数学分析

（上　册）

刘正荣　杨启贵
刘深泉　洪　毅　编

科学出版社

数 学 分 析

（上册）

刘正荣　杨启贵
刘深泉　洪　毅　编

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书分上、下两册. 上册包含数列极限及其性质、一元函数及其性质、导数与微分、微分学中的基本定理及导数的应用、不定积分、定积分、广义积分等内容. 下册包含数项级数、函数项级数、多元函数的极限与连续、多元函数的导数与微分、向量值函数的微分、含参变量的积分与广义积分、重积分、曲线积分与曲面积分等内容. 本书参考了近期高中数学教学改革的内容，遵循简洁、易学与系统性相结合的原则，对传统教材的内容做了一些调整，使之更便于教学.

本书可作为普通高等院校数学类专业的教材，也可作为工科院校以及经管类院校中对数学要求较高专业的数学教材.

图书在版编目(CIP)数据

数学分析：全 2 册/刘正荣等编. —北京：科学出版社，2012

ISBN 978-7-03-035387-0

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①刘… Ⅲ. ①数学分析-高等学校-教材 Ⅳ. ①O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2012) 第 189962 号

责任编辑：姚莉丽　王胡权／责任校对：刘小梅

责任印制：钱玉芬／封面设计：陈　敬

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

骏杰印刷厂印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2012 年 8 月第　一　版　开本：B5(720 × 1000)

2012 年 8 月第一次印刷　印张：35 1/2

字数：693 000

定价：64.00 元(上、下册)

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

数学分析是所有数学系各专业的新生最先面临的一门主要课程, 是众多后续课程的基础　研究生阶段的许多课程在本质上也都是数学分析的延伸、深化或应用. 该课程不仅在内容上为后继课程的学习提供了必要的基础知识, 更重要的是它所体现的分析思想、逻辑推理方法、处理问题的严谨性和周密性. 在整个学习过程乃至今后的科学研究中　都起着奠基作用　近几年来　许多工科专业和经济类专业也把高等数学换成了数学分析, 大家认为数学分析对培养学生的逻辑分析能力和创造性思维能力大有作用

在参考近期高中数学课本及国内外许多数学分析教材的基础上, 根据多年的教学经验, 我们编写了本教材　遵循简洁、易学与系统性相结合的原则, 我们对传统教材的内容和习题做了一些增减. 对先后次序也做了一些调整, 例如传统教材中把数列极限和函数极限放在一起交叉编写　而在本教材中, 我们把这两部分内容分开编写, 先介绍完数列极限及其性质, 再介绍函数及其性质. 这样可能会使学生感到连贯一些, 学起来容易一些

本书的第 1~4 章由刘正荣编写　第 5~9 章由杨启贵编写, 第 10~13 章由刘深泉编写. 第 14、15 章由洪毅编写　本教材的编写及出版得到华南理工大学“数学与应用数学”国家级特色专业、“数学分析”省级精品课程经费的支持

科学出版社的编辑对本教材的出版做了许多深入细致的工作　我们深表感谢.

由于我们水平有限　恳切希望同行专家以及读者对本书的不足与疏漏给予批评指正.

编　者

2012 年 5 月

目　　录

第 1 章　数列极限及其性质

1.1　关于数列和数集的某些定义

1.1.1　几个常用符号及数列的定义

定义 1.1 (关于几个常用符号的定义)　我们定义几个常用符号如下:

(1) 用 $\forall$ 表示任取定, 如 $\forall x$, 表示任取定 x.

(2) 用 $\exists$ 表示存在, 如 $\exists x$, 表示存在 x.

(3) 用 $\in$ 表示属于, 如 $x \in E$, 表示 x 属于 E.

(4) 用 $\overline{\in}$ 表示不属于, 如 $x \overline{\in} E$, 表示 x 不属于 E.

(5) 用 $[x]$ 表示小于或等于 x 的最大整数 (在此把 0 也归为整数), 如 $[-1.1] = -2$, $[0.8] = 0$, $[1.6] = 1$, $[2] = 2$ 等.

(6) 用 $(a, b) \subset [a, b]$ 表示开区间 (a, b) 被包含在闭区间 $[a, b]$ 中, 也可读作 $[a, b]$ 包含 (a, b).

(7) 称开区间 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 为 x_0 的 δ 邻域.

