



高新科技译丛

The Finite-Difference Time-Domain
Method for Electromagnetics
with MATLAB Simulations

MATLAB模拟的 电磁学时域有限差分法

【美】 Atef Elsherbeni Veysel Demir 著 喻志远 译



本书附光盘一张



国防工业出版社

National Defense Industry Press

著作权合同登记号:军-2012-022 号

图书在版编目(CIP)数据

MATLAB 模拟的电磁学时域有限差分法/(美)艾谢贝里(Elsherbeni, A. Z.), (美)德米尔(Demir, V.)著; 喻志远译. —北京:国防工业出版社, 2012. 8
书名原文: The Finite-Difference Time-Domain Method for Electromagnetics with MATLAB Simulations
ISBN 978-7-118-08053-7

I. ①M… II. ①艾… ②德… ③喻… III. ①电磁波—时域分析—有限差分法—Matlab 软件 IV. ①0441.4-39

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 165602 号

The Finite-Difference Time-Domain Method in Electromagnetics, with MATLAB by Atef Elsherbeni and Vesel Demir.

Original English language edition © 2006 by SciTech Publishing, Inc., Raleigh, NC, USA.
The Chinese Translation edition Copyright © 2012 by National Defense Industry Press. No part of this book may be reproduced or transmitted in any form or by any means, electronic or mechanical, including photocopying, recording or by any information storage retrieval system, without permission in writing from the Proprietor.
All rights reserved.

本书简体中文版由 SciTech Publishing, Inc. 授权国防工业出版社独家出版。
版权所有, 侵权必究。

MATLAB 模拟的电磁学时域有限差分法

(美)艾谢贝里, (美)德米尔 著
喻志远 译

出版发行 国防工业出版社
地址邮编 北京市海淀区紫竹院南路 23 号 100048
经 售 新华书店
印 刷 北京奥鑫印刷厂
开 本 787×1092 1/16
印 张 24
字 数 554 千字
印 版 次 2012 年 8 月第 1 版第 1 次印刷
印 数 1—2000 册
定 价 79.00 元(含光盘)

(本书如有印装错误, 我社负责调换)

国防书店: (010)88540777

发行邮购: (010)88540776

发行传真: (010)88540755

发行业务: (010)88540717

前 言

本书内容包含了多年来作者在密西西比大学教授研究生水平的计算电磁学的一般内容,特别是时域有限差分法(FDTD)的教学内容。本书的第一作者 Atef Elsherbeni 在许多教学机构和日益增多的国际会议中举办了无数次小型学习班以教授 FDTD 方法。本书的第二作者 Veysel Demir 在理论、数值以及程序编制方面的经验是本书得以成功完成的一个关键因素。

目标

本书的目标是向学生、感兴趣的研究人员和读者介绍时域有限差分法。有效的介绍,是伴随着通过一步步地完成各种天线和微波器件设计和分析工作代码的过程中,培养能力和建立信心而实现的。本书是为研究生、工业和政府中使用其他电磁仿真工具和方法的研究人员需要独立运行数值仿真而编写的。本书不需要读者具有使用差分方法的经验。

主要论题

- (1)微分麦克斯韦方程的有限差分近似;
- (2)几何结构的离散空间;法向和切向电场及磁场在两种不同媒质界面上的处理;
- (3)外部边界条件的处理;
- (4)选择适当的时间步长和空间步长的方法;
- (5)激励源波形的选择;
- (6)时域到频域变换中参数的选择;
- (7)细导线仿真;
- (8)集总无源器件和集总有源器件在 FDTD 中的表示;
- (9)通过总场公式的散射;
- (10)近场和远场区域源的定义和公式表示;
- (11)采用图像处理单元来加速 FDTD 仿真。

MATLAB 的使用

本书中工作代码的开发是建立在 MATLAB 程序语言基础上的。这是因为 MATLAB 程序易于使用、实用性广,并且大多数电子工程师对 MATLAB 语言较为熟悉,同时,它具有强大的图形输出功能和可视化功能。本书介绍 FDTD 的关键方程的推导,并给出编程执行的最终表达式,以及由这些公式导出的例子的 MATLAB 代码。本书中使用 MATLAB7.5 版本,以开发 m 文件。

本书附有光盘,其中含有本书给出的所有例子的 MATLAB 的 m 文件以及彩色插

图。读者在网站 www.scitechpub.com/FDTDtext.htm, 将得到更多的例子和电子文件及图片。

本书特点

(1) FDTD 的差分公式的推导, 以一种可理解的、详细的、完整的方式给出。它使得初学者易于掌握 FDTD 概念。另外, 对不同的目标要用不同的处理方式, 例如, 对介质、导体、集总参数器件、有源器件或细导线, FDTD 更新计算公式以一种一致的符号给出。

