# 特级教师

# 教学优化设计

LITIJIHE

南京师范大学出版社

## 高一

## 立体几何

系列丛书

特级教师教学优化设计

# 高一立体几何

《特级教师教学优化设计》
编委会组织编著

南京师范大学出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

特级教师教学优化设计:高一立体几何/《特级教师教学优化设计》编委会组织编著.—南京:南京师范大学出版社,1999.7

ISBN 7-81047-338-7/G·209

Ⅰ.特… Ⅱ.特… Ⅲ.立体几何课-高中-教学参考资料 Ⅳ.G633

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 20538 号

南京师范大学出版社出版发行

(江苏省南京市宁海路 122 号 邮编 210097)

江苏省新华书店经销 东台印刷厂印刷

*

开本 787×1092 1/16 印张 8 字数 212 千

1999 年 7 月第 1 版 1999 年 7 月第 1 次印刷

定价:8.00 元

本系列丛书采用全息防伪覆膜

# 《特级教师教学优化设计》丛书编委会

（高中部分）

**主　任**　李晏墅　王政红

**委　员**　（按姓氏笔画排列）

万　斌　王　生　王政红　王欲祥

白　莉　孙芳铭　李晏墅　陆一鹏

周久璘　周海忠　周桂良　金立建

姜爱萍　高朝俊

（高一立体几何）

**主　　编**　金立建

**编写人员**　张松年　陶兆龙

# 出版说明

实施素质教育是当前教育改革的热门话题。在学科教学中,如何减轻学生的负担,提高教与学的质量,增强学生的全面素质,又是实施素质教育的关键。为了给学生提供一套能够体现当前教改精神、切实提高学习质量的读物,让学生用最少的时间获得最大的学习收益,我们在大量调查和深入开展研讨的基础上,组织一批特级教师主持编写了这套“特级教师教学优化设计”系列丛书。

随着教改的不断深入,随着高考3+X方案的逐步落实,教育观念、教学内容、教学方法、测评手段都会有较大的改变。本套系列丛书的编写,力图充分吸收当前教改的成果,贯彻现代教育思想,充分注意教学过程中教师的主导作用与学生的主体作用,尤其突出对学生的学法指导。本书对学科知识的辅导,既注意围绕各科的教学大纲,对课本中的知识要点、重点、难点进行系统的梳理和讲解,并安排相应的练习;又注意适应当前教改的要求,注意向3+X的考试内容靠拢,突出知识学习的迁移和综合。“学习指导”、“讲解设计”、“练习设计”是本系列丛书的基本栏目。“学习指导”梳理本课的知识要点或介绍学习方法,“讲解设计”对本课中的知识重点、难点进行阐释,“练习设计”根据本课的知识点安排相应的练习。练习又按“识记与理解”、“巩固与运用”、“拓展与迁移”三个层级进行设计。在语文中,还设计了“写作与欣赏”,题目强调典型性和少而精。

数、理、化以课时为编写单位是本系列丛书的又一大特色。一般的同类书都以单元为编写单位,虽与教材同步,但与课时不同步,操作上的缺陷是显而易见的。本系列丛书吸收了许多特级教师多年教学的研究、实验成果,以课时为单位进行编写,并且每课时安排为一页两面,课时与课时之间不转页,这必将会给使用者带来很大的方便。

为了保证编校质量,本系列丛书设立了责任验题人制度。除加强正常的三审三校外,所有的题目都请专人责任验题,以确保题目以及解题过程和答案的准确性。

作为师范大学出版社,我们力图编出一套有自己特色、有较高水平和实用价值的读物。我们衷心希望本系列丛书能像我社先前开发的“向45分钟要效益”丛书一样,得到广大读者的青睐;也衷心希望读者在使用过程中提出批评意见,以便我们进一步修订,使其日臻完善,成为名牌产品。