(8) 用 $A \Rightarrow B$ 表示由 A 推出 B, 如由 $3 < a < 4 \Rightarrow [a] = 3$.

(9) 用 $A \rightleftarrows B$ 表示 A 成立的充分必要条件是 B 成立, 如 $\dfrac{1}{m} > 1 \rightleftarrows 0 < m < 1$.

注 1.1　有时我们会将几个符号连用, 例如, $\forall x \in E$, 表示从 E 中任取定 x. 而 $\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$, 表示任取定 $\varepsilon > 0$, 存在 $N > 0$.

定义 1.2 (数列的定义)　用自然数编号的一串无穷多个实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ 称为一个数列, 简记作 $\{x_n\}$, 并称 x_n 为通项, 称自然数 n 为下标.

例 1.1　当 $x_n = \dfrac{n}{n+1}$ 时, $\{x_n\}$ 代表数列 $\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \cdots, \dfrac{n}{n+1}, \cdots$.

例 1.2　当 $y_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2}$ 时, $\{y_n\}$ 代表数列 $-1, \dfrac{1}{4}, -\dfrac{1}{9}, \cdots, \dfrac{(-1)^n}{n^2}, \cdots$.

例 1.3　当 $z_n = (-1)^n$ 时, $\{z_n\}$ 代表数列 $-1, 1, -1, \cdots, (-1)^n, \cdots$.

例 1.4　当 $w_n = n + 1$ 时, $\{w_n\}$ 代表数列 $2, 3, 4, \cdots, n+1, \cdots$.

我们把 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ 及 $\{w_n\}$ 标在数轴上, 如图 1.1~ 图 1.4 所示.

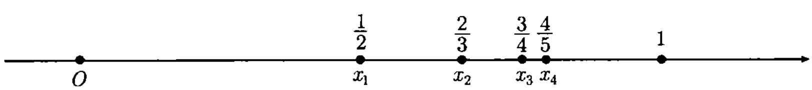

图 1.1　$\{x_n\} = \left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$ 中 x_1, x_2, x_3, x_4 在数轴上的位置示意图

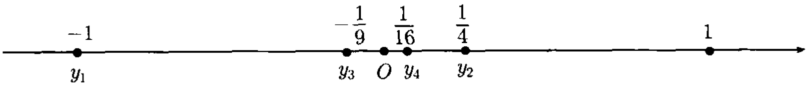

图 1.2　$\{y_n\}=\left\{\dfrac{(-1)^n}{n^2}\right\}$ 中 y_1, y_2, y_3, y_4 在数轴上的位置示意图

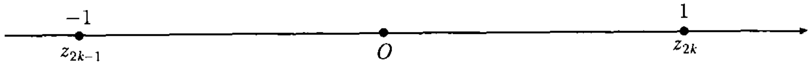

图 1.3　$\{z_n\}=\{(-1)^n\}$ 中 z_{2k-1} 及 z_{2k} 在数轴上的位置示意图

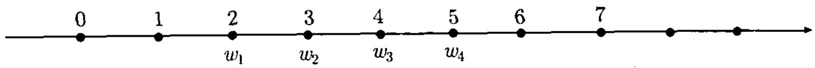

图 1.4　$\{w_n\}=\{n+1\}$ 中 w_1, w_2, w_3, w_4 在数轴上的位置示意图

1.1.2　数集的上、下确界

定义 1.3 (数集的定义)　把一些数放在一起称为一个数集. 若一个数集里的数是有限个, 称为有限数集. 若一个数集里的数是无限个, 称为无限数集.

例 1.5　用 E_1 表示小于 10 的正整数构成的数集, 则 E_1 是一个有限数集, 实际上, $E_1=\{1,2,3,\cdots,9\}$. 用 E_2 表示小于 10 的所有正数构成的数集, 则 E_2 是一个无限数集, 实际上, $E_2=\{x \mid 0<x<10\}$.

推论 1.1　一个数列也是一个数集.

定义 1.4 (最大元素与最小元素的定义)　若 $\exists x' \in E$, 使得 $\forall x \in E$ 都有 $x \leqslant x'$, 则称 x' 为 E 的最大元素, 记为 $x'=\max E$. 类似地, 若 $\exists x'' \in E$, 使得 $\forall x \in E$ 都有 $x \geqslant x''$, 则称 x'' 为 E 的最小元素, 记为 $x''=\min E$.