(2) 伴随着公式推导给出了许多三维图。提供给读者一种可视化的帮助和理解, 将场方程的分量与离散的 FDTD 三维空间相连接。

(3) 众所周知, 即便是理解理论, 读者在电磁应用中, 要开发数学工具, 仍会面临困难。因此, 随着章节的进展, 以从上到下的软件设计方式, 将理论概念与程序开发联系起来, 在构造 FDTD 仿真工具中帮助读者。

(4) 给出的例子展示了 MATLAB 程序的开发, 有助于读者的理解和提供例子的可视化图像。例如, 程序中 FDTD 参数的设置, 计算过程的创建, 最后给出问题时域和频域的解。

每章后附有练习, 此练习给出了本章的重点。大多数练习要求编程, 其中的结构和激励源可以任意选择。大多数练习中, 建议的结构为三维图形。

希望读者学会本书所涉及的 FDTD 方法和提供的 MATLAB 代码, 并开发自己的 FDTD 仿真工具, 在自信中享受仿真各种电磁问题的乐趣。

使用光盘

光盘插入计算机光驱后会自动运行, 然而由于计算机的不同, 如果不自动运行, 应双击文件中的“index.html”文件。显示的第一页给出了与所有章节和附录的链接, 点击其中的任意链接, 将指向相关的章节中的代码和插图。

教员资源

一旦将本书作为教科书使用, 教员将有权得到各章末尾的练习的解。练习的解答大多数以 m 文件的形式给出。与出版者联系可以得到这些文件。

错误和建议

为改善本书内容, 欢迎读者反馈相关错误, 相关错误将会列到本书网页上。

目 录

第 1 章 FDTD 简介	1
1.1 时域有限差分法的基本方程	2
1.2 导数的差分近似	3
1.3 三维问题的 FDTD 更新方程	10
1.4 二维问题的 FDTD 迭代方程	17
1.5 一维 FDTD 问题的更新方程	20
1.6 练习	23
第 2 章 数值稳定性和色散	25
2.1 数值的稳定性	25
2.1.1 时域算法中的稳定性	25
2.1.2 FDTD 方法的 CFL 稳定条件	26
2.2 数值色散	27
2.3 练习	30
第 3 章 在 Yee 网格中创建目标	31
3.1 目标的定义	31
3.1.1 定义问题空间参量	32
3.1.2 在问题空间中定义目标	35
3.2 媒质近似	37
3.3 切向和法向分量的子网格平均方案	38
3.4 定义目标	40
3.5 创建媒质网格	42
3.6 改善 8 个网格平均	52
3.7 练习	52
第 4 章 有源和无源集总参数电路	55
4.1 FDTD 中集总参数元件的更新公式	55
4.1.1 电压源	55
4.1.2 硬激励电压源	57
4.1.3 电流源	57
4.1.4 电阻的 FDTD 建模	58
4.1.5 电容的 FDTD 建模	59

4.1.6	电感的 FDTD 建模	60
4.1.7	位于表面或体积内的集总参数元件	60
4.1.8	二极管的 FDTD 模拟	62
4.1.9	总结	65
4.2	集总参数元件的定义,初始化和模拟	65
4.2.1	集总参数元件的定义	65
4.2.2	FDTD 参量和数组的初始化	68
4.2.3	集总参数元件的初始化	69
4.2.4	更新系数的初始化	77
4.2.5	电场和磁场以及电压和电流的取样	88
4.2.6	输出参数的定义与初始化	90
4.2.7	运行 FDTD 模拟:时进循环	98
4.2.8	显示 FDTD 模拟结果	110
4.3	模拟例子	114
4.3.1	正弦波电压源激励的电阻	114
4.3.2	由正弦波源激励的二极管	118
4.3.3	由单位阶跃电压源激励的电容	120
4.4	练习	123
第 5 章	激励源的波形与从时域到频域的变换	125
5.1	常用 FDTD 仿真波形	125
5.1.1	正弦波形	125
5.1.2	高斯波形	127
5.1.3	高斯波形的导数归一化	129
5.1.4	余弦函数调制的高斯波形	130
5.2	FDTD 模拟中激励源的定义和初始化	131
5.3	从时域到频域的变换	135
5.4	仿真举例	145
5.4.1	由傅里叶变换重新获得时域波形	145
5.4.2	由余弦调制高斯波形激励的 RCL 电路	146
5.5	练习	151
第 6 章	散射参量	152
6.1	S 参量和回波损耗的定义	152
6.2	S 参数的计算	153
6.3	模拟例子	161
6.3.1	1/4 波长变换器	161
6.4	练习	166

