

# 气动声学基础

□ 张强 编著



QIDONG SHENGXUE JICHU



国防工业出版社

National Defense Industry Press

# 气动声学基础

张强 编著

国防工业出版社

·北京·

## 内 容 简 介

本书从声学的基本理论出发,论述了声波的产生、发射、传播和接收的基本原理,尤其对空气动力声的产生机理做了详细的叙述,并重点介绍了流动物体的噪声产生机理,以及旋转叶片噪声、喷流噪声和声爆的预测方法。本书将国内外有关航空声学的最新研究成果整理成气动声学的基本原理,可作为航空航天院校的本科生和研究生教材,也可作为航空航天、动力装置、环境保护等方面的工程技术人员的参考用书。

### 图书在版编目(CIP)数据

气动声学基础/张强编著. —北京:国防工业出版社,  
2012.9  
ISBN 978-7-118-08077-3

I. ①气... II. ①张... III. ①空气动力学:声学  
IV. ①V211

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 053214 号

※

国防工业出版社 出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号 邮政编码 100048)

北京奥鑫印刷厂印刷

新华书店经售

\*

开本 787×1092 1/16 印张 16 $\frac{1}{4}$  字数 375 千字

2012 年 9 月第 1 版第 1 次印刷 印数 1—3000 册 定价 49.00 元

---

(本书如有印装错误,我社负责调换)

国防书店:(010)88540777

发行邮购:(010)88540776

发行传真:(010)88540755

发行业务:(010)88540717

# 前 言

随着时代的进步和科技的发展,声学作为物理学的一个经典分支,越来越体现出它对应用科学、技术、国防、文化生活以及社会等方面的重要性,因而使得声学逐渐渗透到科学技术的其他研究领域,并使之成为一个许多学科的边缘分支。而且声学不论从物理学的其他分支,还是从若干新兴的学科领域,它的确具备现代各个科学相互交叉的边缘学科的特点,已经成为许多学科领域所关注的对象。

正如经典声学所描述的那样,起初,人们总是把声音看成由弹性体表面的振动引起的,并且已经清楚它是通过与它相接触的空气媒质将其弹性体表面的振动过程传播到人耳,为人们所感受。根据这一原理,人们利用弦、棒、膜、板制作了各式乐器、话筒、扬声器等。实际上,除此之外,人们早已发现风扇的旋转、气流从管道出口喷出、流体的绕流、风吹过电线或穿越缝隙也都能产生声音,显然它们属于流体力学中的声学问题。对于这类问题,由于当时人们对流体动力声的产生、发射、传播和接收等各方面的研究还不成熟,因而无法精确描述。直到1952年莱特希尔建立了Lighthill方程,特别是1969年由福克斯·威廉姆斯—霍金斯在Lighthill方程的基础上,运用广义函数理论,推导出FW-H声波波动方程之后,人们才对流体动力声的发声源有了新的认识,并逐渐能采用数学方法较精确地描述它的存在。之后,关于FW-H方程的求解问题,也于1975年由美国NASA的法拉赛特等人比较圆满地解决了。以后,随着计算机计算能力的发展,于20世纪80年代开始,法拉赛特等人又成功地将方程的求解方法应用于实际运动物体所致声场的计算。本书主要就是介绍这方面的内容。

为了帮助读者认识和求解诸如上述流体动力声的声学问题,编著者根据为南京航空航天大学开设的“气动声学基础”课程编著的自编讲义和从事航空声学科学研究的经验编著了本书。本书第1章由闫再友编著,第2章~第7章由张强编著,第8章由秦波编著。为了使读者由浅入深,本书对气动声学问题进行了系统的编排,力求在教学上举一反三。

本书在编著过程中得到教材建设基金的资助,在此表示感谢。由于课程内容和篇幅的限制,尽管做了努力,但仍会有不足之处,因此热忱地期待同行的批评指正,愿共同为祖国乃至国际声学事业的发展作出一份应有的贡献。

编著者

# 目 录

第 1 章 数学基础与流体力学基本方程 .....	1
1.1 梯度算子及其相关公式 .....	1
1.1.1 梯度与梯度算子 .....	1
1.1.2 散度 .....	2
1.1.3 旋度 .....	2
1.1.4 拉普拉斯算子 .....	3
1.1.5 物质导数 .....	3
1.1.6 梯度算子的几个运算公式 .....	3
1.2 张量初步 .....	4
1.2.1 指标与勒维—契维塔(Levi - Civita)张量 .....	4
1.2.2 张量与度量 .....	8
1.2.3 曲线坐标系 .....	10
1.3 傅里叶变换 .....	15
1.4 流体运动的描述方法 .....	16
1.5 高斯定理 .....	17
1.6 体积分的物质导数 .....	18
1.7 连续方程 .....	19
1.8 运动方程 .....	20
1.9 能量方程 .....	21
第 2 章 弹性体振动学 .....	23
2.1 弦的振动 .....	23
2.1.1 弦的振动方程 .....	30
2.1.2 弦振动方程的驻波解 .....	25
2.1.3 弦振动的传播方向和传播速度 .....	28
2.1.4 弦振动的能量 .....	29
2.2 棒的振动 .....	30
2.2.1 棒的纵振动方程 .....	30
2.2.2 棒的纵振动一般规律 .....	32