例 1.6　在例 1.5 中的 E_1 满足 $\max E_1=9$, $\min E_1=1$. 而 E_2 既无最大元素也无最小元素.

推论 1.2　若 E 是一个有限数集, 则 E 有最大元素和最小元素. 反之不然.

定义 1.5 (上界与下界的定义)　设 E 是一个数集, 若 $\exists M$, 对 $\forall x \in E$ 都有 $x \leqslant M$, 则称 M 是 E 的一个上界. 若 $\exists m$, 对 $\forall x \in E$ 都有 $x \geqslant m$, 则称 m 是 E 的一个下界. 若 E 既有下界又有上界, 则称 E 是一个有界集.

推论 1.3　若一个数集有上界, 则有无穷多个上界; 同样, 若一个数集有下界, 则有无穷多个下界.

例 1.7　设 $E_3=\left\{\dfrac{2}{n} \,\middle|\, n \text{ 为自然数}\right\}$, 则 $\max E_3=2$, 但 E_3 没有最小元素, 有一个下界为 0, 可见 E_3 是一个有界集. 注意到 E_3 还有很多的上界和下界, 所有大于或等于 2 的数都是它的上界, 而所有小于或等于 0 的数都是它的下界, 也就是说 2 是这个数集的最小上界, 0 是这个数集的最大下界.

例 1.8 设 $E_4=\{x \mid 1<x<2\}$, 可见 E_4 也是一个有界集. 它的最大下界是 1, 最小上界是 2.

以后我们把一个数集的最小上界称为它的上确界, 而把它的最大下界称为下确界. 下面我们用 ε 的方式来描述它们.

定义 1.6 (上确界与下确界的定义) 设 E 是一个数集, 若 $\exists\alpha$ 满足以下两条:

(1) $\forall x\in E$, 都有 $x\leqslant\alpha$;

(2) $\forall\varepsilon>0$, $\exists x_0\in E$ 满足 $x_0>\alpha-\varepsilon$,

则称 α 是 E 的上确界, 记作 $\alpha=\sup E$.

类似的, 若 $\exists\beta$ 满足以下两条:

(1) $\forall x\in E$, 都有 $x\geqslant\beta$;

(2) $\forall\varepsilon>0$, $\exists x_0\in E$ 满足 $x_0<\beta+\varepsilon$,

则称 β 是 E 的下确界, 记作 $\beta=\inf E$.

注 1.2 定义 1.6 中的 α 就是 E 的最小上界, 而 β 就是 E 的最大下界.

定理 1.1 若数集 E 有上确界, 那么上确界是唯一的. 同样, 若 E 有下确界, 那么下确界也是唯一的.

证 用反证法. 假设 E 有两个相异的上确界 a,b, 不妨设 $a<b$, 由上确界定义中的 (1) 得知, $\forall x\in E$, 都有 $x\leqslant a$. 取 $\varepsilon=\dfrac{b-a}{2}$, 由上确界定义中的 (2), $\exists x_0\in E$ 满足 $x_0>b-\varepsilon=\dfrac{a+b}{2}>a$. 综合起来就推出, $\exists x_0\in E$ 满足 $a<x_0\leqslant a$, 这就矛盾了, 说明假设不对. 这就证明了上确界的唯一性. 用同样的方法可证下确界的唯一性. □

定理 1.2 若数集 E 有最大元素, 那么 E 有上确界, 且 $\sup E=\max E$. 同样, 若数集 E 有最小元素, 那么 $\inf E=\min E$.

证 设 $x_0\in E$ 且 $x_0=\max E$, 于是 x_0 满足

(1) $\forall x\in E$, 都有 $x\leqslant x_0$;

(2) $\forall\varepsilon>0$, $\exists x_0\in E$ 满足 $x_0>x_0-\varepsilon$.

可见 x_0 满足上确界的定义, 故 $x_0=\sup E$, 即 $\max E=\sup E$. 同理可证 $\inf E=\min E$. □

例 1.9 在例 1.1 中提到的 $\{x_n\}$ 的最小元素是 $\dfrac{1}{2}$, 所以 $\dfrac{1}{2}$ 也是下确界. $\{x_n\}$ 的上确界是 1, 但 $1\in\{x_n\}$, 所以 $\{x_n\}$ 只有上确界, 而没有最大元素.

