普通高等教育"十二五"规划教材

理论力学教程

孙雅珍　侯祥林　主编

中国电力出版社
CHINA ELECTRIC POWER PRESS

普通高等教育“十二五”规划教材

理论力学教程

主　编　孙雅珍　侯祥林
编　写　洪　媛　傅柏权
主　审　程燕平　刘杰民

中国电力出版社

内 容 提 要

本书为普通高等教育“十二五”规划教材。全书共三篇13章，第一篇为静力学，包括静力学基本量与计算、物体受力分析、力系简化、力系平衡方程与应用；第二篇为运动学，包括运动学基础、点的合成运动、刚体平面运动；第三篇为动力学，包括质点动力学基本方程、动量定理、动量矩定理、达朗贝尔原理、动能定理、虚位移原理。此外，本书还包括两个附录：刚体静力学计算机问题分析（并配有光盘）和常见均质物体的转动惯量。

本书强化基础，优化体系，注重提高读者的数值计算能力、分析问题和解决问题的能力，既适用于课堂教学，又便于自学。可作为普通高等院校机械、土建、交通、动力、水利、化工、采矿和冶金等专业40～72中短学时的理论力学教材，同时也可作为成人教育、夜大、函授大学、职工大学相应专业的理论力学教材，还可供有关工程技术人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

理论力学教程/孙雅珍，侯祥林主编. —北京：中国电力出版社，2011.12

普通高等教育“十二五”规划教材

ISBN 978-7-5123-2357-5

Ⅰ.①理… Ⅱ.①孙…②侯… Ⅲ.①理论力学-高等学校-教材 Ⅳ.①O31

中国版本图书馆CIP数据核字（2011）第247415号

中国电力出版社出版、发行

（北京市东城区北京站西街19号 100005 http://www.cepp.sgcc.com.cn）

航远印刷有限公司印刷

各地新华书店经售

*

2012年2月第一版 2012年2月北京第一次印刷

787毫米×1092毫米 16开本 15.5印张 369千字

定价**30.00**元（含1CD）

前　言

本书为普通高等教育"十二五"规划教材，可作为普通高等院校机械、土建、交通、动力、水利、化工、采矿和冶金等专业40～72中短学时的理论力学教材，同时也可作为成人教育、夜大、函授大学、职工大学相应专业的理论力学教材，还可供有关工程技术人员参考。

本书的主要特点如下：

(1) **强化基础**。静力学从基本量（力和力偶）入手，加强基本概念的讲述，着重培养学生基本概念的掌握和计算能力，为后面的平衡方程和动力学基本方程做好充分准备，为后续的力学课程打下坚实的基础；运动学把点的运动学和刚体的基本运动统称为运动学基础，强化运动学基本量（速度和加速度）的理解和计算。

(2) **优化体系**。力系的简化与平衡方程通过空间任意力系（最一般的力系）讲解，避免了各种力系简化的重复内容，并强调了主矢和主矩的概念，为动量定理和动量矩定理打好基础；动力学中为了强调达朗贝尔原理和刚体运动微分方程的一致性，将达朗贝尔原理放在动量定理和动量矩定理之后，同时也强调了矢量运算。

(3) **提高数值计算能力**。为了提高读者的数值计算能力，本书对刚体静力学问题进行了计算机分析，并将程序制成光盘。

(4) **培养分析和解决问题的能力**。例题注重分析和讨论，力求使读者思路清晰，解题步骤明确，培养读者的分析问题和解决问题的能力，既适用于课堂教学，又便于自学。

本书由孙雅珍负责全书统稿。其中，孙雅珍和侯祥林编写各章的内容，第1～第6章的习题由傅柏权编写，第7～第13章的习题由洪媛编写，刚体静力学计算机问题分析由侯祥林编写。

哈尔滨工业大学程燕平教授、沈阳建筑大学刘杰民教授对本书稿作了认真细致地审阅，并提出了许多宝贵意见，编者借本书出版之际，向程教授和刘教授致以深切的谢意。本书编写过程中汲取了国内外优秀教材的许多宝贵经验，在此表示感谢。