2.2.3	棒的横振动方程 .....	37
2.2.4	棒横振动的一般规律 .....	41
2.3	膜的振动 .....	45
2.3.1	膜的振动方程 .....	45
2.3.2	圆膜对称振动的一般解 .....	46
2.3.3	圆膜对称自由振动的一般规律 .....	48
2.3.4	圆膜振动的等效集中参数 .....	50
2.3.5	圆膜的强迫振动 .....	52
2.4	板的振动 .....	54
2.4.1	板的振动方程 .....	55
2.4.2	周界钳定圆形板对称振动的一般规律 .....	56
2.4.3	圆板振动的等效集中参数 .....	57
<b>第3章</b>	<b>声波的基本特性 .....</b>	<b>60</b>
3.1	理想流体媒质中的声波方程 .....	60
3.1.1	声波的基本概念 .....	60
3.1.2	理想流体媒质的假设 .....	63
3.1.3	理想流体媒质的三个基本方程 .....	64
3.1.4	小振幅声波的波动方程 .....	67
3.1.5	三维空间的声波方程 .....	68
3.1.6	声波作用下流体质点速度的性质 .....	71
3.2	平面波声场的基本性质 .....	72
3.2.1	平面波声场的一般解 .....	72
3.2.2	声波在媒质中的传播方向 .....	74
3.2.3	声传播中的声阻抗和媒质的特性阻抗 .....	74
3.2.4	声场中的能量关系 .....	75
3.2.5	声功率和声强 .....	77
3.3	声波的反射、折射和透射 .....	81
3.3.1	声学边界及声学边界条件 .....	81
3.3.2	平面波垂直入射时的反射和透射 .....	82
3.3.3	平面波斜入射时的反射和折射 .....	86
3.4	声波的干涉 .....	91
3.4.1	线性声场的声波叠加原理 .....	91
3.4.2	驻波 .....	93
3.4.3	声波的相干性 .....	94

<b>第 4 章 流体动力声源</b> .....	96
4.1 流体动力声源的分类.....	96
4.2 脉动球源(单极子声源) .....	98
4.2.1 脉动球源声场 .....	98
4.2.2 声场对脉动球源的反作用 .....	102
4.2.3 单极子声源 .....	103
4.2.4 包含质量源的非齐次声波波动方程及其声场解 .....	107
4.2.5 线性声场的叠加原理 .....	112
4.2.6 格林函数 .....	113
4.2.7 声场互易原理.....	114
4.3 起伏力源(偶极子声源) .....	114
4.3.1 振动球源所致的声场 .....	115
4.3.2 声场对振动球源的反作用 .....	121
4.3.3 力点源与偶极子声源 .....	124
4.3.4 包含力源的非齐次声波波动方程及其声场解 .....	127
4.4 四极子声源 .....	131
4.4.1 四极子声源所致的声场 .....	132
4.4.2 Lighthill 方程 .....	134
4.5 非齐次声波波动方程 .....	136
4.5.1 含源流体体积元的物理学基本方程 .....	136
4.5.2 非齐次声波波动方程的一般形式 .....	137
4.6 典型的流体动力声源 .....	138
4.6.1 非定常来流所致运动物体表面的偶极子声源 .....	138
4.6.2 流动诱导空腔所致的声波 .....	140
4.6.3 激波干涉所致的声波 .....	142
4.6.4 边缘音 .....	142
4.7 运动声源 .....	143
4.7.1 运动声源的声场.....	143
4.7.2 运动声源的多普勒效应 .....	147
<b>第 5 章 旋转叶片噪声</b> .....	150
5.1 FW-H 声波波动方程 .....	150
5.2 Farassat 关于 FW-H 方程中面声源的时域解 .....	156
5.2.1 动坐标下 FW-H 方程时域解的推迟时间公式.....	158
5.2.2 固定坐标下 FW-H 方程时域解的曲面积分公式.....	162