定理 1.3 有上界的数集一定有上确界, 有下界的数集一定有下确界.

证 我们只证明关于上确界的结论, 后一结论可类似地证明.

设 E 为有上界的数集. 为叙述方便, 不妨设 E 含有非负数. 由于 E 有界, 故可找到非负数 n, 使得

A$_0$) $\forall x \in E$ 有 $x < n+1$;

B$_0$) $\exists x_0 \in E$, 使 $x_0 \geqslant n$.

对半开区间 $[n, n+1)$ 作 10 等分, 分点为 $n.1, n.2, \cdots, n.9$, 则存在 $0, 1, 2, \cdots, 9$ 中的一个数 n_1, 使得

A$_1$) $\forall x \in E$ 有 $x < n.n_1 + \dfrac{1}{10}$;

B$_1$) $\exists x_1 \in E$, 使 $x_1 \geqslant n.n_1$.

再对半开区间 $\left[n.n_1, n.n_1 + \dfrac{1}{10}\right)$ 作 10 等分, 则存在 $0, 1, 2, \cdots, 9$ 中的一个数 n_2, 使得

A$_2$) $\forall x \in E$ 有 $x < n.n_1n_2 + \dfrac{1}{10^2}$;

B$_2$) $\exists x_2 \in E$, 使 $x_2 \geqslant n.n_1n_2$.

继续不断地 10 等分在前一步骤所得到的半开区间, 可知对任何 $k = 1, 2, \cdots$, 存在 $0, 1, 2, \cdots, 9$ 中的一个数 n_k, 使得

A$_k$) $\forall x \in E$ 有

$$x < n.n_1n_2\cdots n_k + \frac{1}{10^k}; \tag{1.1}$$

B$_k$) $\exists x_k \in E$, 使 $x_k \geqslant n.n_1n_2, \cdots n_k$.

将上述步骤无限地进行下去, 得到实数 $\eta = n.n_1n_2, \cdots n_k \cdots$. 以下证明 $\eta = \sup E$. 即要证明以下两条:

(1) $\forall x \in E$ 有 $x \leqslant \eta$;

(2) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x_k \in E$ 使 $x_k > \eta - \varepsilon$.

先证 (1), 用反证法. 假定 (1) 不成立, 即 $\exists x^* \in E$ 使 $x^* > \eta$, 令 $\delta = x^* - \eta$, 注意到 $\exists k$, 使 $\dfrac{1}{10^k} < \delta$, 于是就有

$$x^* = \eta + \delta > \eta + \frac{1}{10^k} > n.n_1n_2\cdots n_k + \frac{1}{10^k},$$

这就与 A$_k$) 中的不等式 (1.1) 相矛盾, 于是 (1) 得证.

下面证明 (2). 令 $\eta_k = n.n_1n_2\cdots n_k$, 注意到当 k 增大时, η_k 越来越接近 η, 故对 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists k$, 使得

$$\eta_k > \eta - \varepsilon.$$

于是由 B$_k$) 及上式就得知, $\exists x_k \in E$, 使得

$$x_k \geqslant n.n_1n_2\cdots n_k = \eta_k > \eta - \varepsilon. \qquad \square$$

例 1.10 设 $x_1 = \sqrt{2}$, $x_{n+1} = \sqrt{3 + x_n}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$, 证明数列 $\{x_n\}$ 有上

确界.

证 先用归纳法证明 x_n 是严格单增的. 注意到 x_n 恒正及

$$x_1 = \sqrt{2} < \sqrt{3+\sqrt{2}} = x_2, \tag{1.2}$$

假定

$$x_{n-1} < x_n, \tag{1.3}$$

则有

$$x_n = \sqrt{3+x_{n-1}} < \sqrt{3+x_n} = x_{n+1}. \tag{1.4}$$

这就证明了 x_n 是严格单增的. 下面证明 x_n 有界, 由上面已证明的单增性得知

$$x_n = \sqrt{3+x_{n-1}} < \sqrt{3+x_n}, \tag{1.5}$$

由式 (1.5) 可得,

$$\begin{aligned} x_n^2 < 3 + x_n \Rightarrow x_n^2 - x_n < 3 \Rightarrow \left(x_n - \frac{1}{2}\right)^2 < 3 + \frac{1}{4} \\ \Rightarrow x_n - \frac{1}{2} < \frac{\sqrt{13}}{2} \Rightarrow x_n < \frac{1+\sqrt{13}}{2}. \end{aligned} \tag{1.6}$$

这就说明了 x_n 有上界, 因此由定理 1.3 得知 $\{x_n\}$ 有上确界. □

1.1.3 数列极限的定义

先看下面的例子.