限于编者的水平和经验，书中难免会有疏漏和不足之处，恳请同行专家和广大读者批评指正。

此外，为方便读者学习，本书配有刚体静力学计算机问题分析和可视化程序光盘一张。

编　者

2012年1月

主 要 符 号 表

$\boldsymbol{a}_{\mathrm{a}}$	绝对加速度
$\boldsymbol{a}_{\mathrm{n}}$	法向加速度
$\boldsymbol{a}_{\mathrm{t}}$	切向加速度
$\boldsymbol{a}_{\mathrm{r}}$	相对加速度
$\boldsymbol{a}_{\mathrm{e}}$	牵连加速度
$\boldsymbol{a}_{\mathrm{C}}$	科氏加速度
f	动摩擦因数
f_{s}	静摩擦因数
$\boldsymbol{F}$	力
$\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}$	惯性力
$\boldsymbol{F}_{\mathrm{N}}$	法向约束力
$\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}$	主矢或合力
$\boldsymbol{F}_{\mathrm{s}}$	静滑动摩擦力
$\boldsymbol{F}^{(\mathrm{e})}$	外力
$\boldsymbol{F}^{(\mathrm{i})}$	内力
$\boldsymbol{g}$	重力加速度
$\boldsymbol{i}$	x 轴的单位矢量
$\boldsymbol{I}$	冲量
$\boldsymbol{j}$	y 轴的单位矢量
J_z	刚体对 z 轴的转动惯量
J_C	刚体对质心轴的转动惯量
k	弹簧的刚度系数
$\boldsymbol{k}$	z 轴的单位矢量
$\boldsymbol{L}_O$	刚体对点 O 的动量矩
$\boldsymbol{L}_C$	刚体对质心的动量矩
L_z	刚体对 z 轴的动量矩
m	质量
M	平面力偶矩
$M_z(F)$	力 $\boldsymbol{F}$ 对 z 轴的矩
$\boldsymbol{M}$	力偶矩矢
$\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})$	力 $\boldsymbol{F}$ 对点 O 的矩
$\boldsymbol{M}_{\mathrm{I}}$	惯性力的主矩
n	质点的数目
$\boldsymbol{P}$	重力
$\boldsymbol{p}$	动量
r	半径
$\boldsymbol{r}_O$	点 O 的矢径
$\boldsymbol{r}_C$	质心的矢径
T	动能，周期
$\boldsymbol{v}$	速度
s	弧坐标
t	时间
$\boldsymbol{v}_{\mathrm{a}}$	绝对速度
$\boldsymbol{v}_{\mathrm{r}}$	相对速度
$\boldsymbol{v}_{\mathrm{e}}$	牵连速度
$\boldsymbol{v}_C$	质心速度
V	势能
W	力的功
α	角加速度
$\boldsymbol{\alpha}$	角加速度矢量
φ_{m}	摩擦角
δ	变分符号
ω	角速度
$\boldsymbol{\omega}$	角速度矢量

目　录

第三篇　动　力　学

绪　　论

1. 理论力学的研究对象和内容

理论力学是研究物体机械运动一般规律的科学。

物体在空间的位置随时间而改变的运动，称为**机械运动**。机械运动是人们生活和生产实践中最常见的一种运动。在物质的各种运动形式中，机械运动是最简单的一种。物质的各种运动形式在一定条件下可以相互转化，而且在高级和复杂的运动中，往往存在着简单的机械运动。

本课程研究的内容是速度远小于光速的宏观物体的机械运动，它以伽利略和牛顿总结的基本定律为基础，属于古典力学的范畴。

至于速度接近光速的物体和基本粒子的运动，则必须用相对论和量子力学的观点才能完善地予以解释。宏观物体远小于光速的运动是日常生活及一般工程中最常遇到的，古典力学有着最广泛的应用。理论力学所研究的则是这种运动中最一般、最普遍的规律，是各门力学分支的基础。

本课程的内容包括以下三部分。

静力学：物体的受力分析；力系的等效替换和简化；力系的平衡条件及其应用。

运动学：只从几何角度来研究物体的运动（如轨迹、速度和加速度等），而不研究引起物体运动的物理原因。

动力学：研究受力物体的运动与作用力之间的关系。

2. 理论力学的研究方法

研究科学的过程，就是认识客观世界的过程，任何正确的科学研究方法，一定要符合辩证唯物主义的认识论。理论力学也必须遵循这个正确的认识规律进行研究和发展。

通过观察生活和生产实践中的各种现象，实行多次的科学实验，经过分析、综合和归纳，总结出力学的最基本的规律。

在对事物观察和实验的基础上，经过抽象化建立力学模型，形成概念，在基本规律的基础上，经过逻辑推理和数学演绎，建立理论体系。

客观事物都是具体的、复杂的，为找出其共同规律，必须抓住主要因素，舍弃次要因素，建立**抽象化的力学模型**。例如，忽略一般物体的微小变形，建立在力的作用下物体形状、大小均不改变的刚体模型；抓住不同物体间机械运动的相互限制的主要方面，建立一些典型的理想约束模型；为分析复杂的振动现象，建立了弹簧质点的力学模型等。这种抽象化、理想化的方法，一方面简化了所研究的问题；另一方面也更深刻地反映出事物的本质。当然，任何抽象化的模型都是相对的。当条件改变时，必须再考虑到影响事物的新的因素，建立新的模型。又如：在研究物体受外力作用而平衡时，可以忽略物体形状的改变，采用刚体模型；但要分析物体内部的受力状态或解决一些复杂物体系统的平衡问题时，必须考虑到物体的变形，建立弹性体模型。