# 前　言

依据中学各科教学大纲，配合现行教材和素质教育的要求，结合当前教学改革的实际需要，我们编写了这套《特级教师教学优化设计》丛书。

高一立体几何分册的编写，力求做到体现和反映以下“优化”的特色：

**教学进度与课时安排优化**　将高一立体几何的教学内容按实际教学的需要拆分为55课时，习题课和阶段小结课也合理安排穿插其中，对重要章节及各章节内的重难点内容，进行了合理的分散处理。这样的进度及课时安排可作为教学实施的参考。

**知识内容与教法学法优化**　每课时的知识内容突出重点，对概念与规律的介绍简洁明了、知识体系的梳理纲目清晰，注意前后承接过渡与迁移，覆盖相关的知识点。根据认知规律进行讲解设计，例题讲解循序渐进，先分析引导、详细解答，后提示思路与方法，放手让读者自行分析问题与解决问题。这些例题既可直接用于课堂教学的讲解举例，也可作为学生预习的主要内容。

**练习内容与题量梯度优化**　练习设计的内容注意到知识与能力的并重和同步提高，与社会生产、生活相结合的题较多，逐步向学科之外延伸。题型全面，新题较多，加大了主观题的份量。题量适中，难度梯度合理，有利于分类教学。每一课的“讲解设计”分为两个层次、“练习设计”分为三个层次，教学使用时有了较大的选择余地，因而普适性大大提高。

**栏目设置与编排方式优化**　全书栏目设置精当，一目了然。每课时的讲解与练习占两页，便于进度的把握与对教学效果的实时反馈；书后的参考答案可供测评时灵活使用；大开本的设计符合当前教学用书的潮流与使用习惯。

我们期望由江苏一线特、高级教师编写的这本高一立体几何的教学优化设计能为高中数学教学提供有益的参考。

编　者

# 目 录

# 01　平面

**【概念与规律】**

1. 平面是最原始的几何概念之一，不能用其它更基本的概念来给它下定义，而只能作描述性的定义.

2. 平面是无限延展的.

3. 平面可以理解为点或线的集合.

4. 平面常用平行四边形表示（如图 01－1、图 01－2、图 01－3）.

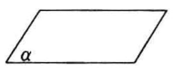


图 01－1

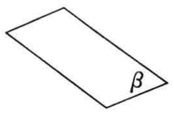


图 01－2

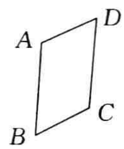


图 01－3

平面也可以用数学符号表示，如平面 $\alpha$，平面 $\beta$，…，平面 $ABCD$，平面 $AC$，….

5. 常用数学符号 $A$，$B$，… 表示点；$a$，$b$，…，$AB$，… 表示直线.

**【讲解设计】· 重点与难点**

**例 1**　试分别画出满足下列条件的直线和平面：

(1) 直线 $a$ 在 $\alpha$ 内；

(2) 直线 $a$ 在 $\alpha$ 上方；

(3) 直线 $a$ 穿过平面 $\alpha$.

**解**　(1) 如图 01－4；(2) 如图 01－5；

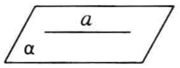


图 01－4

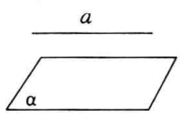


图 01－5

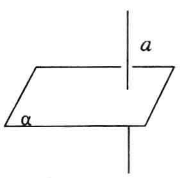


图 01－6

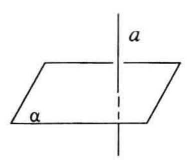


图 01－7

(3) 如图 01－6 或图 01－7.

**点评**　① 在不引起误解的前提下，用数学符号 $\alpha$、$\beta$、… 表示平面时，“平面”二字可以省略，但在其它情形下，“平面”二字切不可少，

② 不能作出如图 01－8 这样的图形，这是因为图 01－8 的立体感不强，易给人以错觉. 当直线贯穿平面时，为了增强立体感，直线被平面挡住的部分可以不画，或者画虚线；而表示平面的平行四边形被直线遮住的边的部分，应当断开.

