高等教育公共基础课规划教材

高等数学

GAODENG SHUXUE

主　编　冯海亮
副主编　王仁健

重庆大学出版社
http://www.cqup.com.cn

高等数学

主　编　冯海亮
副主编　王仁健
参　编　姚　云

重庆大学出版社

内 容 提 要

本书是根据全国高校网络教育考试委员会颁布的试点高校网络教育公共基础课全国统一考试"……学"考试大纲,遵循应用型人才的培养目标,针对继续教育,特别是学历继续教育学生的特点,结合……的数学实践体会编写而成.全书内容共分8章,分别为函数与极限、一元函数微分学、不定积分、定积分及其应用、向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、二重积分、无穷级数和常微分方程.本书章节后附有习题,书后附有参考答案、考试大纲及常用公式.

本书也可作为应用本科、网络教育本专科、高职高专相关专业的高等数学教材或学生的参考用书,也可供工程技术人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/冯海亮主编. —重庆:重庆大学出版社,2013.2

ISBN 978-7-5624-7232-2

Ⅰ.①高… Ⅱ.①冯… Ⅲ.①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ.①013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第027177号

高等数学

主 编 冯海亮

副主编 王仁健

责任编辑:曾显跃 版式设计:曾显跃

责任校对:刘 真 责任印制:赵 晟

*

重庆大学出版社出版发行

出版人:邓晓益

社址:重庆市沙坪坝区大学城西路21号

邮编:401331

电话:(023) 88617183 88617185(中小学)

传真:(023) 88617186 88617166

网址:http://www.cqup.com.cn

邮箱:fxk@cqup.com.cn(营销中心)

全国新华书店经销

自贡兴华印务有限公司印刷

*

开本:787×1092 1/16 印张:20.5 字数:512千

2013年2月第1版 2013年2月第1次印刷

印数:1—3 000

ISBN 978-7-5624-7232-2 定价:38.00元

前　言

随着我国高等教育大众化和终身学习体系的构建，继续教育在高等教育体系中的地位和作用正在发生新的变化，进而导致继续教育的服务对象、服务途径、服务内容也发生了新的变化. 继续教育正在向满足人们的多样化、全面发展的教育需求的角色及功能转变. 高等数学作为继续教育，特别是学历继续教育涉及工学、经济学、管理学等学科许多专业的一门必修的重要基础课，其教学日益受到学生专业跨度大、文化程度参差不齐、基础理论差、工学矛盾突出等问题的严重困扰，如何排解这些困扰，是广大继续教育管理者及高等数学老师必须面对的一个问题. 重庆大学继续教育学院数学教研组，参照全国高校网络教育考试委员会颁布的试点高校网络教育公共基础课全国统一考试高等数学考试大纲，遵循应用型人才的培养目标，针对学历继续教育学生的特点，结合多年的教学实践经验，编写了本教材，这是我们对继续教育高等数学课程进行改革的探索.

本书的编写力求遵循应用型人才的培养目标，针对从业人员继续教育的特点，坚持以"应用"为目的，以"掌握概念、强化应用、培养能力"为重点，以"必需、够用"为原则. 为了便于教学和自学，在概念的介绍过程中力求由实际问题出发，在文字表述上努力做到详尽通畅、浅显易懂，在习题配置上降低技巧难度而进一步突出基本题型.

全书包括函数与极限、一元函数微分学、不定积分、定积分及其应用、多元函数微分学、二重积分、无穷级数和常微分方程等，各章节均配有较为丰富的例题和习题，书末附有习题答案，以方便学生自学.

本书第 1 章、第 3 章、第 4 章、第 5 章、第 6 章、第 7 章由冯海亮同志编写，第 8 章、第 9 章由王仁健同志编写，第 2 章由姚云同志编写. 全书由冯海亮担任主编，王仁健担任副主编.

本书可作为学历继续教育本科层次的基本教学内容；如去掉书中带"＊"的章节，可作为学历继续教育专科层次的基本教学内容；书中带"＊"的章节，可作为学历继续教育专升本的基本教学内容.

重庆大学叶仲全教授和重庆师范大学高世泽教授审阅了全书，并提出了许多中肯有益的修改意见，作者在此向他们谨致谢意.

由于编者水平有限，书中一定存在很多不足之处，希望得到读者的批评指正.