生产实践中的问题是复杂的，不是一些零散的感性知识所能解决的。理论力学成功地运

用逻辑推理和数学演绎的方法，由少量最基本的规律出发，得到了从多方面揭示机械运动规律的定理、定律和公式，建立了严密而完整的理论体系。这对于理解、掌握以及应用理论力学都是极为有利的。数学方法在理论力学的发展中起了关键作用。近代计算机的发展和普及，不仅能完成力学问题中大量繁杂的数值计算，而且在逻辑推理、公式推导等方面也是极有效的工具。

将理论力学的理论用于实践，在解释世界、改造世界中不断得到验证和发展。实践是检验真理的唯一标准，实践中所遇到的新问题又是促进理论发展的源泉。古典力学理论在现实生活和工程中，被大量实践验证为正确，并在不同领域的实践中得到发展，形成了许多分支，如刚体力学、弹塑性力学、流体力学、生物力学等。大到天体运动，小到基本粒子的运动，古典力学理论在实践中又都出现了矛盾，表现出真理的相对性。在新条件下，必须修正原有的理论，建立新的概念，才能正确指导实践，改造世界，并进一步地发展力学理论，形成新的力学分支。

3. 学习理论力学的目的

理论力学是一门理论性较强的技术基础课。学习理论力学的目的如下。

(1) **工程专业一般都要接触机械运动的问题**。有些工程问题可以直接应用理论力学的基本理论去解决，有些比较复杂的问题，则需要用理论力学和其他专门知识来共同解决。所以学习理论力学是为解决工程问题打下一定的基础。

(2) **理论力学是研究力学中最普遍、最基本的规律**。很多工程专业的课程，例如材料力学、机械原理、机械设计、结构力学、弹塑性力学、流体力学、振动理论、断裂力学以及许多专业课程等，都要以理论力学为基础，所以理论力学是学习一系列后续课程的重要基础。

随着现代科学技术的发展，力学的研究内容已渗入到其他科学领域，例如固体力学和流体力学的理论被用来研究人体内骨骼的强度，血液流动的规律，以及植物中营养的输送问题等，形成了生物力学；流体力学的理论被用来研究等离子体在磁场中的运动，形成电磁流体学；还有爆炸力学、物理力学等都是力学和其他学科结合而形成的边缘科学。这些新兴学科的建立都必须以坚实的理论力学知识为基础。

第一篇　静　力　学

静力学研究物体在力系作用下的平衡规律，这是力学的基本内容，其中所涉及的概念和方法应用广泛，影响深远。

这里的物体是指抽象化的**刚体**。刚体是指物体在力的作用下，其内部任意两点之间的距离始终保持不变。这是一个理想化的力学模型，实际中如果物体受力作用时，变形很小且不影响所要研究问题的实质，就可以忽略其变形，将其视为刚体，这是一种科学的抽象，可以使计算简化。本篇中除特别说明外，文中的物体都指刚体。

力系是指作用在物体上的一组力。若作用在同一刚体的两组不同力系使该刚体的运动状态产生完全相同的变化，则称它们互为**等效力系**。一个力系用其等效力系来代替，称为力系的等效替换。用一个简单力系等效替换一个复杂力系，称力系的**简化**。

平衡是指运动的一种特殊状态，通常理解为物体相对于惯性参考系处于静止或匀速直线运动状态。实践经验表明，物体上作用的力系只要满足一定的条件，即可使物体保持平衡，这种条件称为力系的平衡条件。满足平衡条件的力系称为**平衡力系**。平衡力系也定义为简化结果为零的力系。

静力学主要研究以下三个基本问题：

（1）物体的受力分析。

（2）力系的等效替换和简化。

（3）力系的平衡条件及其应用。

第1章　静力学基本量与计算

力和力偶是力学中的两个基本物理量。本章将介绍力和力偶有关的基本概念及其计算，包括力（力在直角坐标轴上的投影和力沿直角坐标轴的分解）、力矩（力对点的矩矢和力对轴的矩）和力偶矩矢。

1.1　力　和　力　矩

力是物体间的相互机械作用，其效应是改变物体的运动状态（力的外效应）或使物体发生变形（力的内效应）。对不变形的刚体，力只改变其运动状态。

实践表明，力对物体的作用效果取决于力的大小、方向和作用位置或作用点，一般称其为三要素。

在国际单位制（SI）中，力的基本单位是 N 或 kN。力的作用位置一般是指物体的一部分面积或体积。若作用面积或体积很小时可抽象为点，作用在此点的力称为**集中力**，否则称为**分布力**。