5.2.3	固定坐标下 FW - H 方程时域解的消失球积分公式 .....	164
5.3	直升机旋翼旋转噪声的时域分析 .....	166
5.3.1	直升机旋翼旋转噪声的声压计算公式 .....	166
5.3.2	声压计算公式中被积函数的所在位置 .....	169
5.3.3	推迟时间方程的求解 .....	175
5.3.4	计算方法及流程图 .....	176
5.4	旋转噪声预测的谐波法 .....	178
5.4.1	定常桨叶载荷下的旋转噪声 .....	178
5.4.2	前飞时定常桨叶载荷下的旋转噪声 .....	185
5.4.3	周期性非定常桨叶载荷下的旋转噪声 .....	187
5.4.4	厚度噪声 .....	189
5.4.5	宽带噪声 .....	193
<b>第 6 章</b>	<b>喷流噪声</b> .....	<b>198</b>
6.1	湍流的基本概念 .....	198
6.1.1	湍流的定义 .....	198
6.1.2	湍流速度分量的二阶相关 .....	198
6.1.3	喷流的湍流结构 .....	204
6.2	喷流噪声预测方法 .....	206
6.2.1	Lighthill 关于非齐次波动方程解的描述形式 .....	206
6.2.2	固定坐标系下预测喷流噪声的计算公式 .....	211
6.2.3	动坐标系下预测喷流噪声的计算公式 .....	214
6.3	声波与气流的相互作用 .....	219
<b>第 7 章</b>	<b>声爆</b> .....	<b>221</b>
7.1	扰动波形的非线性畸变 .....	221
7.2	声爆强度 .....	225
7.2.1	小扰动线化方程及其解 .....	225
7.2.2	超声速细长旋成体小扰动的线化方程及其解 .....	228
7.2.3	修正的小扰动线化理论 .....	231
7.3	大气条件和飞机机动飞行对声爆的影响 .....	241
<b>第 8 章</b>	<b>涡声理论</b> .....	<b>244</b>
8.1	涡声方程 .....	244
8.1.1	Powell 涡声方程 .....	244
8.1.2	声波在无旋平均流中的传播 .....	246



8.1.3	Howe 方程 .....	247
8.2	涡声方程的求解与能量转化 .....	249
8.2.1	涡声方程的求解 .....	249
8.2.2	涡声转换的能量关系 .....	250
8.3	理想流体中二维涡的运动与产生的声 .....	251
8.3.1	周线动力学 .....	251
8.3.2	二维涡变形和运动产生的声 .....	253
<b>参考文献</b>	.....	<b>255</b>

# 第 1 章 数学基础与流体力学基本方程

气动声学研究对象为流体动力产生的声学问题。与经典声学不同,流体动力声的产生来自于运动物体与流体的相互作用或湍流中的流体与流体的相互作用。例如,当存在运动物体周期性插入流体(如具有一定厚度的旋转叶片)时,会导致当地流体密度的变化,从而形成类似于经典声学中的脉动球源;当流体周期性受到运动物体表面流体载荷的作用时,会形成类似于经典声学中的振动球源;另外,湍流中流体脉动涡团间自身内应力的相互作用也会导致声的产生。

不同类型的流体动力声源具有不同的指向性特性和传播规律。不论如何,声能总是以波动的方式按照某种指向性特性和传播规律从源点通过流体介质向整个流场传播。对于流体动力声源的源点,它应该是一个能产生新的声能的流体空间,并且处于这个流体空间的声能以声波的方式将它辐射出去。

声波作为流体中传播的一种能量,参与流体动力学中的某种流动能量的交换。因此,流体动力声的声波波动方程也将涉及流体力学的基本规律或方程。本章简单介绍建立流动力声的声波波动方程所涉及的流体力学基本方程以及为简化方程和求解方程所用的一些数学知识。这些知识对数学上描述流体动力声的声波现象具有重要意义。

## 1.1 梯度算子及其相关公式

### 1.1.1 梯度与梯度算子

梯度在场论中有重要的应用,从而梯度在流场和声场的描述中也起着重要的作用,所以很有必要介绍一下梯度的概念与其数学形式。

一个标量函数在某点的梯度<sup>[1,2]</sup>是一个矢量,梯度的方向是函数在该点增加最快的方向,梯度的大小是函数在该点的空间最大变化率。对于三维空间中的标量函数 $\varphi(x^1, x^2, x^3)$ (在本章中字母或符号的上下标均表示上指标或下指标,不表示幂次计算,幂次计算采用加括号的形式,如 $x^1$ 的平方用 $(x^1)^2$ 表示),在图 1-1-1 所示的笛卡儿坐标系  $Ox^1x^2x^3$  中梯度的表达式为

$$\begin{aligned} \text{grad}\varphi(x^1, x^2, x^3) &= \frac{\partial\varphi(x^1, x^2, x^3)}{\partial x^1} e_1 \\ &+ \frac{\partial\varphi(x^1, x^2, x^3)}{\partial x^2} e_2 + \frac{\partial\varphi(x^1, x^2, x^3)}{\partial x^3} e_3 \end{aligned} \quad (1-1-1)$$