编　者

2012 年 10 月

目 录

第 1 章 函数、极限与连续 …… 1
1.1 函数的基本概念 …… 1
习题 1.1 …… 10
1.2 数列的极限 …… 11
习题 1.2 …… 17
1.3 函数的极限 …… 18
习题 1.3 …… 23
1.4 两个重要的极限 …… 24
习题 1.4 …… 28
1.5 无穷小与无穷大 …… 29
习题 1.5 …… 33
1.6 函数的连续性 …… 34
习题 1.6 …… 39
复习题 …… 40

第 2 章 一元函数微分学 …… 44
2.1 导数的概念 …… 44
习题 2.1 …… 48
2.2 求导法则、初等函数的导数 …… 50
习题 2.2 …… 56
2.3 高阶导数 …… 58
习题 2.3 …… 59
2.4 微分及其应用 …… 60
习题 2.4 …… 64
*2.5 微分中值定理 …… 66
习题 2.5 …… 68
2.6 洛必达法则 …… 69
习题 2.6 …… 71
2.7 函数的单调性与函数图形的凹凸性 …… 72
习题 2.7 …… 75
2.8 函数的极值与最值 …… 76
习题 2.8 …… 80

2.9 函数的水平渐近线与铅直渐近线……………………………………………………………… 81
习题 2.9 ……………………………………………………………………………………………… 83
复习题 ………………………………………………………………………………………………… 83

第 3 章 不定积分 ………………………………………………………………………………… 85
3.1 不定积分的概念与性质………………………………………………………………………… 85
习题 3.1 ……………………………………………………………………………………………… 89
3.2 第一类换元积分法……………………………………………………………………………… 91
习题 3.2 ……………………………………………………………………………………………… 97
3.3 第二类换元积分法……………………………………………………………………………… 98
习题 3.3 …………………………………………………………………………………………… 103
3.4 不定积分的分部积分法 ……………………………………………………………………… 103
习题 3.4 …………………………………………………………………………………………… 107
复习题………………………………………………………………………………………………… 108

第 4 章 定积分及其应用…………………………………………………………………………… 111
4.1 定积分的基本概念 …………………………………………………………………………… 111
习题 4.1 …………………………………………………………………………………………… 115
4.2 定积分的性质 ………………………………………………………………………………… 116
习题 4.2 …………………………………………………………………………………………… 118
4.3 微积分基本定理 ……………………………………………………………………………… 119
习题 4.3 …………………………………………………………………………………………… 123
4.4 定积分的换元积分法与分部积分法 ………………………………………………………… 124
习题 4.4 …………………………………………………………………………………………… 128
4.5 定积分的应用 ………………………………………………………………………………… 129
习题 4.5 …………………………………………………………………………………………… 133
4.6 广义积分 ……………………………………………………………………………………… 135
习题 4.6 …………………………………………………………………………………………… 139
复习题………………………………………………………………………………………………… 140

第 5 章 向量代数与空间解析几何………………………………………………………………… 145
5.1 空间直角坐标系 ……………………………………………………………………………… 145
习题 5.1 …………………………………………………………………………………………… 147
5.2 向量及其线性运算 …………………………………………………………………………… 147
习题 5.2 …………………………………………………………………………………………… 150
5.3 向量的坐标 …………………………………………………………………………………… 150
习题 5.3 …………………………………………………………………………………………… 155

5.4　向量的数量积、向量积 …… 155
习题 5.4 …… 159
5.5　空间曲面及其方程 …… 159
习题 5.5 …… 163
5.6　空间曲线及其方程 …… 163
习题 5.6 …… 165
5.7　平面及其方程 …… 166
习题 5.7 …… 170
5.8　空间直线及其方程 …… 171
习题 5.8 …… 174
复习题 …… 175

*第 6 章　多元函数微分学 …… 177
6.1　多元函数的基本概念 …… 177
习题 6.1 …… 181
6.2　偏导数 …… 183
习题 6.2 …… 186
6.3　全微分 …… 188
习题 6.3 …… 191
6.4　复合函数与隐函数求导法 …… 192
习题 6.4 …… 198
6.5　多元函数的极值 …… 199
习题 6.5 …… 203
复习题 …… 204

*第 7 章　二重积分 …… 207
7.1　二重积分的概念与性质 …… 207
习题 7.1 …… 211
7.2　直角坐标系下二重积分的计算 …… 212
习题 7.2 …… 219
7.3　极坐标系下二重积分的计算 …… 220
习题 7.3 …… 224
7.4　二重积分的应用 …… 224
习题 7.4 …… 229
复习题 …… 229

*第 8 章　无穷级数 …… 231

8.1 常数项级数的概念与性质 …… 231
习题8.1 …… 234
8.2 常数项级数的审敛法 …… 235
习题8.2 …… 239
8.3 幂级数 …… 240
习题8.3 …… 245
8.4 函数的幂级数展开式 …… 245
习题8.4 …… 247
复习题 …… 248

第9章 常微分方程 …… 250
9.1 微分方程的基本概念 …… 250
习题9.1 …… 252
9.2 可分离变量的微分方程 …… 253
习题9.2 …… 255
9.3 齐次微分方程 …… 255
习题9.3 …… 256
9.4 一阶线性微分方程 …… 257
习题9.4 …… 260
9.5 二阶常系数线性微分方程 …… 261
习题9.5 …… 264
9.6 微分方程的应用举例 …… 265
复习题 …… 267

习题参考答案 …… 270

附录 …… 300
附录A 考试大纲 …… 300
附录B 常用公式 …… 315

参考文献 …… 319

第 1 章
函数、极限与连续

函数是高等数学的主要研究对象. 所谓函数关系,就是变量之间的对应关系. 极限方法是研究变量的一种基本方法. 本章介绍函数、函数的极限和函数的连续性等概念.