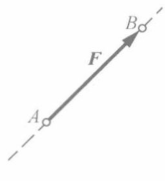

图 1.1

力有两种作用方式：直接作用和场作用。

力是一种矢量。本书中用黑斜体字母 $\boldsymbol{F}$ 表示力矢量，用斜体字母 F 表示力的大小。如图 1.1 所示，力矢量的始端（点 A）或末端（点 B）表示力的作用点；力的方向包括力的作用线位置和指向，AB 所在的直线（图 1.1 中虚线）表示力的作用线，箭头表示力的指向。

本节将介绍力和力矩的概念及其计算。

1. 力沿直角坐标轴的解析表达式

由矢量代数知，任何矢量都可用相对于某个坐标系的坐标（矢量在直角坐标轴上的投影）表示。

如图 1.2 所示直角坐标系（$Oxyz$），沿各坐标轴的单位矢量为 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$，则力 $\boldsymbol{F}$ 的解析表达式为

$$\boldsymbol{F} = F_x\boldsymbol{i} + F_y\boldsymbol{j} + F_z\boldsymbol{k} \tag{1.1}$$

式（1.1）中，F_x、F_y、F_z 表示力 $\boldsymbol{F}$ 相对于各坐标轴的投影。

则力 $\boldsymbol{F}$ 的大小和方向余弦为

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \tag{1.2}$$

$$\cos(\boldsymbol{F},\boldsymbol{i}) = F_x/F,\ \cos(\boldsymbol{F},\ \boldsymbol{j}) = F_y/F,\ \cos(\boldsymbol{F},\ \boldsymbol{k}) = F_z/F \tag{1.3}$$

2. 力在直角坐标轴上的投影

如图 1.2 所示，若已知力 $\boldsymbol{F}$ 与直角坐标系 $Oxyz$ 三轴间的夹角，则可用直接投影法，即

$$F_x = F\cos(\boldsymbol{F},\ \boldsymbol{i}),\ F_y = F\cos(\boldsymbol{F},\ \boldsymbol{j}),\ F_z = F\cos(\boldsymbol{F},\ \boldsymbol{k}) \tag{1.4}$$

如图 1.3 所示，当力 $\boldsymbol{F}$ 与坐标轴 Ox、Oy 间的夹角不易确定时，可把力 $\boldsymbol{F}$ 先投影到坐标平面 Oxy 上，得到力 $\boldsymbol{F}_{xy}$，然后再把这个力投影到 x、y 轴上。在图 1.3 中，已知角 γ 和 φ，则力 $\boldsymbol{F}$ 在三个坐标轴上的投影分别为

$$F_x = F\sin\gamma\cos\varphi,\ F_y = F\sin\gamma\sin\varphi,\ F_z = F\cos\gamma \tag{1.5}$$

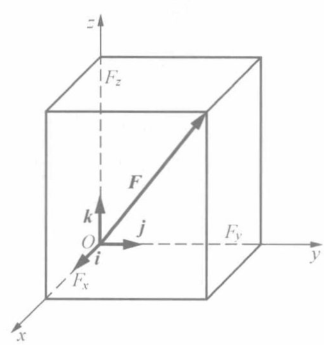

图 1.2

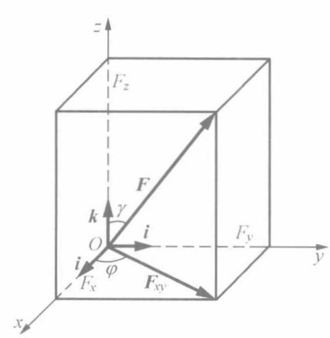

图 1.3

3. 力沿直角坐标轴的分解

将力沿坐标轴 xyz 分解，得 $\boldsymbol{F}_x$、$\boldsymbol{F}_y$、$\boldsymbol{F}_z$，这些分量也称为力沿直角坐标轴的**分力**，则

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_x + \boldsymbol{F}_y + \boldsymbol{F}_z \tag{1.6}$$

由此，力 $\boldsymbol{F}$ 在直角坐标轴上的投影和力沿直角坐标轴的分力间的关系可表示为

$$\boldsymbol{F}_x = F_x\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{F}_y = F_y\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{F}_z = F_z\boldsymbol{k} \tag{1.7}$$

显然，力沿直角坐标轴分力的大小等于在直角坐标轴上投影的绝对值。

【例 1.1】 已知力沿直角坐标轴的解析式为 $\boldsymbol{F}=4\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}-6\boldsymbol{k}$，单位为 kN，求这个力的大小和方向。

解 将式 $\boldsymbol{F}=4\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j}-6\boldsymbol{k}$ 与式（1.1）比较，可得

$$F_x=4,\ F_y=5,\ F_z=-6$$

根据式（1.2）求得力的大小为

$$F=\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}=\sqrt{4^2+5^2+6^2}=\sqrt{77}=8.77\ (\mathrm{kN})$$