式中: $e_1, e_2, e_3$  分别为坐标轴  $x^1, x^2, x^3$  上的单位矢量。

根据方向导数<sup>[1,2]</sup>的定义,某点 $(x^1, x^2, x^3)$ 处的梯度

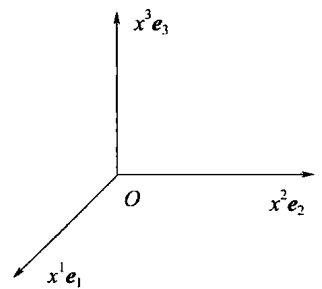


图 1-1-1 三维笛卡儿坐标系

$\text{grad}\varphi(x^1, x^2, x^3)$  与该点处沿任意方向  $s = (s^1, s^2, s^3)$  (设  $s$  为单位矢量) 的方向导数<sup>[1,2]</sup> 之间的关系为

$$\frac{\partial\varphi(x^1, x^2, x^3)}{\partial s} = \text{grad}\varphi(x^1, x^2, x^3) \cdot s \quad (1-1-2)$$

把式(1-1-1)代入式(1-1-2)并展开矢量的点积,则式(1-1-2)变为

$$\frac{\partial\varphi(x^1, x^2, x^3)}{\partial s} = \frac{\partial\varphi(x^1, x^2, x^3)}{\partial x^1} s_1 + \frac{\partial\varphi(x^1, x^2, x^3)}{\partial x^2} s_2 + \frac{\partial\varphi(x^1, x^2, x^3)}{\partial x^3} s_3$$

上面两式表明,任一函数在某点处沿  $s = (s^1, s^2, s^3)$  方向的方向导数等于该函数在该点的梯度在  $s$  方向上的投影。

梯度一个常用的性质是梯度与全微分之间的关系<sup>[2]</sup>,即

$$d\varphi(x^1, x^2, x^3) = \text{grad}\varphi(x^1, x^2, x^3) \cdot dr \quad (1-1-3)$$

式中:  $dr = (dx^1, dx^2, dx^3)$ , 表示矢径微分或有向曲线的弧长微元。

由于全微分的积分与路径无关,所以这个性质对于已知某一函数  $\varphi(x^1, x^2, x^3)$  的梯度  $\text{grad}\varphi(x^1, x^2, x^3)$  求该函数  $\varphi(x^1, x^2, x^3)$  的表达式时非常有用。

如果一个矢量场  $a$  可以表达为某一个标量函数  $\varphi(x^1, x^2, x^3)$  的梯度,即  $a = \text{grad}\varphi(x^1, x^2, x^3)$ , 那么这个矢量场  $a$  就称为位势场,这个标量函数  $\varphi(x^1, x^2, x^3)$  称为位势函数<sup>[2]</sup> (有时也称为位函数或势函数)。

为了更简洁地表达梯度公式,在矢量分析中引入了梯度算子  $\nabla$  (也称哈密顿算子)。在三维笛卡儿坐标系  $Ox^1x^2x^3$  中,梯度算子的表达式为

$$\nabla = e_1 \frac{\partial}{\partial x^1} + e_2 \frac{\partial}{\partial x^2} + e_3 \frac{\partial}{\partial x^3} \quad (1-1-4)$$

它是一个微分算子。因为它既有矢量特性也具有微分特性,所以可以把它看作一个特殊的矢量。因此,它可以与其他矢量进行矢量运算。但是因为它仅对其右侧的变量具有微分特性,所以在进行矢量运算时不可以与其他矢量进行位置上的交换。例如,  $\nabla \cdot a$  不可以写为  $a \cdot \nabla$ 。

标量函数  $\varphi$  的梯度用梯度算子可以表达为

$$\text{grad}\varphi = \nabla \varphi \quad (1-1-5)$$

### 1.1.2 散度

设  $a = [a^1(x^1, x^2, x^3), a^2(x^1, x^2, x^3), a^3(x^1, x^2, x^3)]$  为定义在三维空间某区域上的一个矢量场,在图 1-1-1 所示的笛卡儿坐标系中,  $a$  在任一点  $P(x^1, x^2, x^3)$  处的散度<sup>[3]</sup> 定义为

$$\text{div}a = \frac{\partial a^1}{\partial x^1} + \frac{\partial a^2}{\partial x^2} + \frac{\partial a^3}{\partial x^3} \quad (1-1-6)$$

一个矢量场的散度是一个标量场。矢量场  $a$  的散度用梯度算子  $\nabla$  可表达为

$$\text{div}a = \nabla \cdot a \quad (1-1-7)$$

散度等于零的矢量场称为无源场<sup>[2]</sup>。即如果  $\nabla \cdot a = 0$ , 那么矢量场  $a$  为无源场。

### 1.1.3 旋度

设  $a = [a^1(x^1, x^2, x^3), a^2(x^1, x^2, x^3), a^3(x^1, x^2, x^3)]$  为定义在空间某区域上的矢量