第 7 章 完善匹配层吸收边界	168
7.1 PML 的理论	168
7.1.1 PML 在 PML 与真空间界面上的理论	168
7.1.2 PML 在 PML-PML 的界面上的理论	170
7.2 三维问题空间中的 PML 方程	172
7.3 PML 损耗函数	173
7.4 PML 的 FDTD 更新方程及 MATLAB 实现	174
7.4.1 二维 TE _z 情况下的 PML 更新方程	174
7.4.2 二维 TM _z 极化情况下的 PML 更新方程	176
7.4.3 以 PML 为吸收边界的二维 FDTD 方法的 MATLAB 程序实现	178
7.5 模拟举例	197
7.5.1 PML 吸收边界的有效性	197
7.5.2 Electric field Distribution	198
7.5.3 使用离散傅里叶变换的电场分布图	205
7.6 练习	207
第 8 章 卷积完善匹配层	208
8.1 CPML 的公式	208
8.1.1 延伸坐标中的 PML	208
8.1.2 CFS-PML 中的延伸变量	209
8.1.3 在 PML 与 PML 之间的界面上匹配条件	209
8.1.4 时域方程	209
8.1.5 离散卷积	210
8.1.6 卷积的递归算法	211
8.2 CPML 算法	211
8.2.1 CPML 更新方程	212
8.2.2 在各区域内增加 CPML 辅助项	213
8.3 CPML 参数分布	214
8.4 在三维 FDTD 问题中的 CPML 的 MATLAB 程序执行	215
8.4.1 CPML 定义	215
8.4.2 CPML 的初始化	217
8.4.3 CPML 在 FDTD 时进循环中的应用	223
8.5 模拟举例	226
8.5.1 微带低通滤波器	226
8.5.2 微带分支耦合器	228
8.5.3 微带线的特性阻抗	236
8.6 练习	241

第 9 章 近场到远场的变换	243
9.1 表面等效定律的执行	244
9.1.1 表面等效定律	244
9.1.2 FDTD 仿真中的等效电流和磁流	245
9.1.3 在无限地平面上的天线	247
9.2 频域近场到远场的变换	247
9.2.1 时域到频域的变换	247
9.2.2 矢量势研究	248
9.2.3 辐射场的极化	249
9.2.4 辐射效率	250
9.3 MATLAB 运行近场到远场的变换	250
9.3.1 定义近场到远场变换参量	250
9.3.2 近场到远场参量的初始化	251
9.3.3 时间步进循环中的近场到远场 DFT	254
9.3.4 远场计算的后处理	258
9.4 仿真举例	269
9.4.1 倒 F 天线	269
9.4.2 带线馈入的矩形介质谐振天线	276
9.5 练习	281
第 10 章 细导线模拟	283
10.1 细导线公式	283
10.2 细导线公式的 MATLAB 程序执行	286
10.3 仿真例子	289
10.3.1 细导线偶极子天线	289
10.4 练习	293
第 11 章 散射体公式	295
11.1 散射场基本方程	295
11.2 散射场更新方程	296
11.3 入射平面波的表达式	298
11.4 散射场公式的 MATLAB 程序执行	301
11.4.1 入射平面波的定义	301
11.4.2 入射场的初始化	302
11.4.3 更新系数的初始化	306
11.4.4 散射场的计算	307
11.4.5 仿真结果的后处理	310
11.5 仿真举例	313
11.5.1 由介质球引起的散射	313

11.5.2	介质立方体的散射	317
11.5.3	介质条的反射与传输系数	320
11.6	练习	324
第 12 章	时域有限差分计算的图形处理单元的加速	326
12.1	图像处理与一般的数学	328
12.2	Brook 语言的介绍	329
12.3	使用 Brook 系统的二维 FDTD 执行举例	331
12.4	向三维的扩展	347
12.5	三维参数研究	348
附录 A	一维 FDTD 代码	353
A.1	一维 FDTD, MATLAB 代码	353
A.2	绘图参数的初始化	355
A.3	场量绘图	355
附录 B	三维结构的卷积完善匹配层区域及相关场的更新计算	356
B.1	卷积完善匹配层区域的 E_x 的更新(图 B.1)	356
B.2	CPML 区域内更新 E_y (图 B.2)	357
B.3	CPML 区域内更新 E_z (图 B.3)	358
B.4	CPML 区域内更新 H_x (图 B.4)	359
B.5	CPML 区域内更新 H_y (图 B.5)	360
B.6	CPML 区域内更新 H_z (图 B.6)	362
附录 C	计算远场方向的 MATLAB 代码	364
C.1	绘制 θ 为常数时的平面内的远场方向图	364
C.2	绘制 ϕ 为常数的平面的远场方向图	365
参考文献	367

第 1 章 FDTD 简介

计算电磁学经过 10 年的发展,已可以对各种电磁问题都能给出十分精确的预测,例如,目标的雷达散射截面(RCS)、天线以及各种微波器件的精确设计。

一般来说,常用的计算电磁方法可以分为两大类:一类为基于微分方程的解法;另一类为基于积分方程的解法。两类解法都是基于应用麦克斯韦方程求给定边界条件问题的解。积分方程法是以有限和的形式给出的积分方程的近似解;而微分方程解法给出以有限差分法的微分方程的近似解。