例 1.11 考虑 $y_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2}$, 当 n 趋于无穷大时, 由于分子是 -1 或 1, 而分母趋于无穷大, 故 y_n 趋于 0. 我们也可以证明 y_n 具有下面的 ε-N 性质, 即对 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$(正整数), 当 $n > N$ 时, 有 $|y_n| < \varepsilon$. 我们给出推导如下:

注意到 n 是自然数, 于是

$$|y_n| < \varepsilon \rightleftarrows \frac{1}{n^2} < \varepsilon \rightleftarrows n^2 > \frac{1}{\varepsilon} \rightleftarrows n > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}} \rightleftarrows n > \left[\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}\right]. \tag{1.7}$$

因此取 $N = \max\left\{1, \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]\right\}$, 可见, 当 $n > N$ 时, 就有 $|y_n| < \varepsilon$.

这个例子说明, y_n 具有以上 ε-N 性质的原因是当 n 趋于无穷大时, y_n 趋于 0. 下面我们用 ε-N 的方法来描述当 n 趋于无穷大时, a_n 的极限是 a.

定义 1.7 ($\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ 的定义) 设 $\{a_n\}$ 是一个数列, a 是一个确定的数 ($a \neq \infty$), 若 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$ (正整数), 当 $n > N$ 时, 有

$$|a_n - a| < \varepsilon, \tag{1.8}$$

则称数列 $\{a_n\}$ 是收敛数列, 它收敛于 a, 也称 a_n 的极限是 a, 并记作 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 或记作 $a_n \to a\ (n\to\infty)$. 该定义称为数列极限的 ε-N 定义, 它在数轴上的含义见图 1.5.

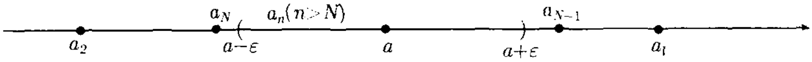

图 1.5　$\{a_n\}$ 以 a 为极限的 ε-N 定义在数轴上的示意图

注 1.3　定义 1.7 包含了下面的两个充要条件:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \rightleftarrows \forall\varepsilon>0, \exists N$, 当 $n>N$ 时, 有 $|a_n-a|<\varepsilon$.

(2) $\{a_n\}$ 不以 a 为极限 $\rightleftarrows \exists\varepsilon_0>0$, 对 $\forall N, \exists n_0>N$, 有 $|a_{n_0}-a|\geqslant\varepsilon_0$.

注 1.4　(1) 定义 1.7 中的 ε 用来描述 a_n 与 a 的距离, 所以我们强调 ε 是任意小的正数.

(2) 在定义 1.7 中, 把 $|a_n-a|<\varepsilon$ 改成 $|a_n-a|\leqslant\varepsilon$ 或 $|a_n-a|<\mu\varepsilon$ (μ 是给定的正常数), 其定义都等价.

(3) 在定义 1.7 中, 若 $a=0$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, 则称 $\{a_n\}$ 为无穷小量.

事实上, 前面我们已经用 ε-N 的定义验证了 $y_n=\dfrac{(-1)^n}{n^2}$ 的极限是 0, 现在我们再用 ε-N 的定义来证明以下三个例子中的极限.

例 1.12　证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$.

分析　要证 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$, 即对 $\forall\varepsilon>0$, 要证 $\exists N$, 当 $n>N$ 时, 有 $\left|\dfrac{n}{n+1}-1\right|<\varepsilon$. 这里的任务就是要找出 N.