1.1 函数的基本概念

1.1.1 集合与区间

(1)集合

在数学中,把任意指定的有限多个或无限多个事物所组成的总体称为一个集合,通常用大写英文字母 $A,B,C,\cdots$ 来表示,组成集合的事物称为该集合的元素. 若事物 a 是集合 M 的一个元素,就记 $a\in M$(读作 a 属于 M);若事物 a 不是集合 M 的一个元素,就记 $a\notin M$(读作 a 不属于 M);集合有时也简称为集.

注意

①对于一个给定的集合,要具有确定性的特征,即对于任何一个事物或元素,能够判断它属于或不属于给定的集合,二者必居其一.

②对于一个给定的集合,其中的元素应是互异的,完全相同的元素,不论数量多少,在一个集合里只算作一个元素,就是说,同一个元素在同一个集合里不能重复出现.

③若一集合只有有限个元素,就称为**有限集**;否则称为**无限集**;不含任何元素的集合称为空集,记为$\varnothing$,空集是任何集合的子集.

(2)集合的表示法

表示集合的方法,常见的有列举法和描述法两种.

列举法:按任意顺序列出集合的所有元素,并用花括号{ }括起来,这种方法称为列举法.

例如,方程 $x^2+2x-3=0$ 根的集合 A,可表示为 $A=\{-3,1\}$.

描述法:设 $P(a)$ 为某个与 a 有关的条件或法则,将满足 $P(a)$ 的所有元素 a 构成的集合 A 表示为 $A=\{a\mid P(a)\}$,这种方法称为描述法.

例如,由不等式 $x-3>2$ 的解构成的集合可表示为 $A=\{x\mid x>5\}$,由抛物线 $y=x^2+3$ 上

的点(x,y)构成的集合可表示为$A=\{(x,y)\mid y=x^2+3\}$.

全体自然数的集合记为**N**,全体整数的集合记为**Z**,全体有理数的集合记为**Q**,全体实数的集合记为**R**. 以后在不特别说明的情况下考虑的集合均为实数集.

(3)集合间的基本关系

若集合A的元素都是集合B的元素,即若有$x\in A$,必有$x\in B$,就称A为B的子集,记为$A\subset B$或$B\supset A$(读作B包含A). 显然,$N\subset Z\subset Q\subset R$. 若$A\subset B$,同时$B\subset A$,就称$A,B$相等,记为$A=B$.

(4)区间

设a和b都是实数,且$a<b$,则数集$\{x\mid a<x<b\}$称为**开区间**,记作(a,b),即$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$. a和b称为开区间(a,b)的端点,这里$a\notin(a,b)$,$b\notin(a,b)$.

数集$\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$称为**闭区间**,记作$[a,b]$,即$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$. a和b称为闭区间$[a,b]$的端点,这里$a\in[a,b]$,$b\in[a,b]$.

类似地还有

$$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$$
$$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$$

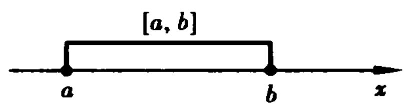
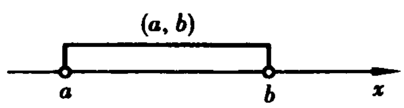
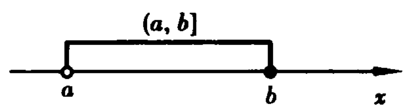
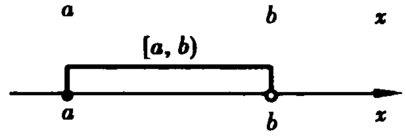
$[a,b)$和$(a,b]$都称为半开区间.

以上这些区间都称为有限区间,数$b-a$称为这些区间的长度. 从数轴上看,这些有限区间是长度为有限的线段. 此外还有无限区间,引进记号$+\infty$(读作正无穷大)及$-\infty$(读作负无穷大),则可类似地给出下面的无限区间,即

$$[a,+\infty)=\{x\mid a\leqslant x\}$$
$$(-\infty,b)=\{x\mid x<b\}$$
$$(-\infty,+\infty)=\{x\mid x\in\mathbf{R}\}$$

区间可以在数轴上直观地表示出来,见表1.1.

表1.1

区间的名称	区间满足的不等式	区间的记号	区间在数轴上的表示
闭区间	$a\leqslant x\leqslant b$	$[a,b]$	
开区间	$a<x<b$	(a,b)	
半开区间	$a<x\leqslant b$ 或$a\leqslant x<b$	$(a,b]$或 $[a,b)$	 

(5)邻域

设δ是任一正数,a为某一实数,数集$\{x\mid |x-a|<\delta\}$称为点a的δ邻域,记作$U(a,\delta)$,

即 $U(a,\delta)=\{x\mid |x-a|<\delta\}$，点 a 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径.