场,在图 1-1-1 所示的笛卡儿坐标系中, $\mathbf{a}$  在任一点  $P(x^1, x^2, x^3)$  处的旋度<sup>[3]</sup> 定义为

$$\operatorname{rota} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x^1} & \frac{\partial}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial x^3} \\ a^1 & a^2 & a^3 \end{vmatrix} = \left[ \frac{\partial a^3}{\partial x^2} - \frac{\partial a^2}{\partial x^3} \right] \mathbf{e}_1 + \left[ \frac{\partial a^1}{\partial x^3} - \frac{\partial a^3}{\partial x^1} \right] \mathbf{e}_2 + \left[ \frac{\partial a^2}{\partial x^1} - \frac{\partial a^1}{\partial x^2} \right] \mathbf{e}_3 \quad (1-1-8)$$

有时也用  $\operatorname{curl} \mathbf{a}$  表示矢量场  $\mathbf{a}$  的旋度。矢量场的旋度是一个矢量场。矢量场  $\mathbf{a}$  的旋度用梯度算子  $\nabla$  可表达为

$$\operatorname{rota} = \nabla \times \mathbf{a} \quad (1-1-9)$$

旋度等于零的矢量场称为无旋场<sup>[2]</sup>。即如果  $\nabla \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$ , 那么矢量场  $\mathbf{a}$  为无旋场。

### 1.1.4 拉普拉斯算子

两个梯度算子  $\nabla$  的点积形成的标量微分算子称为拉普拉斯算子,用  $\Delta$  或  $\nabla^2$  表示(此处上标 2 为平方,不是指标),即

$$\Delta = \nabla^2 = \nabla \cdot \nabla \quad (1-1-10)$$

对于图 1-1-1 所示的笛卡儿坐标系  $Ox^1x^2x^3$ ,拉普拉斯算子的表达式为

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^1 \partial x^1} + \frac{\partial^2}{\partial x^2 \partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^3 \partial x^3} \quad (1-1-11)$$

拉普拉斯算子广泛地应用于拉普拉斯方程、泊松方程、波动方程、亥姆霍兹方程、N-S 方程、薛定谔方程等的数学描述中。

### 1.1.5 物质导数

物质导数<sup>[4]</sup> 是流体力学中的一个重要概念,也称为随体导数<sup>[2]</sup>。它的物理意义是运动流体微团的时间变化率。在本质上物质导数与微积分中的全导数相同<sup>[4]</sup>。流体力学中因为该量具有特定的物理意义,所以物质导数中的微分符号用大写字母  $D$  来表示。用梯度算子以矢量形式表达的物质导数公式为

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \quad (1-1-12)$$

式中: $t$  为时间; $\mathbf{V}$  为流体微团的速度。

式(1-1-12)右端的第一项称为当地导数,第二项称为迁移导数。物质导数是一个微分算子,它既可以作用于标量场,也可以作用于矢量场。例如,对于速度矢量场  $\mathbf{V}$ ,它的物质导数为加速度矢量场  $\mathbf{A}$ ,即

$$\mathbf{A} = \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} \quad (1-1-13)$$

### 1.1.6 梯度算子的几个运算公式

设  $\varphi$  为一个标量场, $\mathbf{a}$  为一个矢量场,则有以下三个公式:

$$\nabla \times (\nabla \varphi) = 0 \quad (1-1-14)$$

在笛卡儿坐标系中,把式(1-1-1)和式(1-1-8)代入式(1-1-14)就可以验证这个式子的成立。更为简洁和方便的理解是式(1-1-14)为两个平行矢量 $\nabla$ 和 $\nabla \varphi$ 之间的叉乘,所以根据叉乘的定义可以得到叉乘的结果为零。 $\nabla \varphi$ 是一个矢量场。该矢量场通常称为有势场。而 $\nabla \times (\nabla \varphi) = 0$ 表明矢量场 $\nabla \varphi$ 的旋度为零。即矢量场 $\nabla \varphi$ 是一个无旋场。所以有时把公式 $\nabla \times (\nabla \varphi) = 0$ 简洁地称为“有势必无旋”。

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) = 0 \quad (1-1-15)$$

在笛卡儿坐标系中,把式(1-1-8)和式(1-1-6)代入式(1-1-15)就可以验证这个式子的成立。更为简洁和方便的理解是式(1-1-15)为两个互相垂直矢量 $\nabla$ 和 $\nabla \times \mathbf{a}$ 之间的点积,所以根据点积的定义可以得到点积的结果为零。散度为零的矢量场称为无源场。而 $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) = 0$ 表明有旋矢量场 $\nabla \times \mathbf{a}$ 的散度为零。即矢量场 $\nabla \times \mathbf{a}$ 是一个无源场。所以有时把公式 $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) = 0$ 简洁地称为“有旋必无源”。

$$(\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{a} = \frac{1}{2} \nabla a^2 - \mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{a}) \quad (1-1-16)$$

