $a_1 a_2 a_3 a_4 + b_1 b_2 b_3 b_4$

(C) $(a_1 a_2 - b_1 b_2)(a_3 a_4 - b_3 b_4)$

(D) $(a_2 a_3 - b_2 b_3)(a_1 a_4 - b_1 b_4)$

【解】 方法 1 (降阶法) 按第 1 行展开.

方法 2 (性质法+公式法) 对调第 2, 4 列后再对调第 2, 4 行.

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 \\ 0 & b_3 & a_3 & 0 \\ b_4 & 0 & 0 & a_4 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_2 \leftrightarrow c_4} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & a_2 \\ 0 & 0 & a_3 & b_3 \\ b_4 & a_4 & 0 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_4} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 \\ b_4 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & b_3 \\ 0 & 0 & b_2 & a_2 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{拉普拉斯公式}} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ b_4 & a_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix}$$

$$= (a_1 a_4 - b_1 b_4)(a_2 a_3 - b_2 b_3).$$

选择 D.

方法 3 (特殊值法) 如取 $a_4 = 0$.

题型 2 行列式的计算

【例 1】 [填空题]

$$(1) \text{ (一般行列式) } \begin{vmatrix} 1 & b & a & b \\ b & 0 & b & a \\ a & b & 1 & b \\ b & a & b & 0 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

【解】 本题考察行列式的性质、展开定理. 先取含零元素尽可能多的行或列, 如第 2 行(列)或第 4 行(列), 利用行列式的性质尽可能多消零, 再降阶.

$$\begin{aligned}
 D & \xrightarrow{r_2 - r_4} \begin{vmatrix} 1 & b & a & b \\ 0 & -a & 0 & a \\ a & b & 1 & b \\ b & a & b & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{c_2 + c_4} \begin{vmatrix} 1 & 2b & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \\ a & 2b & 1 & b \\ b & a & b & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_2 \text{ 展开}} a(-1)^{2+4} \begin{vmatrix} 1 & 2b & a \\ a & 2b & 1 \\ b & a & b \end{vmatrix} \\
 & \xrightarrow{r_1 - r_2} a \begin{vmatrix} 1-a & 0 & a-1 \\ a & 2b & 1 \\ b & a & b \end{vmatrix} \xrightarrow{c_1 + c_3} a \begin{vmatrix} 0 & 0 & a-1 \\ a+1 & 2b & 1 \\ 2b & a & b \end{vmatrix} \\
 & \xrightarrow{r_1 \text{ 展开}} a(a-1)(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a+1 & 2b \\ 2b & a \end{vmatrix} \\
 & = a(a-1)[a(a+1) - 4b^2].
 \end{aligned}$$

$$(2) D_4 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ x+1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$\begin{aligned}
 [\text{解}] \quad D_4 & \xrightarrow[\text{提取}]{c_1+c_2+c_3+c_4} x \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -1 & x+1 & -1 \\ 1 & x-1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow[c_3-c_1c_4+c_1]{c_2+c_1} x \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 1 & 0 & x & 0 \\ 1 & x & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
 & \xrightarrow[r_4 \text{ 展开}]{x(-1)^{4+1}} \begin{vmatrix} 0 & 0 & x \\ 0 & x & 0 \\ x & 0 & 0 \end{vmatrix} = x^4.
 \end{aligned}$$

$$\text{【例 2】} \quad \text{计算行列式 } D_n = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}.$$

【解】 先将第 2 行至第 n 行都加到第 1 行,再提取公因数,最后各行减第 1 行的 b 倍:

$$\begin{aligned}
 D_n & \xrightarrow[r_1+r_2+\cdots+r_n]{r_1+r_2+\cdots+r_n} [a+(n-1)b] \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix} \\
 & \xrightarrow[(k=2,3,\cdots,n)]{r_k-br_1} [a+(n-1)b] \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix} \\
 & = [a+(n-1)b](a-b)^{n-1}.
 \end{aligned}$$

$$\text{【例 3】} \quad \text{计算行列式 } D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n \end{vmatrix}.$$

【解】 所给行列式主对角线元素为 $1, 2, \cdots, n$, 其余元素全为 2. 因此, 各行与第 2 行只在主对角线元素上有差异. 各行均减去第 2 行, 再按第 1 行展开得

