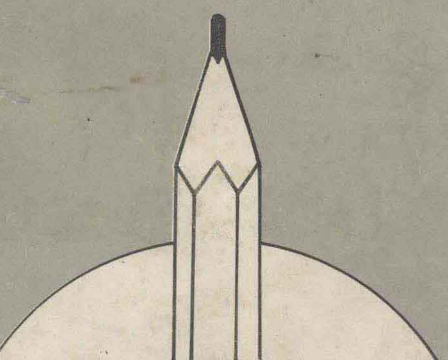
中学各科教学重点难点解析丛书

高中数学

重点.难点.解析与训练

董世奎　孙增彪　张　宁
朱传瑜　邓　钧　编写



广西师范大学出版社

·中学各科教学重点难点解析丛书·

高中数学
重点·难点·解析与训练

董世奎　孙增彪　张　宁
朱传瑜　邓　钧　　　　编写

广西师范大学出版社

中学各科教学重点难点解析丛书

高中数学重点·难点·解析与训练

董世奎 孙增彪 张 宁 编写
朱传瑜 邓 钧

☆

广西师范大学出版社出版
（广西桂林市育才路 3 号）
广 西 新 华 书 店 发 行 广西民族印刷厂印刷

*

开本 787×1092 1／32 印张 15.5 字数 384 千字
1990年 1 月第 1 版 1990年 7 月第 2 次印刷
印 数：50,001—60,000
ISBN 7-5633-0673-0／G·570

定价：4.65 元

编委会名单

序

学习的过程就是知识积累和能力培养的过程。一个中学生要能有效地积累知识并把知识转化为能力，必须掌握所学知识的重点，突破难点。只有这样，才能收到事半功倍的效果。为了帮助初高中各年级同学特别是毕业班的同学，牢固掌握各科知识重点，融会贯通地理解难点，以利于他们的复习和升级、升学，我们约请了北京大学附属中学30多位长期在毕业班任教，具有丰富的教学和辅导工作经验并有众多著述的各科骨干教师，编写了这套《中学各科教学重点难点解析丛书》。丛书严格依据国家教委制定的《全日制中学各科教学大纲》和现行全国统一中学教材，结合近几年来北京地区中学特别是编写者所在学校的教学实践和教改成果，对中学各科（高中政治除外）教材的重点、难点，作出尽量准确精当的解析，并通过对典型例题的分析指出解题的思路、方法和技巧，同时提供一定数量的配套练习和综合训练，以帮助学生牢固掌握知识，培养学生的思维能力、分析能力和表达能力。这套丛书对中学各科教师的教学教改也有参考价值。

参加这套丛书编辑工作的有中国人民大学附中校长高级教师胡俊泽、清华大学附中特级教师孔令颐、北京大学附中副校长高级教师孙增彪、广西师范大学出版社副社长党玉敏、副总编余鑫晖、漓江出版社副总编邓小飞，以及北大附中的高级教师陈育林、董世奎、刘实文、张珖、邱永仪、王立明、韩福胜等同志。参加编辑工作的还有北京教育学院宣武分院、崇文分院、广西师范大学出版社、漓江出版社等单位的同志。

我们希望这套丛书能受到中学各年级同学特别是初高中毕业班同学们的欢迎。由于编写时间仓促，疏漏之处在所难免，恳切期望读者和专家们批评指正。

张德政　默　一

1990年2月

说　　明

当你步入高中，特别是高中毕业前夕，总希望有一本帮助你加深理解高中数学教学内容，提高你的分析问题的能力和解题技巧的书，陪伴你愉快地渡过高中的学习，使你在高中阶段的数学知识有一个坚实的基础。为此，我们根据教学大纲编写了此书。

我们将高中数学中的代数、三角、解析几何和立体几何的重点、难点归纳为二十一讲。每一讲的内容源于教材，并做了较多的补充和引伸。对概念的讲解力求准确、透澈，根据知识点和对数学能力培养的要求精选了一定数量的例题。对于重点例题，事先作了简明的分析，解法灵活多变，事后并有注解，揭示了一些题的解题规律和技巧，以便在数学方法、分析能力上给读者以启迪。每讲又配备了练习题并附答案。