早年的电磁数值分析,在假定解是以时谐场的形式存在的前提下,大多数是在频域下求解的。

对规范问题,频域解优于时域解,是因为应用频域解易于得到解析解。解析解可以用来验证数值解。这是在发展一种新的数值解,把它用于求解实际问题之前的第一步。另外,由以前的实验硬件得到的测试数据大多都限于频域研究。近年来速度更快,功能更强大的计算机的发展,使得更加先进的时域计算电磁学建模成为可能。研究的焦点集中在微分方程的时域解,因为它易于公式化,适合计算机模拟建模,数学上也相对简单。时域解也能提供所解问题的电磁特性的物理意义。

因此,本书的内容主要涉及计算电磁学中的时域差分法(FDTD)的分析与程序的执行。其中包括天线、微波滤波器的设计以及三维目标的雷达散射截面的分析。

在过去的 10 年,FDTD 作为麦克斯韦方程解的一种数值方法,赢得了极为广泛的应用。它是基于简单的公式迭代,而不需要复杂的渐近逼近或格林函数。虽然它是一种时域解,但通过傅里叶变换,可以得到解在宽频带中的频域响应。它可以很容易地处理由不同的媒质构成的电磁结构,如介质、磁体、与频率相关的媒质、非线性或各向异性媒质。FDTD 算法易于使用并行计算方法。这些特点使得 FDTD 在计算电磁学中成为诸多微波器件、天线的应用中最为吸引力的方法。

FDTD 已用于大量各种实用工程中出现的问题:

- (1) 雷达散射截面;
- (2) 微波电路、波导及光纤问题;
- (3) 天线问题(辐射与阻抗问题等);
- (4) 传播问题;
- (5) 医学问题;
- (6) 屏蔽、耦合、电磁兼容以及电磁脉冲保护问题;
- (7) 非线性及其他特殊材料相关的电磁问题;
- (8) 地质应用;
- (9) 逆散射;
- (10) 等离子体。

1.1 时域有限差分法的基本方程

构造 FDTD 算法的出发点是麦克斯韦时域方程。用来在时域内的行为的麦克斯韦时域微分方程为

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J} \quad (1.1a)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{M} \quad (1.1b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_e \quad (1.1c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \rho_m \quad (1.1d)$$

式中： \mathbf{E} 为电场强度(V/m)； \mathbf{D} 为电位移(C/m²)； \mathbf{H} 为磁场强度(A/m)； \mathbf{B} 为磁通量密度(Wb/m²)； \mathbf{J} 为电流密度(A/m²)； \mathbf{M} 为磁流密度(V/m²)； ρ_e 为电荷密度(C/m³)； ρ_m 为磁荷密度(Wb/m³)。

本构关系对补充麦克斯韦方程和描述媒质的特性是必要的，本构关系对线性、各向同性和非色散媒质可以写成

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (1.2a)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad (1.2b)$$

式中： ϵ 为媒质的介电常数； μ 为媒质的磁导率。在自由空间，有

$$\epsilon = \epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ F/m}$$

$$\mu = \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$$

在推导 FDTD 方程时，因为在 FDTD 的更新方程的过程中满足散度方程^[1]，所以只需要考虑两个旋度方程即可。

式(1.1a)中的电流密度 \mathbf{J} 等于导体电流密度 \mathbf{J}_c 与施加电流密度 \mathbf{J}_i 之和，即

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_c + \mathbf{J}_i$$

式中： $\mathbf{J}_c = \sigma^e \mathbf{E}$ ， σ^e 为电导率(S/m)。

同样，对于磁流密度，有

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_c + \mathbf{M}_i$$

式中

$$\mathbf{M}_c = \sigma^m \mathbf{H}$$

其中： σ^m 为磁导率(Ω/m)。

将电流密度分解为导体电流密度 \mathbf{J}_c 和施加电流密度 \mathbf{J}_i ，应用本构关系式(1.2)可重写麦克斯韦方程为

$$\nabla \times \mathbf{H} = \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \sigma^e \mathbf{E} + \mathbf{J}_i \quad (1.3a)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \sigma^m \mathbf{H} - \mathbf{M}_i \quad (1.3b)$$

上面的方程仅涉及电磁场 \mathbf{E} 和 \mathbf{H} ，而未涉及通量密度矢量 \mathbf{D} 和 \mathbf{B} 。公式中出现了 ϵ 、 μ 、 σ^e 、 σ^m 四个本构关系参量，所以只能描述任意线性、各向同性的媒质。虽然 FDTD 公式中未出现散度方程，但散度方程可以用来检测 FDTD 的仿真结果。即用本构公式

得到 $\mathbf{D}=\epsilon\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}$ (其中 \mathbf{E} 和 \mathbf{H} 由 FDTD 仿真得到), 则 \mathbf{D} 和 \mathbf{B} 应满足散度方程。