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-2 \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1 \text{ 展开}} \begin{vmatrix} 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & n-2 \end{vmatrix}_{n-1} = -2(n-2)!.$$

【例 4】 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1(x_1-1) & x_2(x_2-1) & x_3(x_3-1) \\ x_1^2(x_1-1) & x_2^2(x_2-1) & x_3^2(x_3-1) \end{vmatrix}.$

【解】 这是一个三阶行列式, 看似不难, 总可以利用对角线法则计算, 但容易出错. 通过观察行列式特点, 可将第 1 行的“1”写成“ $x_i - (x_i - 1)$ ”($i=1, 2, 3$), 由行列式的性质得

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1(x_1-1) & x_2(x_2-1) & x_3(x_3-1) \\ x_1^2(x_1-1) & x_2^2(x_2-1) & x_3^2(x_3-1) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -(x_1-1) & -(x_2-1) & -(x_3-1) \\ x_1(x_1-1) & x_2(x_2-1) & x_3(x_3-1) \\ x_1^2(x_1-1) & x_2^2(x_2-1) & x_3^2(x_3-1) \end{vmatrix} \\ &= x_1 x_2 x_3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1-1 & x_2-1 & x_3-1 \\ x_1(x_1-1) & x_2(x_2-1) & x_3(x_3-1) \end{vmatrix} - \prod_{i=1}^3 (x_i-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix} \\ &= x_1 x_2 x_3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1(x_1-1) & x_2(x_2-1) & x_3(x_3-1) \end{vmatrix} - \prod_{i=1}^3 (x_i-1) \cdot \prod_{1 \leq j < i \leq 3} (x_i - x_j) \\ &= x_1 x_2 x_3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{vmatrix} - \prod_{i=1}^3 (x_i-1) \cdot \prod_{1 \leq j < i \leq 3} (x_i - x_j) \\ &= \left[x_1 x_2 x_3 - \prod_{i=1}^3 (x_i-1) \right] \prod_{1 \leq j < i \leq 3} (x_i - x_j). \end{aligned}$$

【例 5】 已知 $\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$, 求 λ 的值.

【解】 这是与方阵特征值有关的行列式计算问题. 观察行列式在某行(列)上有无相同或互为相反数的元素, 通过应用行列式倍加性质产生一次公因式. 第 1 行减第 3 行(或第 1 列减第 3 列)可产生公因式:

$$\begin{aligned} \therefore \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} &\xrightarrow{r_1-r_3} \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & \lambda-2 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{r_1 \text{ 提取}} (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\ &\xrightarrow{c_3+c_1} (2-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 5-\lambda & -2 \\ 1 & -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} \xrightarrow{r_1 \text{ 展开}} (2-\lambda) \begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 \\ -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (2-\lambda)[(5-\lambda)(4-\lambda)-2] = (2-\lambda)(\lambda^2-9\lambda+18) \\ &= (2-\lambda)(\lambda-3)(\lambda-6), \end{aligned}$$

$\therefore \lambda$ 的值为 2, 3, 6.

题型 3 代数余子式的性质

【例 1】 已知行列式 $D = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -12 & 134 \end{vmatrix}$, 求

(1) 第 4 行元素的余子式之和;

(2) 第 4 行元素的代数余子式之和.

[解]

$$\begin{aligned}
 (1) \quad M_{41} + M_{42} + M_{43} + M_{44} &= -A_{41} + A_{42} - A_{43} + A_{44} \xrightarrow{\text{逆用展开定理}} \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \\
 &\xrightarrow{r_3 \text{ 展开}} (-7)(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{r_2 + 2r_3} 7 \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \\
 &= 7 \cdot 4 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -28.
 \end{aligned}$$

$$(2) \quad A_{41} + A_{42} + A_{43} + A_{44} = 1 \cdot A_{41} + 1 \cdot A_{42} + 1 \cdot A_{43} + 1 \cdot A_{44}$$

$$\xrightarrow{\text{逆用展开定理}} \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

【例 2】 行列式 $\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ 的第 4 行元素的代数余子式之和 $A_{41} + A_{42} + A_{43} +$

$A_{44} =$ _____.

[解] 利用代数余子式的性质, 由于第 4 行代数余子式之和与原行列式第 4 行元素无关, 所以逆用展开定理得

$$A_{41} + A_{42} + A_{43} + A_{44} = \begin{vmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[i=1,2,3]{r_i - br_4} \begin{vmatrix} a-b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^3.$$

注意 上面行列式最后一行元素恰为代数余子式的系数.

