球面三角術

李光蔭著

商務印書館發行

球面三角術

李光蔭著

商務印書館發行

一九三七年一月初版
一九五〇年二月三版

球面三角術一册

(51114)

基價肆元伍角
印刷地點外另加運費

著作者　李光蔭
發行人　陳懋解　上海河南中路
印刷所　商務印書館印刷廠
發行所　商務印書館　各地

序

球面三角術之應用甚廣.就其應用於天文學者言之,如球面天文學,應用天文學,航海天文學等之主要算法多惟球面三角是賴.就其應用於測地學者言之,如測定地球之形狀與體量及地面上一部分之圖形等,均先定一基線;基線既定,選設測站,分成三角網,是項三角形皆球面三角形也.他如鐵道工程等計算亦多應用之.現今我國建設事業日興,其需用斯學者更亟.惜乎我國尚無是書出版,以供參考.

二十三年夏余任職國立中央研究院天文研究所時,因推算上之需要,復將斯學從新整理一次,遂成本書,茲特公之於世,以求同好者之教正.

本書編成後,蒙天文研究所所長余青松先生專任研究員高平子陳遵嬀二先生詳爲審查,特此鳴謝.

李光蔭二十四年七月

於南京紫金山天文臺

目錄

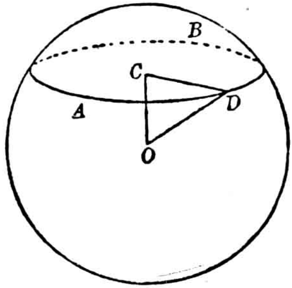
球面三角術

I

大圓及小圓

1. 空間距一定點等遠之點之軌跡曰球面,球面所包容之立體曰球,該定點爲球心.連結球心及球面上任一點之直線曰球之半徑,任一經過球心而兩端抵於球面之直線曰球之直徑.

2. 球面與任一平面之相交處必爲一圓.



(圖 1)

命O爲球心,AB爲球面與任一平面之相交處.作OC

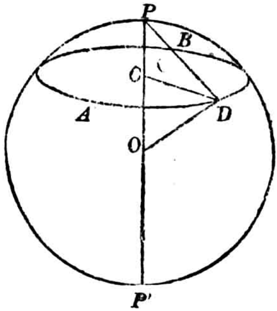
垂直於平面取相交處之任一點D,連接OD, CD;因OC垂直於平面,故角OCD爲直角,因之$CD=\sqrt{OD^2-OC^2}$.今O與C皆爲定點,故OC爲定長;且OD乃球之半徑,故亦爲定長;故CD爲定長.故知相交處所有之點距定點C等遠;故此相交處必爲以C爲圓心之圓.

若此平面經過球心,其與球面之相交處爲一大圓;否則爲一小圓.由之可知大圓之半徑與球之半徑相等.

3. 經過球心及球面上之任兩點(惟非同一直徑之兩端)必可作一平面,且僅可作一平面.故經過球面上任二已知點(須非同一直徑之兩端)僅可作一大圓,且此大圓必被此二已知點分爲不相等之兩段;兹爲簡便起見稱此兩段中之較短者爲連接此二已知點之大圓弧.

4. 垂直於球面上任一圓所在之平面之直徑名曰該圓之軸,軸之兩端名曰該圓之兩極.大圓之兩極距該圓之平面等遠.小圓之兩極距該圓之平面不等遠.距其平面近者曰近極,遠者曰遠極,近極亦恆簡稱曰極.

5. 圓之任一極距該圓上所有之點等遠.

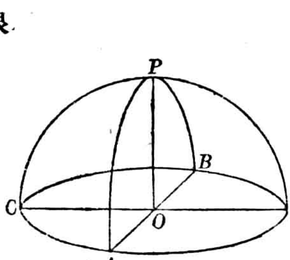


(圖 2)

命 O 爲球心, AB 爲球面上之任一圓, C 爲圓心, P 與 P' 爲圓之兩極.取圓上之任一點 D;連接 CD, OD, PD. 於是 $PD=\sqrt{PC^2+CD^2}$. 今 PC 與 CD 爲定長,故 PD 爲定長.設經 P 與 D 作大圓;因 PD 爲定長,故無論 D 在 AB 圓上位於何處, P 與 D 間之大圓弧亦必爲定長.

故圓之一極與圓上任一點之距離均相等.