由于 $a-\delta<x<a+\delta$ 相当于 $|x-a|<\delta$，因此，$U(a,\delta)=\{x\mid a-\delta<x<a+\delta\}$，也就是开区间 $(a-\delta,a+\delta)$，因为 $|x-a|$ 表示点 x 与点 a 间的距离，所以 $U(a,\delta)$ 表示与点 a 距离小于 δ 的一切点 x 的集合.

例如：$|x-2|<1$，即为以点 $a=2$ 为中心，以 1 为半径的邻域，也就是开区间 $(1,3)$.

有时用到的邻域需要把邻域中心去掉. 点 a 的 δ 邻域去掉中心 a 后，称为点 a 的去心的 δ 邻域，记作 $\mathring{U}(a,\delta)$，即 $\mathring{U}(a,\delta)=\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}$. 这里 $0<|x-a|$ 表示 $x\neq a$.

例如：$0<|x-2|<1$，即为以点 $a=2$ 为中心，半径为 1 的去心邻域 $(1,2)\cup(2,3)$.

1.1.2　函数概念

在观察自然现象、经济或工程技术活动中，常常会遇到各种不同的量，它们之间往往不是孤立的，而是相互依赖、相互制约的. 相互依赖的变量之间的关系，在数学上就称为变量之间的函数关系.

引例 1　圆的面积 A 与其半径 r 之间的相互关系为 $A=\pi r^2$，当 r 在 $(0,+\infty)$ 内任意取定一个数值时，就可以由上式确定圆面积 A 的对应数值.

引例 2　某气象站用自动记录仪记录下某地一昼夜气温的变化情况，图 1.1 是温度记录仪在坐标纸上画出的温度变化曲线图，其中横坐标表示时间 t，纵坐标表示温度 T，它形象地表示出温度 T 随时间 t 变化而变化的规律，对于某一确定的时间 $t(0\leqslant t\leqslant 24)$，就有一个确定的 T 值与之对应.

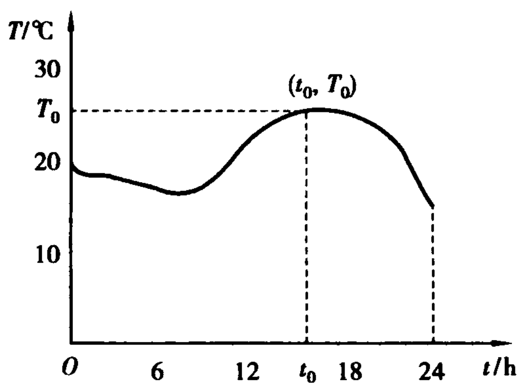


图 1.1

引例 3　某商店记录了毛线历年来的月销售量（单位：kg），并将近 10 年来的平均月销售量列成表，见表 1.2。

表 1.2

月　份 t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
销售量 S	81	84	45	49	9	5	6	17	94	161	144	123

表 1.2 表示了该商店毛线的销售量 S 与月份 t 之间的相互关系，且当 t 在 $1,2,3,\cdots,12$ 中任意取定一个数值时，从表中就可以确定一个平均月销售量 S 的对应值.

以上引例，其具体意义虽各不相同，但它们有一个共同的特点，就是它们都表达了两个变量之间的相互关系，并为这种关系给出了一种对应规则，根据这一规则，当其中一个变量在其变化范围内任取一个数值时，另一变量就有确定的值与之对应. 两个变量之间的这种对应关系就是函数概念的本质. 于是抽象成如下函数定义.

(1) 函数定义

定义 1.1　设有两个变量 x 和 y，D 是一个给定的数集，如果对于任意给定的 $x\in D$，变量 y 按照一定法则 f，总有确定数值与 x 对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$.

其中数集 D 称为这个函数的定义域,x 称为自变量,y 称为因变量,y 的取值范围称为函数的值域. $y=f(x)$ 在几何上通常表示二维空间 xOy 平面上的一条曲线. 对于任意 $x\in D$,若 y 只有唯一数值与之对应,则称 $y=f(x)$ 为单值函数,否则称为多值函数,这里主要讨论单值函数. 函数通常用解析式(如引例1)、图形(如引例2)或表格(如引例3)来表示.

由函数的定义可知,两个函数相同的充分必要条件是其定义域与对应法则完全相同. 如 $f(x)=\sqrt[3]{x^4-x^3}$ 与 $g(x)=x\sqrt[3]{x-1}$ 的定义域都是 $(-\infty,+\infty)$,而且对应法则也相同,故 $f(x)=g(x)$,而函数 $f(x)=x$ 与 $g(x)=\dfrac{x^2-x}{x-1}$ 由于定义域不同,故 $f(x)\neq g(x)$.