式中: $a^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$ 。

由式(1-1-13)可以看出,式(1-1-16)在计算无旋速度场 $\mathbf{V}$ 的加速度 $\mathbf{A}$ 时很有用。对于无旋速度场,其加速度的计算公式为

$$\mathbf{A} = \frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla V^2 \quad (1-1-17)$$

## 1.2 张量初步

张量概念起源于高斯、黎曼和克里斯托弗尔(Christoffel)等建立的微分几何学<sup>[3]</sup>。采用张量形式表达的物理方程不论在任何坐标系下都具有不变的形式。对于同样一个物理问题,用张量形式写出的方程与其他数学形式写出的方程相比,不仅在本质上具有普遍性,而且由于符号的对称与简洁,使得方程精炼而完美。

### 1.2.1 指标与勒维—契维塔(Levi-Civita)张量

#### 1. 坐标变换

为了引出指标的概念,先来看坐标变换。 $n$ 维欧几里得空间是点和矢量的集合。空间中任意 $n$ 个线性独立的矢量 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ 与任意一点 $O$ 可以组成一个坐标系。这样空间中任一矢量 $\mathbf{x}$ 均可以由 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ 这 $n$ 个线性独立的矢量线性表示为<sup>[5]</sup>

$$\mathbf{x} = x^1 \mathbf{e}_1 + x^2 \mathbf{e}_2 + \dots + x^n \mathbf{e}_n \quad (1-2-1)$$

式中:系数 $x^i$ 称为矢量 $\mathbf{x}$ 关于该坐标系的坐标。

坐标系的选择有无限多种可能。另选 $n$ 个线性独立的矢量 $\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \dots, \mathbf{e}_{n'}$ ,它们与点 $O$ 可以组成一个新的坐标系。根据式(1-2-1),新坐标轴矢量均可以由旧坐标轴矢量线性表示为

$$\begin{cases} \mathbf{e}_{1'} = A_{1'}^1 \mathbf{e}_1 + A_{1'}^2 \mathbf{e}_2 + \cdots + A_{1'}^n \mathbf{e}_n \\ \mathbf{e}_{2'} = A_{2'}^1 \mathbf{e}_1 + A_{2'}^2 \mathbf{e}_2 + \cdots + A_{2'}^n \mathbf{e}_n \\ \vdots \\ \mathbf{e}_{n'} = A_{n'}^1 \mathbf{e}_1 + A_{n'}^2 \mathbf{e}_2 + \cdots + A_{n'}^n \mathbf{e}_n \end{cases} \quad (1-2-2)$$

式中:  $A_{j'}^i$  为新坐标轴矢量  $\mathbf{e}_{j'}$  在旧坐标系中的第  $j$  个坐标。

式(1-2-2)写成矩阵形式,即

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_{1'} \\ \mathbf{e}_{2'} \\ \vdots \\ \mathbf{e}_{n'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{1'}^1 & A_{1'}^2 & \cdots & A_{1'}^n \\ A_{2'}^1 & A_{2'}^2 & \cdots & A_{2'}^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n'}^1 & A_{n'}^2 & \cdots & A_{n'}^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{e}_n \end{bmatrix} = \mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{e}_n \end{bmatrix} \quad (1-2-3)$$

矩阵  $\mathbf{A}$  是把旧坐标轴矢量  $\mathbf{e}_i$  变换到新坐标轴矢量  $\mathbf{e}_{i'}$  的坐标轴变换矩阵。由于坐标轴矢量的线性独立性,因此可以证明变换矩阵  $\mathbf{A}$  是非奇异的<sup>[5]</sup>。所以把新坐标轴矢量  $\mathbf{e}_{i'}$  变换到旧坐标轴矢量  $\mathbf{e}_i$  的变换矩阵为  $\mathbf{A}$  的逆矩阵,即

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{e}_n \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{1'} \\ \mathbf{e}_{2'} \\ \vdots \\ \mathbf{e}_{n'} \end{bmatrix} \quad (1-2-4)$$

参照式(1-2-3),  $\mathbf{A}$  的逆矩阵可写成

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} A_1^{1'} & A_1^{2'} & \cdots & A_1^{n'} \\ A_2^{1'} & A_2^{2'} & \cdots & A_2^{n'} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_n^{1'} & A_n^{2'} & \cdots & A_n^{n'} \end{bmatrix} \quad (1-2-5)$$