方程(1.3)由两个矢量方程组成, 在三维空间每个矢量方程可以分解为 3 个标量方程。因此, 麦克斯韦旋度方程可以表示成 6 个标量方程, 在直角坐标下, 有

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon_x} \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - \sigma_x^e E_x - J_{ix} \right) \quad (1.4a)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon_y} \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} - \sigma_y^e E_y - J_{iy} \right) \quad (1.4b)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon_z} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - \sigma_z^e E_z - J_{iz} \right) \quad (1.4c)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{1}{\mu_x} \left(\frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} - \sigma_x^m H_x - M_{ix} \right) \quad (1.4d)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{1}{\mu_y} \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} - \sigma_y^m H_y - M_{iy} \right) \quad (1.4e)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{1}{\mu_z} \left(\frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} - \sigma_z^m H_z - M_{iz} \right) \quad (1.4f)$$

从这里可以看到, 媒质参量 $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ 通过本构关系 $D_x = \epsilon_x E_x, D_y = \epsilon_y E_y, D_z = \epsilon_z E_z$

分别与 E_x, E_y, E_z 相关联; 同样, μ_x, μ_y, μ_z 通过本构关 $B_x = \mu_x H_x, B_y = \mu_y H_y, B_z = \mu_z H_z$ 分别与 H_x, H_y, H_z 相关联。

相同的分解在其他坐标中也是可能的, 但是从应用的角度来看, 它们并没有吸引力。

FDTD 算法将问题的几何空间离散为空间网格点, 在这些网格点上电场和磁场分量被置于空间离散的位置上, 并以离散时间的方式来解麦克斯韦方程。

FDTD 的计算, 首先用有限差分来近似麦克斯韦方程中的空间和时间导数; 其次构造一组方程, 以前一时间步瞬时场值来计算后一时间步的瞬时场值, 由此来构造时间向前推进的算法, 以模拟电磁场在时域的进程^[2]。

1.2 导数的差分近似

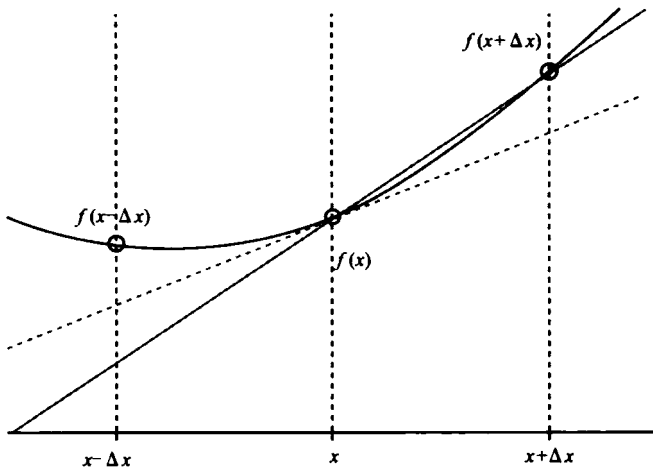
任意一连续的函数可以用离散点来取样, 如果自变量的取样率足够高, 则取样函数能很好地近似原函数。这里离散函数近似于原连续函数的精度, 也取决于取样率的高低。然而, 对精度影响的另一个因素是离散算子的选取。通常, 离散算子有多种选择, 这里考虑微分算子。考虑图 1.1(a)~(c) 所示的在离散点取样的连续函数 $f(x)$, 在 x 点的导数为