四、练习题

一、填空题

1. 要使 $3i2981k65$ 为偶排列, 则 $k = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. 已知 $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} = 1$, 则 $\begin{vmatrix} 3x-1 & 3y-3 & 3z-4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$.

3. 如果在行列式中, 奇数行元素之和等于偶数行元素之和的 2 倍, 则该行列式的值等于 $\underline{\hspace{2cm}}$.

4. 行列式 $\begin{vmatrix} -1 & 5 & 1 \\ 8 & 11 & -x \\ 2 & 4 & 9 \end{vmatrix}$ 中元素 $(-x)$ 的代数余子式为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

5. 若三阶行列式 D 中第 2 行的元素依次为 $2, -1, 3$, 它们的余子式分别为 $3, 1, 2$, 则 $D = \underline{\hspace{2cm}}$.

二、计算题

1. 计算下列行列式:

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 5 \end{vmatrix};$$

$$(2) \begin{vmatrix} 5 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 3 \end{vmatrix};$$

$$(3) \begin{vmatrix} 2 & -2 & 5 & 1 \\ 5 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & -5 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 5 \end{vmatrix};$$

$$(4) \begin{vmatrix} 0 & -2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & -4 \\ 2 & 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

2. 计算下列行列式:

$$(1) D_n = \begin{vmatrix} x & y & \cdots & y \\ y & x & \cdots & y \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y & y & \cdots & x \end{vmatrix};$$

$$(2) D_n = \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix};$$

$$(3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_{n-1}^{n-2} & x_n^{n-2} \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_{n-1}^{n-1} & x_n^{n-1} \end{vmatrix}; \quad (4) \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix};$$

$$(5) D_n = \begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix};$$

$$(6) D_{2n} = \begin{vmatrix} a & & & & & & & b \\ & a & & & & & & b \\ & & \ddots & & & & & \ddots \\ & & & a & b & & & \\ & & & c & d & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & d & \\ c & & & & & & & d \\ & & & & & & & d \end{vmatrix}.$$

第二章

矩 阵

矩阵是线性代数的核心内容,是研究向量组和方程组的重要工具.“矩阵—向量组—方程组”知识点的联系与转化在线性代数中是不可避免的,也是线性代数的本质内容.矩阵重点内容分以下四部分:

- (1) 矩阵及其运算——概念,运算,应用,重要方阵.
- (2) 初等变换与初等阵——概念,性质,应用.
- (3) 矩阵的秩——概念,性质,求法,应用.
- (4) 分块矩阵——按行(列)分块阵,分块对角.

►► 一、主要内容

1. 矩阵及其运算

由 $m \times n$ 个元素 a_{ij} ($i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n$) 排成的 m 行 n 列的表称为 $m \times n$ 矩阵:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

特别地,当 $m=n$ 时,称为 n 阶方阵;当 $a_{ij}=0$ ($i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n$) 时,称为零矩阵;当 $m=1$ 时,称为行矩阵(行向量);当 $n=1$ 时,称为列矩阵(列向量).当两个矩阵行、列数分别相等时,称为同型矩阵.对同型矩阵 $\mathbf{A}=(a_{ij})_{m \times n}$, $\mathbf{B}=(b_{ij})_{m \times n}$,规定:

$$\mathbf{A}=\mathbf{B} \Leftrightarrow a_{ij}=b_{ij} \quad (i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n).$$

一般运算: 加法,数乘,乘法,转置.

方阵运算: 行列式,幂,伴随阵,逆矩阵.

(1) 数乘矩阵: 设 $\mathbf{A}=(a_{ij})_{m \times n}$, $k \in \mathbf{R}$, 则数 k 与矩阵 $\mathbf{A}$ 的乘积为 $k\mathbf{A}=(ka_{ij})_{m \times n}$.

注意 数乘行列式与数乘矩阵的区别, $|k\mathbf{A}_n|=k^n|\mathbf{A}_n|$.