根据式（1.3）求得力的方向

$$\cos(\boldsymbol{F},\boldsymbol{i})=F_x/F=4/8.77=0.456,\ \cos(F,\boldsymbol{j})=F_y/F=5/8.77=0.57,$$

$$\cos(\boldsymbol{F},\boldsymbol{k})=F_z/F=-6/8.77=-0.684$$

则角度为

$$(\boldsymbol{F},\boldsymbol{i})=62.87^\circ,\ (\boldsymbol{F},\boldsymbol{j})=55.25^\circ,\ (\boldsymbol{F},\boldsymbol{k})=133.16^\circ$$

【例 1.2】 如图 1.4 所示，立方体的点 C 作用一力 $\boldsymbol{F}$，已知 $F=800$ N，$\gamma=60^\circ$，$\varphi=45^\circ$。求：(1) 该力 $\boldsymbol{F}$ 在坐标轴 x、y、z 上的投影；(2) 力 $\boldsymbol{F}$ 沿 CA 和 CD 方向分解所得的两个分力 $\boldsymbol{F}_{CA}$、$\boldsymbol{F}_{CD}$ 的大小。

解

(1) 根据式（1.5）求得力 $\boldsymbol{F}$ 在坐标轴 x、y、z 上的投影

$$F_x=F\sin\gamma\sin\varphi=489.9\ (\mathrm{N}),\ F_y=F\sin\gamma\cos\varphi=-489.9\ (\mathrm{N}),\ F_z=F\cos\gamma=400\ (\mathrm{N})$$

(2) 分力的大小

$$F_{CA}=F_{xy}=F\sin\gamma=692.8\ (\mathrm{N}),\ F_{CD}=F_z=F\cos\gamma=400\ (\mathrm{N})$$

力对物体的转动效应用**力矩**来度量。**力对点的矩矢**是力使物体绕某一点转动效果的度量，**力对轴的矩**是力绕轴转动效果的度量。

4. 力对点的矩矢

如图 1.5 所示，$\boldsymbol{r}$ 表示点 O 到力 $\boldsymbol{F}$ 作用点 A 的矢径，则力 $\boldsymbol{F}$ 对点 O 的矩可用矢量 $\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})$ 表示。

$$\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F} \tag{1.8}$$

即力对点的矩矢等于矩心到力作用点的矢径与该力的矢积。

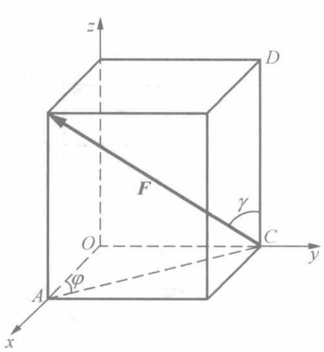

图 1.4

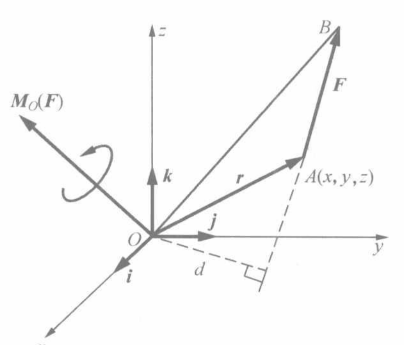

图 1.5

以矩心 O 为原点，建立空间直角坐标系 $Oxyz$，设 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 为 x、y、z 方向的单位矢量。设力的作用点 A 的坐标为 $A(x, y, z)$，力 $\boldsymbol{F}$ 在三个坐标轴上的投影为 F_x、F_y、F_z，则根据式（1.1），力 $\boldsymbol{F}$ 和矢径 $\boldsymbol{r}$ 的解析表达式分别为

$$\boldsymbol{F} = F_x\boldsymbol{i} + F_y\boldsymbol{j} + F_z\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$$

则由矢量代数可知 $\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})$ 表示为行列式

$$\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = (yF_z - zF_y)\boldsymbol{i} + (zF_x - xF_z)\boldsymbol{j} + (xF_y - yF_x)\boldsymbol{k} \tag{1.9}$$

显然，力对点的矩矢是**定位矢量**，其大小和方向与矩心的位置有关。

如图 1.6 所示特殊情况，当 $\boldsymbol{r}$、$\boldsymbol{F}$ 在 xOy 面上，这时 $z=0$、$F_z=0$，式（1.9）简化为

$$\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}) = \begin{vmatrix} x & y \\ F_x & F_y \end{vmatrix} = (xF_y - yF_x)\boldsymbol{k}$$

$\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})$ 垂直于 xOy 面，与 z 轴平行，这是空间问题力对点矩的特例，即平面问题。

如图 1.6 所示平面问题中，点 O 称为**矩心**，点 O 到力的作用线的垂直距离 d 称为**力臂**，力对点的矩定义如下：**力对点的矩是代数量，它的绝对值等于力的大小与力臂的乘积**；它的正负规定如下：力使物体绕矩心逆时针转向转动时为正，反之为负。

$$M_O(\boldsymbol{F}) = \pm F \cdot d \tag{1.10}$$

合力矩定理 1：合力对于某一点之矩，等于力系中所有力对同一点之矩的矢量和。

$$\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}) = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}_i) \tag{1.11}$$