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (1.5)$$

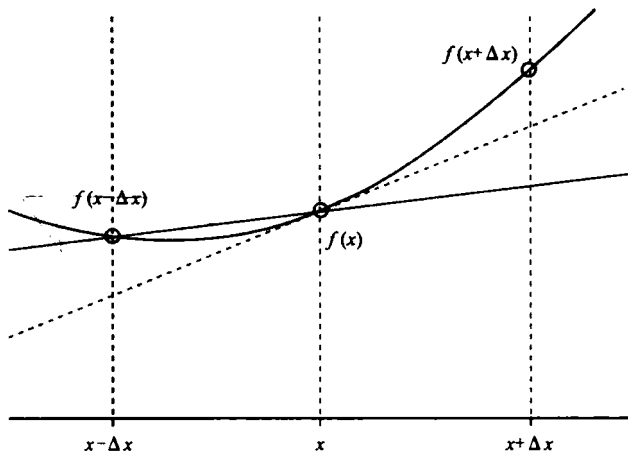
然而, 因为 Δx 是固定非零数, $f(x)$ 的导数可以近似为

$$f'(x) \approx \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (1.6)$$

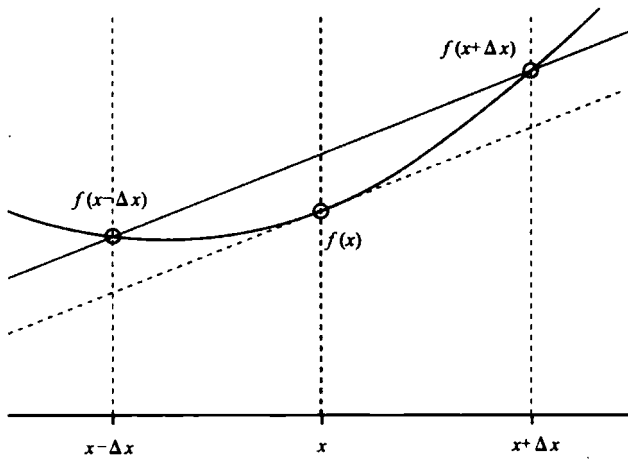
在图 1.1(a) 中, $f(x)$ 的导数是虚线的斜率。因为在计算 $f(x)$ 的导数时, 使用了 $f(x+\Delta x)$ 和 $f(x)$ 的值, 所以式(1.6)称为前向差分公式。



(a)用差分来近似函数 $f(x)$, 在 x 点的导数: 前向差分



(b)用差分来近似函数 $f(x)$, 在 x 点的导数: 后向差分



(c)用差分来近似函数 $f(x)$, 在 x 点的导数: 中心差分

图 1.1 前向差分、后向差分和中心差分

很明显,使用后向点函数值 $f(x-\Delta x)$ 来取代前向点函数值 $f(x+\Delta x)$,可以得到另一种 $f(x)$ 导数的近似表达式(图 1.1(b)),即

$$f'(x) \approx \frac{f(x) - f(x-\Delta x)}{\Delta x} \quad (1.7)$$

因为式(1.7)使用了后向点函数值 $f(x-\Delta x)$,所以式(1.7)称为后向差分公式。

第三种 $f(x)$ 导数的近似表达式,可以从前向差分式子与后向差分式子的平均得到,即

$$f'(x) \approx \frac{f(x+\Delta x) - f(x-\Delta x)}{2\Delta x} \quad (1.8)$$

因为式(1.8)同时应用了前向点和后向点函数值,所以式(1.8)称为中心差分公式,如图 1.1(c)所示。值得一提的是,函数在 x 点的值, $f(x)$ 在中心差分公式中没有用到。分析图 1.1 可以看到,三种不同的导数近似表达式产生不同精度的 $f(x)$ 导数近似值。这三种不同的近似表达式引入的误差,可以由泰勒级数来分析。式子 $f(x+\Delta x)$ 的泰勒级数展开为

$$f(x+\Delta x) = f(x) + \Delta x f'(x) + \frac{(\Delta x)^2}{2} f''(x) + \frac{(\Delta x)^3}{6} f'''(x) + \frac{(\Delta x)^4}{24} f^{(4)}(x) + \dots \quad (1.9)$$

上式以 Δx 和 $f(x+\Delta x)$ 的导数给出了 $f(x+\Delta x)$ 的表达式。如果 $f(x)$ 满足一定的条件,并且取无限项,则式(1.9)从理论上说是 $f(x+\Delta x)$ 的精确表达式。利用式(1.9),有

$$f'(x) = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{2} f''(x) - \frac{(\Delta x)^2}{6} f'''(x) - \frac{(\Delta x)^3}{24} f^{(4)}(x) - \dots \quad (1.10)$$

可以看出,式(1.10)等号右边第一项是式(1.6)给出的前向差分,而其他项的和是函数 $f(x)$ 的导数的精确值与前向差分之差。此项和就是前向差分引入的误差。方程(1.10)可以重写成

$$f'(x) = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (1.11)$$

式中: $O(x)$ 代表误差项。 $O(x)$ 中的主要项为 $\Delta x/2$ 。而 Δx 为一阶,所以前向差分为一阶精度。上面的关于一阶精度的推导,说明误差中最重要的项正比于取样周期。例如,如果取样周期减小 $1/2$,则误差也减小 $1/2$ 。

展开 $f(x-\Delta x)$ 的泰勒级数,同样可以推导,后向差分的误差,即

$$f(x-\Delta x) = f(x) - \Delta x f'(x) + \frac{(\Delta x)^2}{2} f''(x) - \frac{(\Delta x)^3}{6} f'''(x) + \frac{(\Delta x)^4}{24} f^{(4)}(x) + \dots \quad (1.12)$$

移项后,可以得到 $f(x)$ 的导数表达式为

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x-\Delta x)}{\Delta x} + \frac{\Delta x}{2} f''(x) - \frac{(\Delta x)^2}{6} f'''(x) + \frac{(\Delta x)^3}{24} f^{(4)}(x) + \dots \quad (1.13)$$

式(1.13)等号右边第一项为后向差分,而其他项的和是由后向差分引入的与 $f(x)$ 的导数精确值之间的误差,即有

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(x-\Delta x)}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (1.14)$$