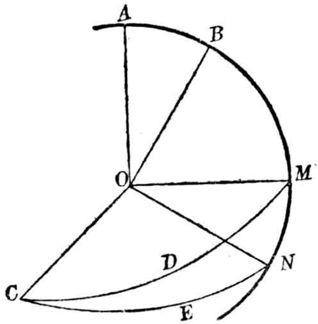
6 由一大圓之一極至此大圓之圓周所作之大圓弧必爲一象限.



(圖 3)

命P爲大圓ABC之一極,O爲球心,PA爲由P至ABC之圓周之任一大圓弦.作OP;因P爲ABC之一極,故PO垂直於平面ABC,故角POA爲直角.PA弧爲一象限.

7. 連結兩大圓之極之大圓弧在球心所對之角必等於此兩大圓之平面之傾斜角.



(圖 4)

命O爲球心,CD與CE爲相交於C之兩大圓,A爲CD之極,B爲CE之極.

經A與B作大圓遇CD於M,遇CE於N;則AO垂直於平面OCD內之OC,而BO垂直於平面OCE內之OC;故OC垂直於平面AOB且垂直於平面AOB內之OM及ON.故角MON爲平面OCD與平面OCE之傾斜角.且

角AOB=角AOM－角BOM=角BON－角BOM=角MON.

8 兩大圓間之角卽指兩大圓之平面之傾斜角而言.故圖4中大圓CD與大圓CE間之角爲角MON

因PO(圖2)垂直於平面ACB,故凡包含PO之平面必垂直於平面ACB.故任一圓與任一經過該圓之兩極之大圓間之角必爲一直角.

9. 兩大圓必互相平分.

因每大圓之平面經過球心,故兩大圓之平面之相交線必爲球之直徑,且必爲其每大圓之直徑.故此兩大圓必在其相遇之兩點互相平分.

10 設P, A, C爲球面上之任三點,惟A與C非爲同一直徑之兩端;若P與A間及P與C間之兩大圓弧各等於一象限,P必爲經過A與C之大圓之一極(參閱圖3).

設PA與PC各爲一象限,O爲球心;則POC與POA必各爲一直角,故PO必垂直於平面AOC,P必爲大圓AC之一極.

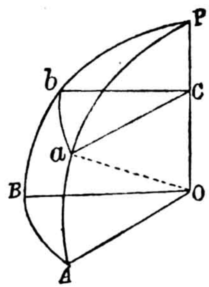
11. 經過大圓之兩極之諸大圓稱爲該大圓之諸副圓.例如圖4中C爲大圓$ABMN$之一極,故CM與CN爲大圓$ABMN$之副圓之部分.且大圓CM與大圓CN間之角以大圓弧MN度之;卽一大圓之任兩副圓間之

角恆以此兩副圓在該大圓上所夾之弧度之

12 設由球面上一點作不在同一大圓上之大圓弧二;若此兩大圓弧之平面皆垂直於某已知圓之平面,則該點必爲此已知圓之一極.

因此兩大圓弧之平面皆垂直於已知圓之平面,故此兩大圓弧之平面之相交線必垂直於此已知圓之平面,故爲此已知圓之軸.故該點爲已知圓之一極

13. 設某小圓弧在其圓心所對之角等於某大圓弧在球心所對之角,求此小圓弧與大圓弧之比.



(圖 5)

命 ab 爲小圓弧,C 爲圓心 P 爲其極;O 爲球心

經 P 作大圓 PaA 與 PbB 各遇以 P 爲一極之大圓於 A 與 B;連結 Ca, Cb, OA, OB. 因平面 aCb 與平面 AOB 皆垂直於 OP,故 Ca, Cb, OA, OB 皆垂直於 OP;故 Ca 與 OA 之

行，Cb 與 OB 平行. 故角 $aCb =$ 角 AOB. 故

$$\frac{\widehat{ab}}{\overline{Ca}} = \frac{\widehat{AB}}{\overline{OA}}; \quad \text{故}$$

$$\frac{\widehat{ab}}{\widehat{AB}} = \frac{Ca}{OA} = \frac{Ca}{Oa} = \sin POa$$

II

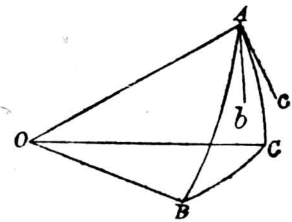
球面三角形

14. 設有三平面相交於球心,而在球心構成一三面角,則此三平面各與球面相交於一大圓弧,此三大圓弧在球面上所構成之圖形卽爲一球面三角形.