本书可作为高一、高二同学的课外“辅导员”，到高三和课本结合起来就是一套有基础、有提高、重点突出的复习教材。本书也可供教师教学时参考。

本书分别由北大附中高中数学组孙增彪、董世奎、朱传瑜、张宁、邓钧五位老师执笔编写。由于水平有限，编写时间仓促，书中的缺点、错误在所难免，欢迎读者批评指正。

编者

1989年12月于北大附中

目　　录

代 数 部 分

一　函数的基本知识

初中的函数概念是用某变化过程中两变量的相依关系来定义的．高中函数概念在引进集合和映射概念之后，就纳入了集合到集合特殊映射的范畴(数集到数集的映射)．如果说，初中的函数概念是“变动”的，那么，高中的函数概念就在高一级程度上成为“静态”的了．

1．函数概念的三要素

函数概念的三要素是指：定义域、值域和从定义域到值域的对应关系．在这三者中对应关系和定义域是关键．我们在解题过程中往往容易忽视定义域的确定，因此，会得到错误的结果．另外，对应关系的表示方法是多种多样的(图象法，解析法，列表法)，而且同一个函数既可以用解析法，也可用图象法及列表法来表示．就是在解析法表示中，也可有不同的表示形式．而正是这一点既可以给我们灵活解题带来方便，同时也会使我们作出错误的判断．关键的问题还是要抓住函数概念的本质．

例　下面四组中的函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 表示同一个函数的是哪一组．

(A) $f(x)=x, g(x)=(\sqrt{x})^2$;

(B) $f(x)=1$, $g(x)=\dfrac{x}{x}$;

(C) $f(x)=x$, $g(x)=\sqrt[3]{x^3}$;

(D) $f(x)=1$，$g(x)=x^0$.

解 (A)中的 $g(x)=(\sqrt{x})^2$ 可变为 $g(x)=x$，但其定义域为 $x\in[0,+\infty)$，而 $f(x)=x$ 的定义域为 $x\in R$，所以(A)中的两个函数不同；(B)中的 $g(x)=\dfrac{x}{x}$，可变为 $g(x)=1$，但其定义域为 $\{x|x\neq 0, x\in R\}$，而 $f(x)=1$ 的定义域为一切实数，所以(B)中的两个函数不同；(C)中 $g(x)=\sqrt[3]{x^3}$ 可变为 $g(x)=x$，它与 $f(x)=x$，定义域，对应关系，值域都相同，所以(C)中两个函数相同；(D)中 $g(x)=x^0$，可以变为 $g(x)=1$，但它的定义域是 $\{x|x\neq 0, x\in R\}$，而 $f(x)=1$ 的定义域是 $x\in R$，所以它们也不相同。因此相同的只能是(C)组。

说明 两个函数当且仅当"三要素"全部相同时，才表示同一个函数，因此要按照"三要素"是否相同来进行检验。另外，我们不能同其解析式的形式不同而断言两函数不同，这是因为解析式是可以根据一些定理，概念，法则进行变形的。

练习1.1

1. 下列每组函数中，表示同一函数的是______.

(A) $f(x)=\lg x^2$，$g(x)=2\lg x$；

(B) $\sqrt{y}=x$，$y=x^2(x\geqslant 0)$；

(C) $y=\sqrt{x^2}$，$u=|t|$；

(D) $f(x)=|x-1|$，$g(x)=\begin{cases}x-1, & x\in(1,+\infty);\\ 1-x, & x\in(-\infty,1).\end{cases}$

2. 下列每组函数中，表示同一个函数的是______.

(A) $f(x)=\sqrt{x^2}$，$g(x)=(\sqrt{x})^2$；

(B) $f(x)=|x|$，$g(x)=\sqrt{x^2}$；

(C) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$，$g(x)=x+2$；

(D) $f(x)=|x|$, $g(x)=\begin{cases}x, & x\in(0,+\infty);\\ -x, & x\in(-\infty,0).\end{cases}$

(E) $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\in(-1,0);\\ x-1, & x\in(0,1).\end{cases}$ $g(x)=f^{-1}(x)$.