$O(x)$ 中最重要的一项 Δx 为一阶,因此后向差分的精度也是一阶精度。

取 $f(x+\Delta x)$ 和 $f(x-\Delta x)$ 的泰勒级数的差,得

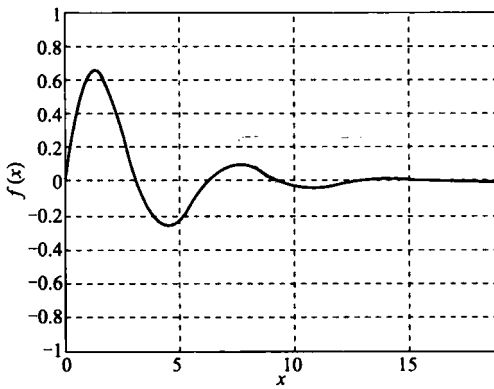
$$f(x+\Delta x) - f(x-\Delta x) = 2\Delta x f'(x) + \frac{2(\Delta x)^3}{6} + \dots \quad (1.15)$$

重写上面的式子, $f(x)$ 的导数可以表示为

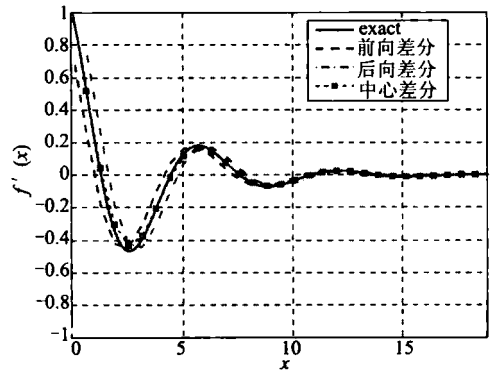
$$f'(x) = \frac{f(x+\Delta x) - f(x-\Delta x)}{2\Delta x} - \frac{(\Delta x^2)}{6} + \dots = \frac{f(x+\Delta x) - f(x-\Delta x)}{2\Delta x} + O((\Delta x)^2) \quad (1.16)$$

式(1.16)等号右边第一项为式(1.8)给出的中心差分,而 $O(x)$ 中最重要的一项 Δx 为二阶,因此中心差分的精度为二阶精度。二阶精度意味着,由二阶精度公式引入的最重要的项正比于取样周期的平方。例如,如果取样周期减小原来的 1/2,则误差减小到原来的 1/4。因此,一个二阶精度的公式,如中心差分公式,比一阶精度公式更为精确。

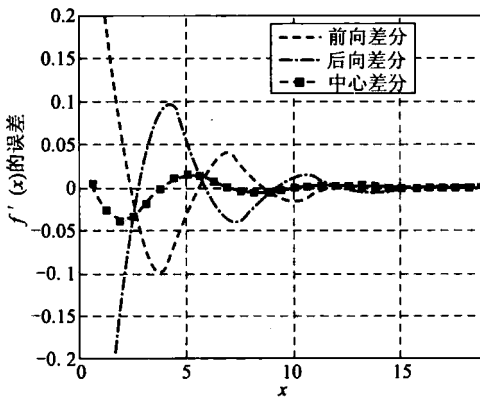
例如,考虑函数 $f(x) = \sin(x)e^{-0.3x}$, 如图 1.2(a)所示,其精确的一阶导数为 $f'(x) = \cos(x)e^{-0.3x} - 0.3\sin(x)e^{-0.3x}$ 。



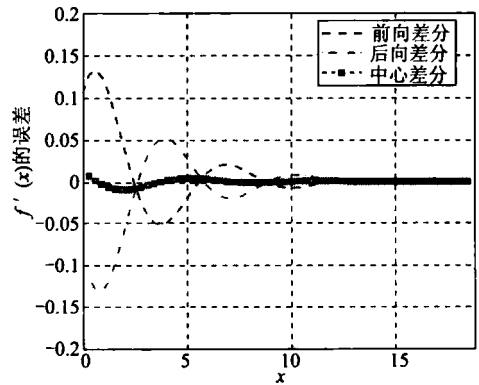
(a) $f(x) = \sin(x)e^{-0.3x}$



(b) 当 $\Delta x = \pi/5$ 时, $f'(x) = \cos(x)e^{-0.3x} - 0.3 \sin(x)e^{-0.3x}$ 和有限差分近似



(c) 当 $\Delta x = \pi/5$ 时,有限差分引入的误差



(d) 当 $\Delta x = \pi/10$ 时,有限差分引入的误差

图 1.2 $f(x)$ 、 $f'(x)$ 和当 $\Delta x = \pi/5, \pi/10$ 时, $f'(x)$ 与 $f'(x)$ 的差分近似之间的差