式中:  $A_i^{j'}$  为旧坐标轴矢量  $\mathbf{e}_i$  在新坐标系中的第  $j'$  个坐标。

上面描述的是坐标轴变换规律,下面来看矢量  $\mathbf{x}$  的坐标变换规律。矢量  $\mathbf{x}$  在新坐标系中可以表示为

$$\mathbf{x} = x^1 \mathbf{e}_{1'} + x^2 \mathbf{e}_{2'} + \cdots + x^n \mathbf{e}_{n'} \quad (1-2-6)$$

把式(1-2-2)代入式(1-2-6),则该表达式变为

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= (x^1 A_{1'}^1 + x^2 A_{2'}^1 + \cdots + x^n A_{n'}^1) \mathbf{e}_1 \\ &\quad + (x^1 A_{1'}^2 + x^2 A_{2'}^2 + \cdots + x^n A_{n'}^2) \mathbf{e}_2 \\ &\quad + \cdots \\ &\quad + (x^1 A_{1'}^n + x^2 A_{2'}^n + \cdots + x^n A_{n'}^n) \mathbf{e}_n \end{aligned} \quad (1-2-7)$$

比较式(1-2-7)与式(1-2-1),可以得到把矢量  $\mathbf{x}$  在新坐标系下的坐标  $x^i$  变换到在旧坐标系下的坐标  $x^i$  的坐标变换为

$$\begin{cases} x^1 = x^{1'} A_{1'}^1 + x^{2'} A_{2'}^1 + \cdots + x^{n'} A_{n'}^1 \\ x^2 = x^{1'} A_{1'}^2 + x^{2'} A_{2'}^2 + \cdots + x^{n'} A_{n'}^2 \\ \vdots \\ x^n = x^{1'} A_{1'}^n + x^{2'} A_{2'}^n + \cdots + x^{n'} A_{n'}^n \end{cases} \quad (1-2-8)$$

式(1-2-8)写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix} = \mathbf{A}^T \begin{bmatrix} x^{1'} \\ x^{2'} \\ \vdots \\ x^{n'} \end{bmatrix} \quad (1-2-9)$$

该式与把新坐标轴矢量  $e_{i'}$  变换到旧坐标轴矢量  $e_i$  的式(1-2-4)相对比,得出的结论是,矢量的坐标变换矩阵为对应的坐标轴变换矩阵的转置逆矩阵<sup>[5]</sup>。

由式(1-2-9),可以得到把矢量  $x$  在旧坐标系下的坐标  $x^i$  变换到在新坐标系下的坐标  $x^{i'}$  的坐标变换为

$$\begin{bmatrix} x^{1'} \\ x^{2'} \\ \vdots \\ x^{n'} \end{bmatrix} = \mathbf{A}^{-T} \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix} \quad (1-2-10)$$

该式与把旧坐标轴矢量  $e_i$  变换到新坐标轴矢量  $e_{i'}$  的式(1-2-3)相对比,得出的结论仍然是,矢量的坐标变换矩阵为对应的坐标轴变换矩阵的转置逆矩阵<sup>[5]</sup>。

需要指出的是,以上公式都没有考虑坐标系的平移也不涉及球坐标、圆柱坐标等曲线坐标系。

## 2. 指标与爱因斯坦求和约定

上述坐标变换中很多表达式都可以用求和符号  $\sum$  进行简写,例如,式(1-2-1)利用求和符号可简写为

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x^i \mathbf{e}_i \quad (1-2-11)$$

这样表达后,公式变得简洁了许多。而式(1-2-7)利用求和符号可简写为

$$\mathbf{x} = \mathbf{e}_1 \sum_{i'=1}^n x^{i'} A_{i'}^1 + \mathbf{e}_2 \sum_{i'=1}^n x^{i'} A_{i'}^2 + \cdots + \mathbf{e}_n \sum_{i'=1}^n x^{i'} A_{i'}^n = \sum_{j=1}^n \sum_{i'=1}^n x^{i'} A_{i'}^j \mathbf{e}_j \quad (1-2-12)$$

此时公式变得虽然比之前简洁了许多,但是形式上还是比较繁琐。有没有更好的方式表达这些求和公式呢?

爱因斯坦于1916年引入了求和约定来简化求和公式的表达<sup>[6]</sup>。爱因斯坦求和约定有以下两项约定<sup>[3]</sup>:

- (1) 除了做特殊说明外,用做上标或下标的拉丁字母指标,都将取从1~n的值。
- (2) 若一项中有一个指标重复,就意味着要对该项的这个指标遍历范围1,2;...,n