对任意实数 x,记 $[x]$ 为不超过 x 的最大整数,称 $f(x)=[x]$ 为取整函数. 例如,$[\sqrt{2}]=1$,$[\pi]=3$,$[-\pi]=-4$,函数 $[x]$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$,值域为整数集.

(2)函数定义域的求法

关于函数定义域 D 的确定,一般原则是:

①对于反映实际问题的函数关系,其 D 由所研究的实际问题确定.

②对于纯数学上的函数关系,其 D 规定为使函数表达式保持有意义的一切自变量的全体. 常见的情况有:分数的分母不能为零;负数不能开偶次方;零和负数不能取对数;$\arcsin x$,$\arccos x$ 要求 $-1\leqslant x\leqslant 1$ 等,同时含有上述式子时,要求是使各部分都成立的交集.

例 1.1 求下列函数的定义域.

(1) $y=\sqrt{4-x^2}+\ln(x^2-1)$　　(2) $y=\dfrac{1}{x}-\sqrt{1-x^2}$

(3) $y=\arcsin\dfrac{x-1}{5}+\dfrac{1}{\sqrt{25-x^2}}$

解 (1)当 $4-x^2\geqslant 0$ 且 $x^2-1>0$ 时,函数 y 才能取得确定的函数值,故 y 的定义域为 $-2\leqslant x\leqslant 2$ 且 $x<-1$ 或 $x>1$,取其交集得 $[-2,-1)\cup(1,2]$.

(2)当 $x\neq 0$ 且 $1-x^2\geqslant 0$ 时,函数 y 才能取得确定的函数值,故 y 的定义域为 $x\neq 0$ 且 $-1\leqslant x\leqslant 1$,取其交集得 $[-1,0)\cup(0,1]$.

(3)当 $\left|\dfrac{x-1}{5}\right|\leqslant 1$ 且 $25-x^2>0$ 时,函数 y 才能取得确定的函数值,故 y 的定义域为 $\left|\dfrac{x-1}{5}\right|\leqslant 1$ 且 $25-x^2>0$,即 $|x-1|\leqslant 5$ 且 $|x|<5$;即 $-4\leqslant x\leqslant 6$ 且 $-5<x<5$,取其交集得 $[-4,5)$.

例 1.2 设 $f(x)=\dfrac{x}{x-1}(x\neq 1)$,求

(1) $f(f(x))$　　(2) $f(f(f(x)))$　　(3) $f(f(f(0)))$

解 (1) $f(f(x))=\dfrac{f(x)}{f(x)-1}=\dfrac{x}{x-1}\div\left(\dfrac{x}{x-1}-1\right)=\dfrac{x}{x-1}\div\dfrac{1}{x-1}=x.$

(2)由(1)可知 $f(f(f(x)))=f(x)=\dfrac{x}{x-1}$.

(3)由(2)可知 $f(f(f(0)))=\dfrac{0}{0-1}=0.$

例 1.3　设$f(x-1)=\frac{1}{x}$,求$f(x)$.

解　令$x-1=t$,则$x=t+1$,于是得$f(t)=\frac{1}{t+1}$,所以$f(x)=\frac{1}{1+x}$.

(3)**分段函数**

用公式法表示两个变量间的函数关系,简明、准确、完整,同时还便于理论推导,微积分学中常采用这种表示函数的方法. 但在用公式法表示函数时,有时会遇到必须用两个或两个以上的式子来分段给出,才能完整而准确地将两个变量间的函数关系表示出来,这就是所谓的分段函数.

例 1.4　求函数$f(x)=\begin{cases}x+1, x\geqslant 1\\ x-1, x<1\end{cases}$的定义域和值域.

解　该函数是一个分段函数,$x=1$为分段点,其定义域D为$(-\infty,+\infty)$,值域W为$(-\infty,0)\cup[2,+\infty)$.

例 1.5　求函数$y=f(x)=|x|$的定义域和值域.

解　该函数是一个分段函数,也称为绝对值函数,分段点为$x=0$,其定义域为所有实数,值域为非负实数.

例 1.6　设函数$y=f(x)=\begin{cases}x^2-1, & x<0\\ 0, & x=0\\ x^2+1, & x>0\end{cases}$,试求$f(-1)$、$f(0)$、$f(1)$.

解　该函数是一个分段函数,当$x<0$时,$f(x)=x^2-1$,故$f(-1)=0$,$f(0)=0$;当$x>0$时,$f(x)=x^2+1$,故$f(1)=2$.

需要特别说明的是:分段函数是一个函数,不要把分段函数误认为有几个表达式就看成几个函数,而且分段函数的函数值是用自变量所在区间相对应的那个式子去计算.

1.1.3　复合函数

若函数$y=f(u)$的定义域为E,$u=\varphi(x)$的定义域为D,值域为W,若$W\cap E\neq\varnothing$($\varphi(x)$的值域是$f(u)$的定义域的子集),则称$y=f[\varphi(x)]$是由中间变量u复合成的复合函数.

例 1.7　函数$y=\sqrt{u}$和$u=2+\sin x$能构成复合函数?