式（1.11）中，$\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}$ 为力系中的合力。

5. 力对轴的矩

如图 1.7 所示，先将力 $\boldsymbol{F}$ 分解为平行于 z 轴的分力 $\boldsymbol{F}_z$ 和垂直于 z 轴的分力 $\boldsymbol{F}_{xy}$（此力即为力 $\boldsymbol{F}$ 在垂直于 z 轴的平面 xOy 上的投影）。由经验可知，$\boldsymbol{F}_z$ 对 z 轴的力矩为零；所以，力 $\boldsymbol{F}$ 对 z 轴的矩就等于分力 $\boldsymbol{F}_{xy}$ 对 z 轴的矩。现用符号 $M_z(\boldsymbol{F})$ 表示力 $\boldsymbol{F}$ 对 z 轴的矩，点 O 为平面 xOy 与 z 轴的交点。因此，力 $\boldsymbol{F}$ 对 z 轴的矩就是分力 $\boldsymbol{F}_{xy}$ 对点 O 的矩，即

$$M_z(\boldsymbol{F}) = M_O(\boldsymbol{F}_{xy}) \tag{1.12}$$

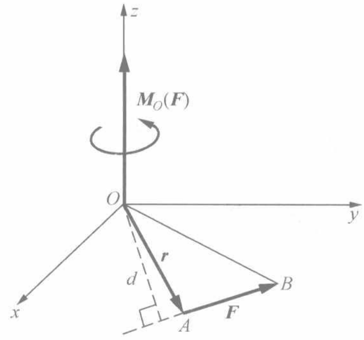

图 1.6

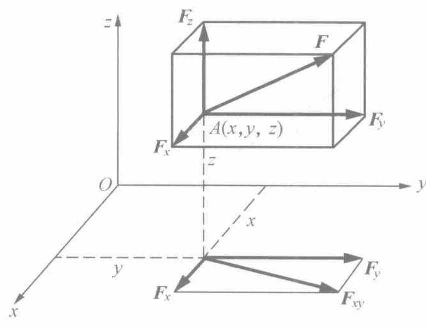

图 1.7

力对轴的矩，等于力在垂直该轴的平面上的投影对该轴与该平面交点的矩。它是一个代数量，正负号由右手螺旋法则确定，即拇指指向与轴正向一致为正，反之为负。

由定义知，当力与轴相交时（$d=0$）或力与轴平行时（此时 $F_{xy}=0$），即当力与轴在同一平面内时，力对该轴的矩等于零。

力对轴之矩的解析表达式

如图 1.7 所示，设力 $\boldsymbol{F}$ 在三个坐标轴上的投影分别为 F_x、F_y、F_z。力作用点 A 的坐标为 $A(x，y，z)$，根据式（1.11）得

$$M_z(\boldsymbol{F}) = M_O(\boldsymbol{F}_{xy}) = M_O(\boldsymbol{F}_x) + M_O(\boldsymbol{F}_y) = xF_y - yF_x$$

同理，可求得力 $\boldsymbol{F}$ 对 x 轴和 y 轴的矩。将此三式合写为

$$M_x(\boldsymbol{F}) = yF_z - zF_y，M_y(\boldsymbol{F}) = zF_x - xF_z，M_z(\boldsymbol{F}) = xF_y - yF_x \tag{1.13}$$

式（1.13）为力对轴之矩的解析式。

6. 力对点的矩矢与力对轴的矩的关系

比较式（1.9）和式（1.13），则

$$M_x(\boldsymbol{F}) = [\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})]_x，M_y(\boldsymbol{F}) = [\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})]_y，M_z(\boldsymbol{F}) = [\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F})]_z \tag{1.14}$$

式（1.14）称为**力对点之矩与力对通过该点的轴之矩的关系式**。

合力矩定理 2：合力对于某一轴之矩，等于力系中所有力对同一轴之矩的代数和。

根据力对点的矩与力对轴矩的关系式（1.14），可得

$$\boldsymbol{M}_z(\boldsymbol{F}_{\mathrm{R}}) = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{M}_z(\boldsymbol{F}_i) \tag{1.15}$$

合力矩定理在下一章力系简化中进行证明。

【例 1.3】 托架 AC 如图 1.8 所示，点 C 在 Oxy 平面内，在点 C 作用一力 $\boldsymbol{F}$，它在垂直于 y 轴的平面内，偏离铅直线的角度为 α，求力 $\boldsymbol{F}$ 对各坐标轴之矩和力 $\boldsymbol{F}$ 对 A 点的矩矢。