(2) 矩阵加法: 设 $\mathbf{A}=(a_{ij})_{m \times n}$, $\mathbf{B}=(b_{ij})_{m \times n}$, 则矩阵 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 的和(差)为

$$\mathbf{A} \pm \mathbf{B} = (a_{ij} \pm b_{ij})_{m \times n}.$$

数乘与加法称为线性运算,其运算律为

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}, (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}), \lambda(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \lambda\mathbf{A} + \lambda\mathbf{B},$$

$$(\lambda + \mu)\mathbf{A} = \lambda\mathbf{A} + \mu\mathbf{A}, \lambda(\mu\mathbf{A}) = (\lambda\mu)\mathbf{A}.$$

(3) 矩阵乘法: 设 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times l}$, $\mathbf{B} = (b_{ij})_{l \times n}$, 则矩阵 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 的乘积为 $\mathbf{AB} = \mathbf{C} = (c_{ij})_{m \times n}$,

$$\text{其中 } c_{ij} = \sum_{k=1}^l a_{ik}b_{kj} \quad (i=1, 2, \dots, m; j=1, 2, \dots, n).$$

运算律: $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$, $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$, $(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$, $\lambda(\mathbf{AB}) = (\lambda\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(\lambda\mathbf{B})$.

注意 交换律一般不成立: $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$. 由此, 代数公式在矩阵中一般不成立.

消去律一般不成立: 由 $\mathbf{AB} = \mathbf{AC}$ 一般不能推出 $\mathbf{B} = \mathbf{C}$. 请思考何时成立.

(4) 矩阵转置: 将矩阵 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{m \times n}$ 的行与列按原次序互换所得矩阵称为 $\mathbf{A}$ 的转置矩阵, 记为 $\mathbf{A}^T$.

注意 若 $\mathbf{A}$ 是 $m \times n$ 矩阵, 则 $\mathbf{A}^T$ 是 $n \times m$ 矩阵, 且 $\mathbf{A}$ 的第 i 行第 j 列元素是 $\mathbf{A}^T$ 的第 j 行第 i 列元素.

运算律: $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$, $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$ ($\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 为同型矩阵), $(\lambda\mathbf{A})^T = \lambda\mathbf{A}^T$.

(5) 行列式: 方阵 $\mathbf{A}$ 的元素位置不变所构成的行列式称为方阵 $\mathbf{A}$ 的行列式, 记为 $\det \mathbf{A}$ 或 $|\mathbf{A}|$.

运算律: $|k\mathbf{A}_n| = k^n |\mathbf{A}_n|$, $|\mathbf{A}_n \mathbf{B}_n| = |\mathbf{A}_n| |\mathbf{B}_n|$.

(6) 幂: $\mathbf{A}^k = \underbrace{\mathbf{A}\mathbf{A} \cdots \mathbf{A}}_{k \text{ 个}} \quad (k \in \mathbf{N} \rightarrow k \in \mathbf{Z})$.

规定: 当 $\mathbf{A}$ 可逆时, $\mathbf{A}^0 = \mathbf{E}$, $\mathbf{A}^{-k} = (\mathbf{A}^{-1})^k$.

运算律: $\mathbf{A}^m \cdot \mathbf{A}^n = \mathbf{A}^{m+n}$, $(\mathbf{A}^m)^n = \mathbf{A}^{mn}$. 但一般地, $(\mathbf{AB})^m \neq \mathbf{A}^m \mathbf{B}^m$.

(7) 逆矩阵:

① 设 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 为同阶方阵, 且 $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{E}$, 则称 $\mathbf{A}$ 为可逆阵, $\mathbf{B}$ 为 $\mathbf{A}$ 的逆矩阵, 记为 $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B}$, 即 $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E}$;

② 逆矩阵是唯一的, 且 $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$, $(k\mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{k}\mathbf{A}^{-1}$, $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$, $(\mathbf{A}^{-1})^T = (\mathbf{A}^T)^{-1}$, $|\mathbf{A}^{-1}| = \frac{1}{|\mathbf{A}|}$;

③ 方阵 $\mathbf{A}$ 可逆 $\Leftrightarrow |\mathbf{A}| \neq 0$, 且当 $\mathbf{A}$ 可逆时, $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}^*$.

注意 变化式.

$$(8) \text{ 伴随阵: 设方阵 } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \text{ 则称方阵 } \mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = (\mathbf{A}_{ij})^T$$

为方阵 $\mathbf{A}$ 的伴随阵, 其中 A_{ij} 为行列式 $\det \mathbf{A}$ 的元素 a_{ij} 的代数余子式 ($i, j=1, 2, \dots, n$).