求和。

根据以上的约定,式(1-2-11)可以简写为

$$\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i \quad (1-2-13)$$

式(1-2-12)可以简写为

$$\mathbf{x} = x^i A_i^j \mathbf{e}_j \quad (1-2-14)$$

式(1-2-2)可以简写为

$$\mathbf{e}_{i'} = A_i^i \mathbf{e}_i \quad (1-2-15)$$

式(1-2-4)可以简写为

$$\mathbf{e}_i = A_i^{i'} \mathbf{e}_{i'} \quad (1-2-16)$$

式(1-2-8)可以简写为

$$x^i = A_i^{i'} x^{i'} \quad (1-2-17)$$

据以求和的指标(重复的指标)称为哑指标。而没有求和意义的指标(在每个项中只出现一次,不重复的指标)称为自由指标。需要注意的是,在应用求和约定时,一定要保证任何项里均不许同一指标出现两次以上。式(1-2-17)中的指标  $i'$  在右端项中出现两次,所以是哑指标,需要对该指标遍历  $1, 2, \dots, n$  求和;指标  $i$  在左端项和右端项都只出现一次,所以是自由指标,该指标不具有求和意义。

利用爱因斯坦求和约定,式(1-1-6)可以简写为

$$\nabla \cdot \mathbf{a} = \frac{\partial a^i}{\partial x^i} \quad (1-2-18)$$

式(1-1-11)可以简写为

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^i} \quad (1-2-19)$$

式(1-1-12)可以简写为

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad (1-2-20)$$

至于梯度公式和旋度公式,因其复杂性稍后再做简化表达。

### 3. 克罗内克(Kronecker) $\delta$ 符号

克罗内克  $\delta$  的表达式为

$$\delta_j^i = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases} \quad (1-2-21)$$

如果把指标都写为下指标,则克罗内克符号为  $\delta_{ij}$ 。

由该符号的定义,显然有

$$\delta_i^j A_i^i = A_i^j, \delta_j^i \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_j \quad (1-2-22)$$

特别是对于正交单位矢量  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ , 有  $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$ 。

克罗内克符号主要用于对物理现象的数学描述,例如,用于描述笛卡儿坐标系中两个矢量点乘,有



$$\mathbf{a} = a^1 \mathbf{e}_1 + a^2 \mathbf{e}_2 + a^3 \mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{b} = b^1 \mathbf{e}_1 + b^2 \mathbf{e}_2 + b^3 \mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \delta_{ij} a^i b^j$$

利用克罗内克符号,式(1-1-1)可以简写为(微分符号分母中变量的上指标是实际中的下指标)

$$\nabla \varphi = \delta^{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} \mathbf{e}_i \quad (1-2-23)$$

#### 4. 勒维—契维塔(Levi-Civita)张量

勒维—契维塔张量  $\varepsilon_{ijk}$  也称置换张量、排列符号或交错符号,它的定义为

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 0, & i, j, k \text{ 为 } 1, 2, 3 \text{ 的真重复排列} \\ 1, & i, j, k \text{ 为偶排列} \\ -1, & i, j, k \text{ 为奇排列} \end{cases} \quad (1-2-24)$$

即

$$\varepsilon_{111} = \varepsilon_{222} = \varepsilon_{121} = \varepsilon_{311} = \cdots = 0$$

$$\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1$$

$$\varepsilon_{213} = \varepsilon_{321} = \varepsilon_{132} = -1$$

奇偶排列如图 1-2-1 所示,偶排列为逆时针顺序,而奇排列为顺时针顺序。

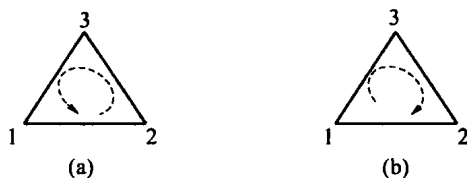


图 1-2-1 三个指标偶奇排列示意图

(a) 偶排列; (b) 奇排列。

在不同的表达式中,该张量的指标可以是上指标也可以是下指标,或者一部分是上指标而其他部分是下指标<sup>[5]</sup>,如  $\varepsilon^{ijk}$ 、 $\varepsilon_{ij}^{\cdot k}$  等。

它也用于对物理现象的数学描述。例如,用于描述笛卡儿坐标系中两个矢量叉乘,有

$$\mathbf{a} = a^1 \mathbf{e}_1 + a^2 \mathbf{e}_2 + a^3 \mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{b} = b^1 \mathbf{e}_1 + b^2 \mathbf{e}_2 + b^3 \mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a^i \mathbf{e}_i) \times (b^j \mathbf{e}_j) = \varepsilon_{ij}^{\cdot k} a^i b^j \mathbf{e}_k$$

因此,笛卡儿坐标系下式(1-1-8)可简写为

$$\nabla \times \mathbf{a} = \varepsilon_i^{\cdot jk} \frac{\partial a^i}{\partial x^j} \mathbf{e}_k \quad (1-2-25)$$

### 1.2.2 张量与度量

#### 1. 张量概念

在使用代数和分析方法研究物理问题时都要引进坐标系,这样代数和分析上所发展