2. 奇偶性

(1) 定义：设有函数$y=f(x)$，若对于$f(x)$定义域内任一个x值，都有$f(-x)=-f(x)$,就称$f(x)$为奇函数；若对于$f(x)$定义域内任一个x值,都有$f(-x)=f(x)$，就称$f(x)$为偶函数，不满足上述性质的函数叫做非奇非偶函数。根据定义可知一个函数具有奇偶性的必要条件是定义域具有对称性。

例1 判断函数$f(x)=(x-1)\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$的奇偶性。

解 函数的定义域为$[-1,1)$，因为定义域不对称,所以这个函数是非奇非偶的。

(2) 奇偶函数的性质

① 奇偶函数的定义域具有对称性；

② 奇函数的图象关于原点对称；

③ 偶函数的图象关于y轴对称；

④ 两个奇(偶)函数的和、差都是奇(偶)函数，一奇一偶两函数和为非奇非偶函数；

⑤ 奇偶性相同的两函数之积(商)为偶函数，奇偶性不同的两函数之积(商)为奇函数(分母不能为 0)；

⑥ 设 $y=f[g(x)]$是$y=f(u)$和 $u=g(x)$的复合函数，那么

i) 如果$g(x)$是奇函数，则当$f(u)$是奇(偶)函数时，y也是奇(偶)函数；

ii) 如果$g(x)$是偶函数，则y也是偶函数。

(3) 判断一个函数的奇偶性的根据

① 奇、偶函数的定义；

② 函数图象；

③ 奇偶函数的性质。

例2 判断函数$f(x)=(x-1)\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$，$x\in(-1,1)$的奇偶性。

解 因为$f(-x)=(-x-1)\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}=-(x+1)\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

$$=-\sqrt{\frac{(1+x)^2(1-x)}{1+x}}=-\sqrt{(1+x)(1-x)}$$

$$=-\sqrt{\frac{(1+x)(1-x)^2}{1-x}}=-(1-x)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

$=(x-1)\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}=f(x)$，所以$f(x)$为偶函数。

例3 判断函数 $f(x)=\begin{cases}1, & x\text{为有理数}\\0, & x\text{为无理数}\end{cases}$ 的奇偶性。

解 当x为有理数时，$-x$也为有理数，故$f(-x)=f(x)=1$；当x为无理数时，$-x$也为无理数，故$f(-x)=f(x)=0$。即对任意实数x恒有$f(-x)=f(x)$，所以函数$f(x)$为偶函数。

例4 讨论函数 $f(x)=x^n-x^{-n}(n\in Z)$的奇偶性。

解 $f(-x)=(-x)^n-(-x)^{-n}$。

当n为偶数时，$f(-x)=x^n-x^{-n}=f(x)$，所以$f(x)$为偶函数；

当n为奇数时，$f(-x)=-x^n+x^{-n}=-(x^n-x^{-n})=-f(x)$，所以$f(x)$为奇函数；

当$n=0$时，$f(x)=0$，此时有$f(-x)=f(x)=0$，且有$f(-x)=-f(x)=0$，所以$f(x)$既是奇函数也是偶函数。

例5 已知$a>0$，$a\neq 1$，$f(x)$是奇函数，判断函数$\phi(x)=(a-1)f(x)\left(\dfrac{1}{a^x-1}+\dfrac{1}{2}\right)$的奇偶性。

解 令$g(x)=\dfrac{1}{a^x-1}+\dfrac{1}{2}$，则

$$g(-x)=\frac{1}{a^{-x}-1}+\frac{1}{2}=\frac{a^x}{1-a^x}+\frac{1}{2}=\frac{2a^x+1-a^x}{2(1-a^x)}$$

$$=\frac{a^x+1}{-2(a^x-1)}=\frac{a^x-1+2}{-2(a^x-1)}=-\frac{1}{a^x-1}-\frac{1}{2}$$

$$=-\left(\frac{1}{a^x-1}+\frac{1}{2}\right)=-g(x).$$

又 $f(x)$是奇函数，故

$\phi(-x)=(a-1)f(-x)g(-x)=(a-1)f(x)g(x)$

$=\phi(x)$。

所以 $\phi(x)$是偶函数。

例6 判断 $f(x)=\dfrac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin x+\cos x}$的奇偶性。