解　函数$y=\sqrt{u}$的定义域为$E=[0,+\infty)$,函数$u=2+\sin x$的值域$W=[1,3]$,后一函数的值域和前一函数的定义域交集非空,所以,这两个函数可以构成复合函数,即$y=\sqrt{2+\sin x}$,其定义域为所有实数.

注意:并非任意两个函数都能复合成一个复合函数. 例如$y=\sqrt{u}$,$u=\sin x-2$就不能构成复合函数,请读者思考一下为什么.

例 1.8　函数$y=\arctan 2^{\sqrt{x}}$可以看作是$y=\arctan u$,$u=2^v$,$v=\sqrt{x}$复合而成的复合函数.

例 1.9　设$f(x)=x^2$,$g(x)=3x$,试求$f[g(x)]$及$g[f(x)]$.

解　分析两个函数的定义域和值域,可知两个函数可以构成复合函数,故$f[g(x)]=f(3x)=9x^2$,$g[f(x)]=g(x^2)=3x^2$.

例 1.10 设$f(\sin t)=1+\cos 2t$,试求$f(x)$,$|x|\leqslant 1$.

解 因为$f(\sin t)=1+\cos 2t=1+1-2\sin^2 t=2(1-\sin^2 t)$,故$f(\sin t)=2(1-\sin^2 t)$,此函数可以看作是$f(x)=2(1-x^2)$和$x=\sin t$复合而成,从而$f(x)=2(1-x^2)$.

1.1.4 反函数

在函数$y=2x+1$中,若将y看作自变量,x看作因变量,由此确定x是y的函数,$x=\frac{y-1}{2}$,称$x=\frac{y-1}{2}$是$y=2x+1$的反函数.习惯上把自变量记作x,因变量记作y,所以$y=2x+1$的反函数记为$y=\frac{x-1}{2}$,这种习惯的依据是函数与自变量和用什么字母表示无关.

一般地,设函数$y=f(x)$的定义域为D_f,值域为V_f.由函数的定义可知,对于任意的$y\in V_f$,在D_f上至少存在一个x与y对应,且满足$y=f(x)$.如果把y看作自变量,x看作因变量,就可以得到一个新的函数:$x=f^{-1}(y)$,我们称这个新的函数$x=f^{-1}(y)$为函数$y=f(x)$的反函数,而把函数$y=f(x)$称为直接函数.

应当注意的是:

①虽然直接函数$y=f(x)$是单值函数,但是其反函数$x=f^{-1}(y)$却不一定是单值的.例如,$y=f(x)=x^2$的定义域为$D_f=\mathbf{R}$,值域$V_f=[0,+\infty)$.任取非零的$y\in V_f$,则适合$y=x^2$的x的数值有两个:$x_1=\sqrt{y}$,$x_2=-\sqrt{y}$.所以,直接函数$y=x^2$的反函数$y=f^{-1}(y)$是多值函数:$x=\pm\sqrt{y}$.如果把x限制在区间$[0,+\infty)$上,则直接函数$y=x^2$,$x\in[0,+\infty)$的反函数$x=\sqrt{y}$是单值的,并称$x=\sqrt{y}$为直接函数$y=x^2$,$x\in\mathbf{R}$的反函数的一个单值分支.显然,反函数的另一个单值分支为$x=-\sqrt{y}$.

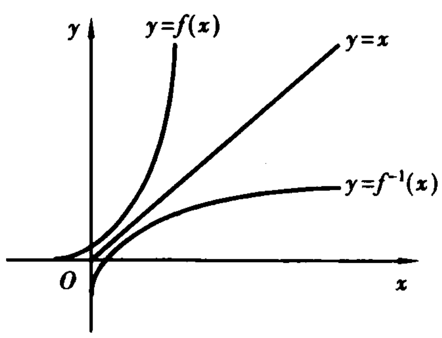


图 1.2

②由于习惯上x表示自变量,y表示因变量,也为了便于在同一坐标系中反映直接函数和其反函数的图像关系,约定$y=f^{-1}(x)$也是直接函数$y=f(x)$的反函数.反函数$x=f^{-1}(y)$与$y=f^{-1}(x)$这两种形式都要用到,但要清楚,函数$y=f(x)$与它的反函数$x=f^{-1}(y)$具有相同的图形.而$y=f(x)$与反函数$y=f^{-1}(x)$的图形是关于直线$y=x$对称,如图1.2所示.

③一个函数若有单值反函数,则有恒等式$f^{-1}[f(x)]=x$,$x\in D_f$,相应地有$f[f^{-1}(y)]=y$,$y\in V_f$.