证　对 $\forall\varepsilon>0$, 注意到

$$\left[\frac{1}{\varepsilon}-1\right]\leqslant\frac{1}{\varepsilon}-1<\left[\frac{1}{\varepsilon}-1\right]+1. \tag{1.9}$$

再注意到 n 是自然数, 就有下面的充要条件

$$\begin{aligned}\left|\frac{n}{n+1}-1\right|<\varepsilon &\rightleftarrows 1-\frac{n}{n+1}<\varepsilon\rightleftarrows\varepsilon(n+1)>1\\ &\rightleftarrows n>\frac{1}{\varepsilon}-1\rightleftarrows n>\left[\frac{1}{\varepsilon}-1\right].\end{aligned} \tag{1.10}$$

取 $N=\max\left\{1,\left[\dfrac{1}{\varepsilon}-1\right]\right\}$, 可见 N 是一个自然数, 当自然数 $n>N$ 时, 就有 $n>\left[\dfrac{1}{\varepsilon}-1\right]$, 这说明 n 至少是 $\left[\dfrac{1}{\varepsilon}-1\right]+1$, 所以 $n>\dfrac{1}{\varepsilon}-1$. 由 (1.10) 推知,

$\left|\dfrac{n}{n+1}-1\right|<\varepsilon.$ □

注 1.5 对 $\forall \varepsilon>0$, 有

$$\left[\frac{1}{\varepsilon}-1\right] \geqslant -1. \tag{1.11}$$

故在例 1.12 中取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}-1\right]+2$ 也可以. 若 $\forall \varepsilon>0\ (0<\varepsilon<1)$, 则有

$$\left[\frac{1}{\varepsilon}-1\right] \geqslant 0. \tag{1.12}$$

故在例 1.12 中取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}-1\right]+1$ 也可以. 这里的目的就是保证取到的 N 是自然数.

例 1.13 设 $a>1$, 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

分析 要证 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$, 即对 $\forall\varepsilon>0$, 要证 $\exists N$, 当 $n>N$ 时, 有 $|\sqrt[n]{a}-1|<\varepsilon$. 我们的任务就是要找 N.

证法 1 注意到 $a>1$, 所以对 $\forall\varepsilon>0$, 有下面的充要条件

$$\begin{aligned}|\sqrt[n]{a}-1|<\varepsilon &\rightleftarrows a^{\frac{1}{n}}<\varepsilon+1\\ &\rightleftarrows \frac{1}{n}\ln a<\ln(1+\varepsilon)\rightleftarrows n>\frac{\ln a}{\ln(1+\varepsilon)}.\end{aligned} \tag{1.13}$$

因此, 取 $N=\left[\dfrac{\ln a}{\ln(1+\varepsilon)}\right]+1$ 即可. 这就是说, 只要 $n>N$ 时, 就有 $|\sqrt[n]{a}-1|<\varepsilon$. 这就证明了 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$. □

证法 2 注意到对每一个给定的 n, 都有 $\sqrt[n]{a}-1>0$, 令 $\alpha_n=\sqrt[n]{a}-1$, 容易看到,

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1\rightleftarrows\lim_{n\to\infty}(\sqrt[n]{a}-1)=0\rightleftarrows\lim_{n\to\infty}\alpha_n=0.$$

现在证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$. 再注意到

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{a}=1+\alpha_n&\Rightarrow a=(1+\alpha_n)^n\Rightarrow a=1+n\alpha_n+\cdots\Rightarrow a>n\alpha_n\\ &\Rightarrow 0<\alpha_n<\frac{1}{n}.\end{aligned}$$

因此, 对 $\forall\varepsilon>0$, 只要 $\dfrac{1}{n}<\varepsilon$, 就有 $0<\alpha_n<\varepsilon$. 取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1$, 可见, 只要 $n>N$, 就有 $|\alpha_n-0|<\varepsilon$. 这就证明了 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$, 即证明了 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$. □

例 1.14　证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3}{3^n}=0$.

分析　对 $\forall\varepsilon>0$, 要证 $\exists N$, 当 $n>N$ 时, 有 $0<\dfrac{n^3}{3^n}<\varepsilon$.