解 函数$f(x)$的定义域为$x\neq 2k\pi-\dfrac{\pi}{2}$，且$x\neq(2k+1)\pi$的一切实数．这样函数的定义域就失去了对称性，因此函数$f(x)$是非奇非偶的。

说明 要说明一个函数是非奇非偶的，原则上要说明理由，不能因为你不会变形就断言此函数是非奇非偶的．比如例2，$f(-x)=(-x-1)\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$，不会变形就说它为非奇非偶的，那就错了．

例7 已知$f(x)$是奇函数，且$f(x)=\begin{cases} f_1(x)=-x^2+2x, \\ f_2(x)=\underline{\qquad\qquad}, \end{cases}$

$x\in[0,+\infty)$,
$x\in(-\infty,0]$. 求$f_2(x)$的解析式。

解法1 $f_1(x)=-x^2+2x=-(x-1)^2+1$，$x\in[0,+\infty)$，作出$f_1(x)$的图象。因为$f(x)$是奇函数，所以它的图象关于原点对称。这样$f_2(x)$的顶点为$(-1,-1)$。$a=1$，因此$f_2(x)=(x+1)^2-1$，$x\in(-\infty,0]$。

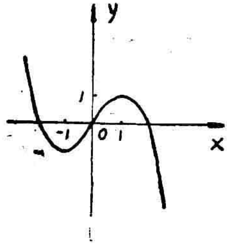


图1-1

解法2 设$x>0$，由$f(x)$为奇函数得 $f_2(-x)=f(-x)=-f(x)=-f_1(x)=-(-x^2+2x)=x^2-2x=(-x)^2+2(-x)$。$\because x>0 \therefore -x<0$，所以$f_2(x)=x^2+2x(x\leqslant 0)$。

练习1.2

1. 判断下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=|2x+3|-|2x-3|$;

(2) $f(x)=\dfrac{x}{e^x-e^{-x}}$;

(3) $f(x)=\ln\dfrac{1-x}{1+x}$，$x\in(-1,1)$;

(4) $f(x)=x^{\frac{2}{5}}$，$x\in(-3,3]$。

2. 已知$f(x)$为偶函数，当$-1\leqslant x\leqslant 0$时，$f(x)=x+1$,那么当$0\leqslant x\leqslant 1$时，$f(x)=$ ______。

3. 单调性

定义 设函数$y=f(x)$的定义域为X,区间$M\subseteq X$,若对任意的$x_1,x_2\in M$,且$x_1<x_2$,有$f(x_1)<f(x_2)$,则称$y=f(x)$是M上的增函数(即$f(x)$在M上递增);若对任意的$x_1,x_2\in M$,且$x_1<x_2$，有$f(x_1)>f(x_2)$，则称$y=f(x)$是M上的减函数(即$f(x)$在M上递减)。M叫做单调区间。

复合函数的单调性：如果$f(u)$与$u=g(x)$具有同一单调性，则复合函数$f[g(x)]$是增函数；如果$f(u)$与$u=g(x)$单调性相异，则复合函数$f[g(x)]$是减函数。

例1 用定义证明$f(x)=x^2-2x$，$x\in(1,+\infty)$是增函数。

证明 设x_1，$x_2\in(1,+\infty)$，且$x_1<x_2$，则

$f(x_1)=x_1^2-2x_1$，$f(x_2)=x_2^2-2x_2$，

$$
\begin{aligned}
f(x_2)-f(x_1)&=x_2^2-2x_2-(x_1^2-2x_1)\\
&=(x_2-x_1)(x_2+x_1-2).
\end{aligned}
$$

$\because$ $x_2>x_1$，$\therefore$ $x_2-x_1>0$。

$\because$ x_1，$x_2\in(1,+\infty)$，$\therefore$ $x_2>1$，$x_1>1$，

$x_2+x_1>2$，$x_2+x_1-2>0$。

$\therefore$ $f(x_2)-f(x_1)>0$，$f(x_2)>f(x_1)$。

故 $f(x)=x^2-2x$在$(1,+\infty)$上是增函数。

例2 用定义证明$f(x)=x^3$在$(-\infty,+\infty)$上是增函数.