例如,函数$y=f(x)=\frac{3x}{4}+3$,$x\in\mathbf{R}$的反函数为

$$x=f^{-1}(y)=\frac{4}{3}(y-3)\quad(y\in\mathbf{R})$$

两个函数复合则有

$$f^{-1}[f(x)]=\frac{4}{3}\left[\left(\frac{3x}{4}+3\right)-3\right]=x$$

$$f[f^{-1}(y)] = \frac{3}{4}\left[\frac{4}{3}(y-3)\right]+3 = y$$

1.1.5　基本初等函数与初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数和常量函数这 6 类函数叫做基本初等函数. 这些函数在中学数学已经学过，现总结如下：

(1)**幂函数** $y = x^{a}$，$(a \in \mathbf{R})$

它的定义域和值域随 a 的取值不同而不同，但是无论 a 取何值，幂函数在 $x \in (0, +\infty)$ 内总有定义. 常见的幂函数的图形如图 1.3 所示.

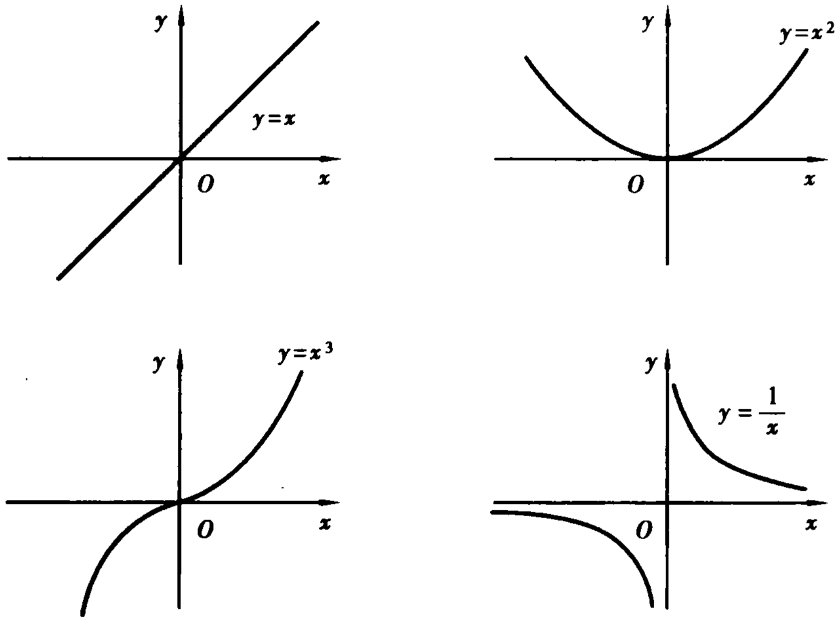


图 1.3

(2)**指数函数** $y = a^{x}(a>0, a\neq 1)$

它的定义域为 $(-\infty, +\infty)$，值域为 $(0, +\infty)$，指数函数的图形如图 1.4 所示.

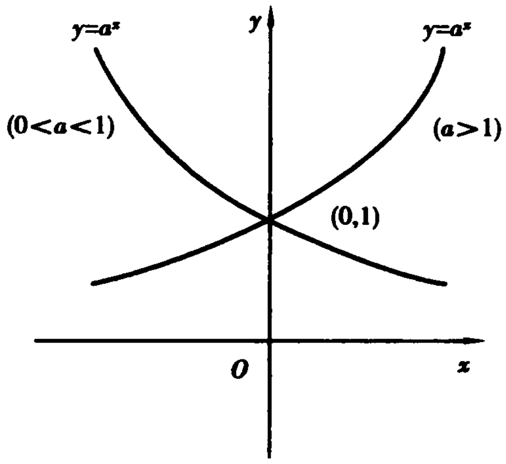


图 1.4

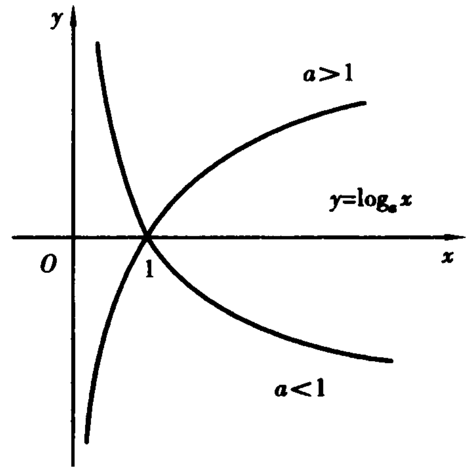


图 1.5

(3)**对数函数** $y = \log_a x(a>0, a\neq 1)$

它的定义域为 $(0, +\infty)$，值域为 $(-\infty, +\infty)$，对数函数 $y = \log_a x$ 是指数函数 $y = a^{x}$ 的反

函数. 如图 1.5 所示在工程中常以无理数 $e=2.718\ 281\ 828\cdots$ 作为指数函数和对数函数的底，并且记 $e^x=\exp x$，$\log_e x=\ln x$，而后者称为自然对数函数.

(4) **三角函数**

三角函数有正弦函数 $y=\sin x$、余弦函数 $y=\cos x$、正切函数 $y=\tan x$、余切函数 $y=\cot x$、正割函数 $y=\sec x$ 和余割函数 $y=\csc x$. 其中正弦、余弦、正切和余切函数的图形如图 1.6 所示.