这里函数的取样周期 $\Delta x = \pi/5$, 分别用三种不同的差分近似公式(即前向差分、后向

差分和中心差分)来计算函数导数的近似值。图 1.2(b)给出了函数的导数和有限差分近似。图 1.2(c)给出了当 $\Delta x = \pi/5$ 时,有限差分引入的误差,即 $f'(x)$ 与有限差分之间的差值。很明显,中心差分引入的误差要远小于其他两种差分公式。图 1.2(d)给出了 $\Delta x = \pi/10$ 时,有限差分引入的误差。由图可以看出,到当取样周期减小原来的 1/2 时,前向差分和后向导差的误差也减小原来的 1/2,而中心差分减小到原来的 1/4。

MATLAB 编程给出了函数 $f(x)$ 和它的有限差分导数计算,图 1.2 给出了它们的计算结果。MATLAB 程序见程序 1.1。

程序 1.1 MATLAB 程序

```

% create exact function and its derivative
N_exact= 301; % number of sample points for exact function
x_exact= linspace (0,6* pi ,N_exact);
f_exact= sin (x_exact).* exp (- 0.3* x_exact);
f_derivative_exact= cos (x_exact).* exp (- 0.3* x_exact) ...
    - 0.3* sin (x_exact).* exp (- 0.3* x_exact);

% plot exact function
figure (1);
plot (x_exact,f_exact,'k- ','linewidth',1.5);
set (gca,'FontSize',12,'fontweight','demi');
axis ([0 6* pi - 1 1]); grid on;
xlabel ('$x$','Interpreter','latex','FontSize',16);
ylabel ('$f(x)$','Interpreter','latex','FontSize',16);

% create exact function for pi/5 sampling period
% and its finite difference derivatives
N_a= 31; % number of points for pi/5 sampling period
x_a= linspace (0,6* pi ,N_a);
f_a= sin (x_a).* exp (- 0.3* x_a);
f_derivative_a= cos (x_a).* exp (- 0.3* x_a) ...
    - 0.3* sin (x_a).* exp (- 0.3* x_a);

dx_a= pi /5;
f_derivative_forward_a= zeros (1,N_a);
f_derivative_backward_a= zeros (1,N_a);
f_derivative_central_a= zeros (1,N_a);
f_derivative_forward_a(1:N_a- 1)= ...
    (f_a(2:N_a)- f_a(1:N_a- 1))/dx_a;
f_derivative_backward_a(2:N_a)= ...
    (f_a(2:N_a)- f_a(1:N_a- 1))/dx_a;
f_derivative_central_a(2:N_a- 1)= ...
    (f_a(3:N_a)- f_a(1:N_a- 2))/(2* dx_a);

```



```

% create exact function for pi/10 sampling period
% and its finite difference derivatives
N_b= 61; % number of points for pi/10 sampling period
x_b= linspace (0,6* pi ,N_b);
f_b= sin (x_b).* exp (- 0.3* x_b);
f_derivative_b= cos (x_b).* exp (- 0.3* x_b) ...
    - 0.3* sin (x_b).* exp (- 0.3* x_b);
dx_b= pi /10;
f_derivative_forward_b= zeros (1,N_b);
f_derivative_backward_b= zeros (1,N_b);
f_derivative_central_b= zeros (1,N_b);
f_derivative_forward_b(1:N_b- 1)= ...
    (f_b(2:N_b)- f_b(1:N_b- 1))/dx_b;
f_derivative_backward_b(2:N_b)= ...
    (f_b(2:N_b)- f_b(1:N_b- 1))/dx_b;
f_derivative_central_b(2:N_b- 1)= ...
    (f_b(3:N_b)- f_b(1:N_b- 2))/(2* dx_b);

% plot exact derivative of the function and its finite difference
% derivatives using pi/5 sampling period
figure (2);
plot (x_exact,f_derivative_exact,'k',...
    x_a(1:N_a- 1),f_derivative_forward_a(1:N_a- 1),'b- - ',...
    x_a(2:N_a),f_derivative_backward_a(2:N_a),'r- .',...
    x_a(2:N_a- 1),f_derivative_central_a(2:N_a- 1),'ms',...
    'MarkerSize',4, 'linewidth',1.5);
set (gca ,'FontSize',12,'fontweight','demi');
axis ([0 6* pi - 1 1]);
grid on;
legend ('exact', 'forward difference',...
    'backward difference','central difference');
xlabel ('$x$', 'Interpreter','latex','FontSize',16);
ylabel ('$f'(x)$', 'Interpreter','latex','FontSize',16);
text (pi ,0.6, '$\Delta x = \pi/5$', 'Interpreter',...
    'latex','fontSize',16, 'BackgroundColor','w','EdgeColor','k');

% plot error for finite difference derivatives
% using pi/5 sampling period
error_forward_a= f_derivative_a - f_derivative_forward_a;
error_backward_a= f_derivative_a - f_derivative_backward_a;
error_central_a= f_derivative_a - f_derivative_central_a;

```