证　注意到二项式公式

$$\begin{aligned}(a+b)^n=&a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)a^{n-2}b^2}{2!}+\frac{n(n-1)(n-2)a^{n-3}b^3}{3!}\\&+\cdots+\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)a^{n-k}b^k}{k!}+\cdots+b^n.\end{aligned}\tag{1.14}$$

由式 (1.14) 有

$$3^n=(1+2)^n>\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\cdot 2^4}{4!}=\frac{2n(n-1)(n-2)(n-3)}{3}.\tag{1.15}$$

由式 (1.15) 得

$$\frac{n^3}{3^n}<\frac{3n^3}{2n(n-1)(n-2)(n-3)}<\frac{3n^2}{(n-3)^3}.$$

注意到当 $n>6$ 时, 有 $n-3>\dfrac{n}{2}$, 所以, 当 $n>6$ 时, 有

$$\frac{n^3}{3^n}<\frac{3n^2}{(n-3)^3}<\frac{3n^2}{\left(\dfrac{n}{2}\right)^3}=\frac{24}{n}.\tag{1.16}$$

由式 (1.16) 看到, 对 $\forall\varepsilon>0$, 只要 $\dfrac{24}{n}<\varepsilon$ 就有 $\dfrac{n^3}{3^n}<\varepsilon$. 因此取 $N=\max\left\{6,\ \left[\dfrac{24}{\varepsilon}\right]\right\}$, 当 $n>N$ 时, 就有 $0<\dfrac{n^3}{3^n}<\dfrac{24}{n}<\varepsilon$. □

注 1.6　从以上几个例子看到, 用 ε-N 定义去证明某个数列 $\{a_n\}$ 的极限是 a 的方法为: 对 $\forall\varepsilon>0$, 利用不等式, 建立 n 与 ε 的关系, 确定出 N, 使得当 $n>N$ 时, 有

$$|a_n-a|<\varepsilon.$$

习　题　1.1

1. 写出数列 $\{x_n\}$ 的前 4 项, 其中

(1) $x_n=1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}\quad(n=1,2,\cdots)$;

(2) $x_n=\dfrac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}2^n$.

2. 从定义出发证明下确界的唯一性.

3. 根据有上界的数集必有上确界、有下界的数集必有下确界的原理, 试证收敛数列必有上确界和下确界, 趋于 $+\infty$ 的数列必有下确界, 趋于 $-\infty$ 的数列必有上确界.

4. 分别求出数列 $\{x_n\}$ 的上、下确界：

(1) $x_n = 2 - \dfrac{1}{n}$;

(2) $x_n = -\dfrac{1}{n}[3 + (-3)^n]$;

(3) $x_{2k} = \dfrac{1}{k}$, $x_{2k+1} = 4 + \dfrac{1}{k}$ $(k = 1, 2, 3, \cdots)$.

5. 按 ε-N 定义证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n-1}{n+1} = 1$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2+n}{4n^2-1} = \dfrac{3}{4}$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[4]{n}} = 0$;

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin\dfrac{n\pi}{2}}{n+1} = 0$;

(5) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{a^n} = 0\ (a > 1)$;

(6) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+10} - \sqrt{n}) = 0$.

6. 举例说明下列关于无穷小量的定义是错误的：

(1) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$, 当 $n > N$ 时, 有 $x_n < \varepsilon$;

(2) $\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ 无限多个 x_n, 使 $|x_n| < \varepsilon$.

7. 按定义证明, 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 则对任一自然数 k, 有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+k} = a$.

1.2 数列极限的某些性质及四则运算

1.2.1 数列极限的某些性质

性质 1.1 若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, 且 $a > b$, 则 $\exists N$, 当 $n > N$ 时, 有 $a_n > b_n$.

证 为了直观, 我们将 a 和 b 标在数轴上 (见图 1.6).

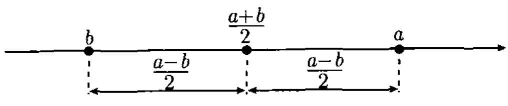

图 1.6 a, b 及其中点的示意图

注意到 a 和 b 之间的中点为 $\dfrac{a+b}{2}$, a 到中点以及 b 到中点的距离都是 $\dfrac{a-b}{2}$. 于是我们取 $\varepsilon_0 = \dfrac{a-b}{2}$, 由题意, $\exists N_1$ 及 N_2, 当 $n > N_1$ 时, 有 $|a_n - a| < \dfrac{a-b}{2}$, 即

$$\frac{a+b}{2} < a_n < \frac{3a-b}{2}, \tag{1.17}$$

而当 $n > N_2$ 时, 有 $|b_n - b| < \dfrac{a-b}{2}$, 即