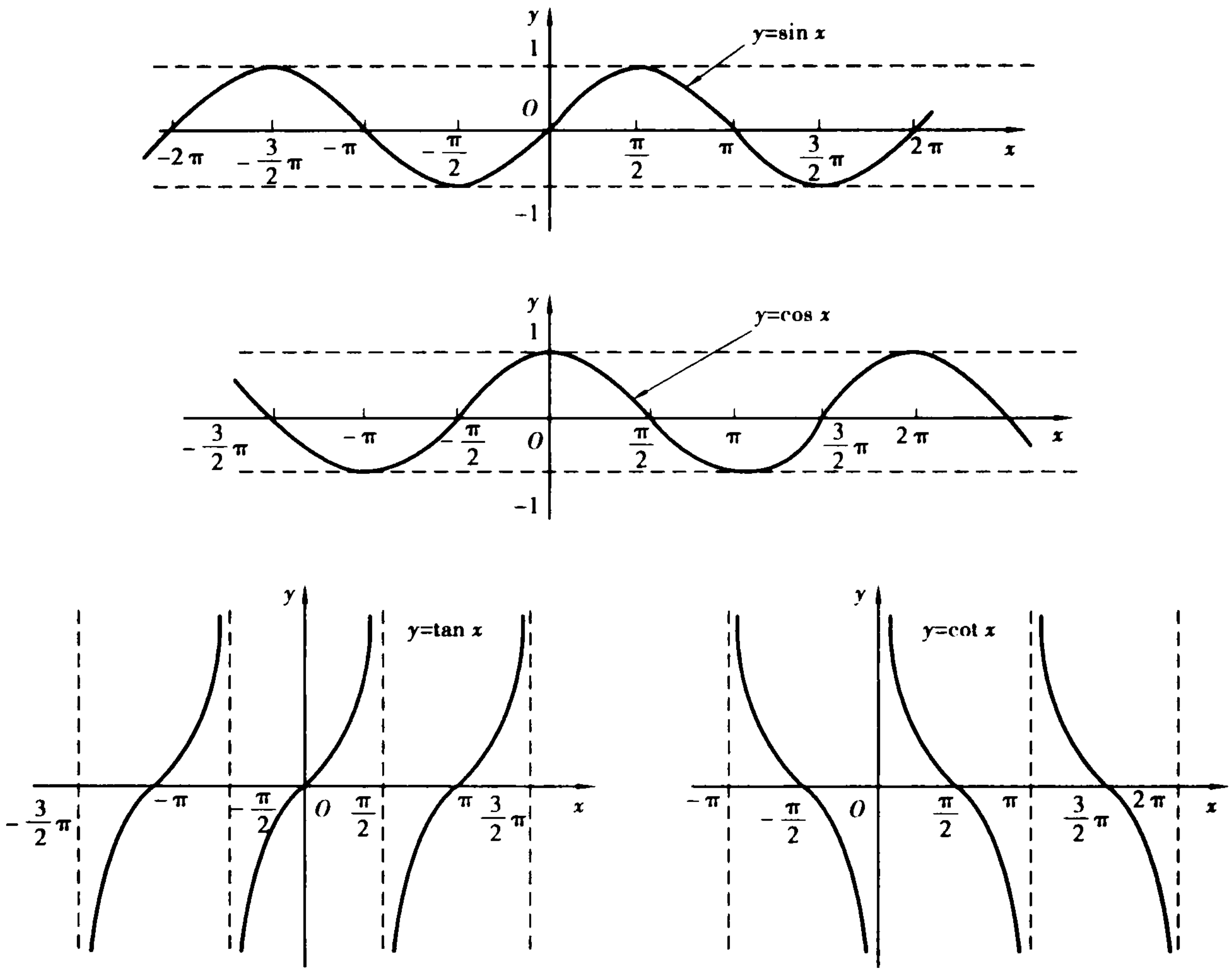


图 1.6

(5) **反三角函数**

反三角函数主要包括反正弦函数 $y=\arcsin x$、反余弦函数 $y=\arccos x$、反正切函数 $y=\arctan x$和反余切函数 $y=\text{arccot}\, x$ 等. 它们的图形如图 1.7 所示.

(6) **常量函数**

常量函数 $y=c$(c 为常数)，定义域为$(-\infty,+\infty)$，函数的图形是一条水平直线.

通常把由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合步骤所构成的，并用一个解析式表达的函数称为初等函数.

例如，$y=\ln(\sin x+4)$，$y=\sqrt[3]{\sin x}$等都是初等函数. 初等函数虽然是常见的重要函数，但是在工程技术中，非初等函数也会经常遇到，例如符号函数、取整函数 $y=[x]$ 等分段函数就是非初等函数.

在微积分运算中，常把初等函数分解为基本初等函数来研究. 学会分析初等函数的结构是十分重要的.