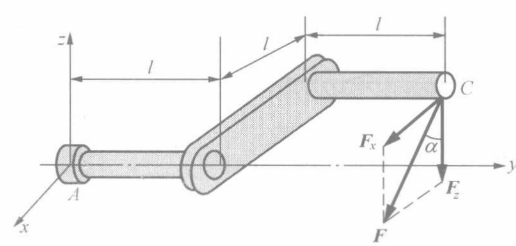

图 1.8

解

（1）力 $\boldsymbol{F}$ 对 x、y、z 三轴的矩。

解法 1　应用力对轴之矩的解析式（1.13）

力 $\boldsymbol{F}$ 作用点 C 的坐标分别为

$$x = -l，y = 2l，z = 0$$

力 $\boldsymbol{F}$ 在各坐标轴上的投影分别为

$$F_x = F\sin\alpha，F_y = 0，F_z = -F\cos\alpha$$

将以上各量代入力对轴之矩的解析式（1.13）中。

则力 $\boldsymbol{F}$ 对 x、y、z 轴的矩为

$$M_x(F) = -F_z \cdot 2l = -2Fl\cos\alpha$$

$$M_y(F) = -F_z l = -Fl\cos\alpha$$

$$M_z(F) = -F_x \cdot 2l = -2Fl\sin\alpha$$

解法 2　应用合力矩定理

力 $\boldsymbol{F}$ 在各坐标轴的分力大小为

$$F_x = F\sin\alpha，F_y = 0，F_z = F\cos\alpha$$

根据合力矩定理（1.15），则力 $\boldsymbol{F}$ 对 x、y、z 轴的矩为

$$M_x(F) = M_x(F_z) = -F_z \cdot 2l = -2Fl\cos\alpha$$
$$M_y(F) = M_y(F_z) = -F_z \cdot l = -Fl\cos\alpha$$
$$M_z(F) = M_z(F_x) = -F_x \cdot 2l = -2Fl\sin\alpha$$

(2) 力 $\boldsymbol{F}$ 对 A 点的矩矢。

解法 1　由式（1.9）和（1.14）得力 $\boldsymbol{F}$ 对 A 点的矩矢为

$$\boldsymbol{M}_A(\boldsymbol{F}) = M_x(\boldsymbol{F})\boldsymbol{i} + M_y(\boldsymbol{F})\boldsymbol{j} + M_z(\boldsymbol{F})\boldsymbol{k} = -2Fl\cos\alpha\boldsymbol{i} - Fl\cos\alpha\boldsymbol{j} - 2Fl\sin\alpha\boldsymbol{k}$$

解法 2　$\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{r}$ 的解析表达式为

$$\boldsymbol{F} = F\sin\alpha\boldsymbol{i} - F\cos\alpha\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{r} = -l\boldsymbol{i} + 2l\boldsymbol{j}$$

根据力对点之矩矢的定义式（1.9），得

$$\boldsymbol{M}_A(\boldsymbol{F}) = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -l & 2l & 0 \\ F\sin\alpha & 0 & -F\cos\alpha \end{vmatrix} = -2Fl\cos\alpha\boldsymbol{i} - Fl\cos\alpha\boldsymbol{j} - 2Fl\sin\alpha\boldsymbol{k}$$

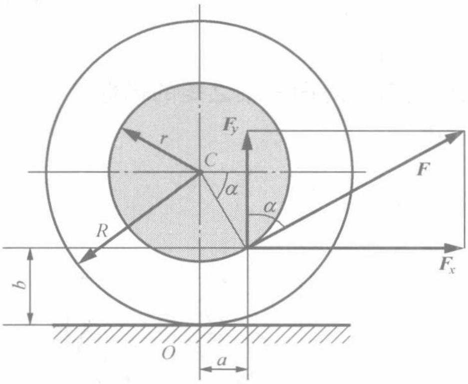

图 1.9

【例 1.4】 如图 1.9 所示轮轴，轮与轴的半径 R、r 已知，力 $\boldsymbol{F}$ 与轴相切，求力 $\boldsymbol{F}$ 对点 O 的矩。

解　本题属于平面问题力对点的矩，由合力矩定理，得

$$M_O(\boldsymbol{F}) = M_O(\boldsymbol{F}_y) + M_O(\boldsymbol{F}_x) = F_y \cdot a - F_x \cdot b$$

其中

$$F_y = F\cos\alpha, \; F_x = F\sin\alpha$$
$$a = r\cos\alpha, \; b = R - r\sin\alpha$$