構成球面三角形之三大圓弧名曰該球面三角形之邊,每兩邊相交之點名曰該球面三角形之頂.每兩邊在頂所成之角名曰該球面三角形之角.

球面三角術之主要目的在講求解球面三角形之方法.

15. 球面三角術之主要部分爲球面三角形之角



(圖 6)

與邊之相互關係之討論;故讀者對於球面三角形及其形素須先獲得一正確而清晰之概念.

命O爲球心,設三平面在O點構成一三面角,更命AB, BC, CA爲此三平面與球面相交之弧;則ABC卽爲一球面三角形,而AB, BC, CA皆爲其邊.設Ab爲與AB相切於A之直線,Ac爲與AC相切於A之直線,且Ab與Ac皆爲由A而分向B與C所作者;則角bAc卽爲此球面三角形之一角.其在B點與C點之他二角亦以同法而成者.

可見球面三角形之角乃構成該三面角之平面間之角;蓋Ab與Ac皆垂直於OA,故角bAc爲平面OAB與平面OAC之傾斜角.

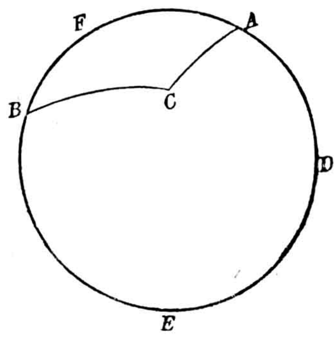
所謂球面三角形之邊實際皆爲大圓弧.而此諸大圓弧與構成三面角之平面角成正比.如AB(圖6)爲球面三角形ABC之邊,而平面角AOB以$\frac{\widehat{AB}}{OA}$度之;故就同一球言,AB與角AOB實成正比.

16. A, B, C等字母通常用以名球面三角形之角,而a, b, c等用以名其邊.惟吾人若確知角之單位,A, B, C等字母亦可用以表角之數值;例如若C爲直角,卽可言$C=90^\circ$或$C=\frac{\pi}{2}$,前者乃以度爲角之單位,後者乃

以與半徑等長之弧在圓心所對之角(本位弧)為角之單位.球面三角形之邊亦如之;因各邊與在球心所對之平面角成正比,故可用a, b, c等字母以表此諸平面角之數值,初不論其單位為何種也.

17. 球面三角形之各邊均限定小於半圓.

此僅為便於研究起見所設之限制;惟今已成為公認之慣例矣.



(圖 7)

$ADEB$實大於半圓.若吾人欲以BC, CA, $ADEB$為構成一球面三角形之三大圓弧亦未嘗不可.惟吾人已同意將此類球面三角形置之而不予討論;且所謂球面三角形ABC者不言而知其為AFB, BC與CA所構成之球面三角形.

18. 由17節之限制知球面三角形之任一角必小於二直角

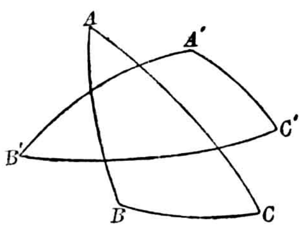
設 BC (圖 7), CA, $ADEB$ 所構成之球面三角形中之角 BCA 大於二直角；命 D 爲 BC 延長後與 AE 相遇之點,則 BED 必爲一半圓(參閱9節),故 BEA 必大於半圓，故所設之球面三角形不屬於吾人所討論者.

III

關於球面三角形之幾何定理

19 球面三角形之角與邊之相互關係在球面三角術中皆應用角與邊之三角函數討論之.今先蒐集關於球面三角形之角與邊之關係之諸幾何定理於下,暫不涉及其三角函數.

20. 極三角形.



(圖 8)

命 ABC 爲任一球面三角形,更命 A' 爲 BC 之極,B' 爲 CA 之極,C' 爲 AB 之極;且 A' 與 BC 之對頂 A 位於 BC 之同側,B' 與 CA 之對頂 B 位於 CA 之同側,C' 與 AB 之對頂 C 位於 AB 之同側;則球面三角形 $A'B'C'$ 名爲 ABC