证明 设x_1,x_2为任二实数，且$x_1<x_2$，则

$f(x_2)=x_2^3$，$f(x_1)=x_1^3$，

$$
\begin{aligned}
f(x_2)-f(x_1)&=x_2^3-x_1^3=(x_2-x_1)(x_2^2+x_1x_2+x_1^2)\\
&=\frac{1}{2}(x_2-x_1)[(x_1+x_2)^2+x_1^2+x_2^2],
\end{aligned}
$$

$\because$ $x_2>x_1$，$\therefore$ $x_2-x_1>0$，$x_2\neq x_1$。$\therefore$ x_2，x_1中至少有一个不为0．不妨假设$x_1\neq 0$。因此，$x_1^2>0$，$x_2^2\geqslant 0$，

$(x_1+x_2)^2\geqslant 0$ $\therefore$ $(x_1+x_2)^2+x_1^2+x_2^2>0$。

$\therefore$ $f(x_2)-f(x_1)>0$，即$f(x_2)>f(x_1)$。

故$f(x)=x^3$，在$(-\infty,+\infty)$上是增函数。

说明 用定义证明函数的增减性，在对$f(x_2)$，$f(x_1)$作差之后，一般来说将差式进行因式分解，或配方，将$f(x_2)-f(x_1)$的符号的判断转化为各个因式的符号判断。

例3 用定义证明$f(x)=\sqrt{x}$在$[0,+\infty)$上是增函数。

证法1 设x_1，$x_2\in[0,+\infty)$，且$x_1<x_2$，则

$f(x_1)=\sqrt{x_1}$，$f(x_2)=\sqrt{x_2}$，

$$f(x_2)-f(x_1)=\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1}=\frac{x_2-x_1}{\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1}}.$$

$\because$ $x_2>x_1$，$\therefore$ $x_2-x_1>0$，$x_2\neq x_1$。

$\because$ $x_2\neq x_1$，$\therefore$ $\sqrt{x_2}$，$\sqrt{x_1}$不能同时为0。

$\therefore$ $\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1}>0$。$\therefore$ $f(x_2)-f(x_1)>0$，

即 $f(x_2)>f(x_1)$，

故$f(x)=\sqrt{x}$在$[0,+\infty)$上是增函数。

证法2 （反证法）设$x_1,x_2\in[0,+\infty)$，且$x_1<x_2$，则$f(x_1)=\sqrt{x_1}$，$f(x_2)=\sqrt{x_2}$，假设$f(x_2)\leqslant f(x_1)$，即$\sqrt{x_2}\leqslant\sqrt{x_1}$。$\because 0\leqslant x_1<x_2$，$\therefore$ $x_1-x_2=(\sqrt{x_1})^2-(\sqrt{x_2})^2=(\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2})(\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2})$。$\because\sqrt{x_2}\leqslant\sqrt{x_1}$，$\therefore\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}\geqslant0$。又$\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}>0$，$\therefore x_1-x_2\geqslant0$，即$x_1\geqslant x_2$。这与假设$x_1<x_2$矛盾。$\therefore\sqrt{x_2}>\sqrt{x_1}$。故$f(x)=\sqrt{x}$在$[0,+\infty)$上是增函数。

说明 在解题中遇到根式的问题时，常将分子或分母有理化进行转化。

例4 用定义证明$f(x)=\cos x$在$[0,\pi]$是减函数。

证明 设x_1，$x_2\in[0,\pi]$，且$x_1<x_2$，则

$f(x_1)=\cos x_1$，$f(x_2)=\cos x_2$，

$$f(x_2)-f(x_1)=\cos x_2-\cos x_1$$

$$=-2\sin\frac{x_2+x_1}{2}\cdot\sin\frac{x_2-x_1}{2}.$$