则

$$M_O(\boldsymbol{F}) = F(r - R\sin\alpha)$$

1.2 力　　偶

1. 力偶和力偶矩矢

由大小相等、方向相反，作用线平行而不重合的二力组成的力系称为**力偶**。力偶能使刚体改变转动状态，使变形体产生扭转和弯曲变形。

力偶两个力所在的平面称为**力偶**的作用面，两力作用线的垂直距离称为力**偶臂**，力偶中一个力的大小和力偶臂的乘积称为力**偶矩**。力偶对刚体的作用效应取决于下列三个因素：力偶矩的大小；力偶作用面的方位；力偶的转向。可以用一个矢量（称为力**偶矩矢**，记作 $\boldsymbol{M}$）将这三个要素同时表示出来：如图 1.10（a）所示，矢的长度表示力偶矩的大小，矢的方位与力偶作用面的法线方位相同，矢的指向与力偶转向的关系服从右手螺旋法则，如图 1.10（b）所示，即右手的四指按力偶矩的转向卷曲，伸直的大拇指就是力偶矩矢 $\boldsymbol{M}$ 的指向。由此可知，力偶对刚体的作用完全由力偶矩矢所决定，可用力偶中的两个力对空间某点之矩的矢量和来度量。可以证明：**力偶中的两个力对空间任一点 O 矩的矢量和都是相等的，恒等于力偶矩矢**。

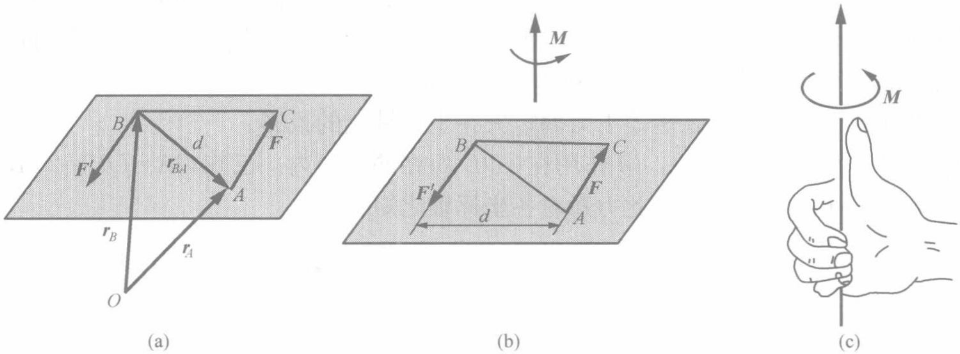

图 1.10

如图 1.10 (a) 所示，组成力偶的两个力 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{F}'$ 对空间任一点 O 之矩的矢量和为

$$\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{F}') = \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}) + \boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}') = \boldsymbol{r}_A \times \boldsymbol{F} + \boldsymbol{r}_B \times \boldsymbol{F}' \tag{1.16}$$

其中，$\boldsymbol{r}_A$ 与 $\boldsymbol{r}_B$ 分别为由点 O 到二力作用点 A、B 的矢径。因 $\boldsymbol{F}' = -\boldsymbol{F}$

故式 (1.16) 可写为

$$\boldsymbol{M}_O(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{F}') = \boldsymbol{r}_A \times \boldsymbol{F} + \boldsymbol{r}_B \times \boldsymbol{F}' = (\boldsymbol{r}_A - \boldsymbol{r}_B) \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{r}_{BA} \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{M}$$

由此可见，力偶对空间任一点的矩矢都等于力偶矩矢，与矩心位置无关，即力偶对刚体的作用效果与矩心无关，所以力偶矩矢沿矩矢方向任意滑动或平移都不影响力偶对刚体的作用效果，可见，力偶矩矢是**自由矢**。

对于所有力偶均在同一平面内的特殊情况，即平面问题，因力偶作用面的方位一定，力偶对物体的转动效应只取决于力偶矩的大小和力偶矩的转向，所以力偶矩可用代数量来表示，即

$$M = \pm Fd$$

正负号的规定与力矩符号规定一致。d 为**力偶臂**。

2. 力偶矩矢的解析式

任何矢量都可用相对于某个坐标系的坐标（矢量在直角坐标轴上的投影）表示，当然力偶矩矢也不例外。

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_x + \boldsymbol{M}_y + \boldsymbol{M}_z = M_x\boldsymbol{i} + M_y\boldsymbol{j} + M_z\boldsymbol{k}$$

其中，$\boldsymbol{M}_x$、$\boldsymbol{M}_y$、$\boldsymbol{M}_z$ 为力偶矩矢在三个坐标轴上的分量，M_x、M_y、M_z 为力偶矩矢在三个坐标轴上的投影。

可见，空间力偶对坐标轴之矩等于力偶矩矢在坐标轴上的投影。

力偶矩矢的大小和方向余弦为

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}$$

$$\cos(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{i}) = M_x/M, \cos(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{j}) = M_y/M, \cos(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{k}) = M_z/M$$

3. 力偶的性质

(1) 力偶不能合成为合力，也不能与力等效。

(2) 力偶中两个力在任一轴上投影的代数和等于零。

(3) 力偶矩矢为自由矢量。力偶中的两个力对空间任一点 O 之矩的和都是相等的，恒等于力偶矩，与矩心的选择无关。