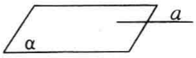


图 01－8

**例 2**　画出平面 $\alpha$ 与平面 $\beta$ 相交的图形.

**画法**　依次画出图 01－9，图 01－10，图 01－11，最后画图 01－12 或图 01－13.

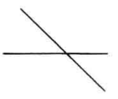


图 01－9

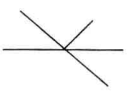


图 01－10

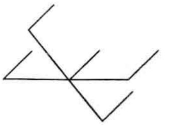


图 01－11

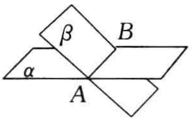


图 01－12

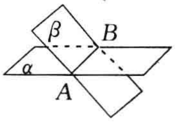


图 01－13

**点评**　① 常用 $\alpha$、$\beta$、$\gamma$ 等字母表示一个平面，字母一般写在表示平面的平行四边形的锐角内. ② 表示平面的平行四边形的锐角一般画成 45°，也可视实际情况而定.

**【讲解设计】· 思路与方法**

**例 3**　图 01－14 是将书打开后成两个相交平面的示意图. 试在该图上再画一条直线，使图形分别表示看到的是书的封面或书的内页.

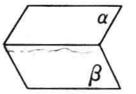


图 01－14

**提示**　关键是画出直线被书挡住的部分.

**例 4**　教室里桌面所表示的平面与墙面所表示的平面是相交平面吗？为什么？

**提示**　用平面的无限延展性来说明.

**【练习设计】·识记与理解**

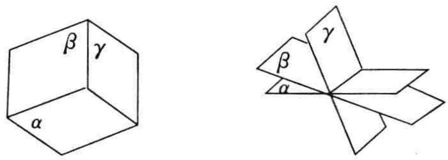
1. 能不能说一个平面长 4 米、宽 2 米?为什么?

2. 下列说法中,指平面的是(　　).

A. 水面　　　　B. 屏面

C. 版面　　　　D. 铅垂面

3. 对于图 01 - 15(甲、乙)而言,下列描述正确的是(　　).




甲　　　乙

图 01 - 15

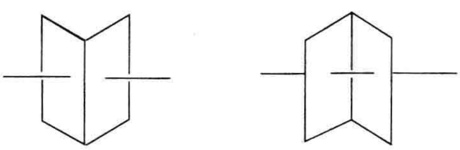
A. 甲表示 3 个平面,乙表示 6 个平面

B. 甲、乙都表示 3 个相交平面

C. 甲将空间分成 4 个部分,乙将空间分成 6 个部分

D. 甲将空间分成 2 个部分,乙将空间分成 6 个部分

4. 观察图 01 - 16 中甲、乙两个图形,用模型来说明它们的位置有什么不同,并用字母来表示各平面.



甲　　　乙

图 01 - 16

5. 图 01 - 17 中,甲、乙两个图形表示竖直放置的三个平面,用模型来说明它们的位置有什么不同,并用字母来表示各平面.

甲　　　乙

图 01 - 17

**【练习设计】·巩固与掌握**

6. 画出下面两个图形,并在图上标出作图序号.

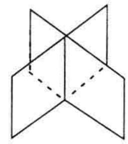


图 01 - 18

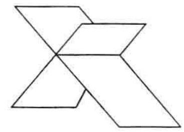


图 01 - 19

7. 根据下列条件,画两条直线穿过一个平面.

(1) 两直线平行;

(2) 两直线的交点在平面上;

(3) 两直线的交点在平面外.

8. 试以教室的墙角为例,说明空间三个平面最多可将空间分为几个部分.

**【练习设计】·拓展与迁移**

9. 用"直线的无限延伸性"说明"平面的无限伸展性".

10. 以墙角为模型,说明空间同垂直于一条直线的两直线是否平行.

11. 完成如下类比练习:

"直线上一点把这条直线分成两部分."

类比方法:

(1) 把直线改为平面,点改为直线,则类比为:____________________.

(2) 把直线改为平面,点改为空间,则类比为:____________________.

12. 试画出下列图形,并在图上标明作图序号

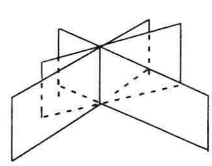


图 01 - 20

# 02　平面的基本性质(一)

**【概念与规律】**

1. 公理 1　(判定直线在平面内的依据)

如果一条直线上的两点在一个平面内,那么这条直线上所有的点都在这个平面内(如图 02 - 1).

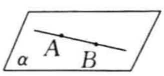


图 02 - 1

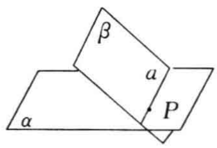


图 02 - 2

2. 公理 2　(判定两个平面相交的依据)

如果两个平面有一个公共点,那么它们有且只有一条通过这个点的公共直线(如图 02 - 2).

3. 直线上所有的点在平面内,也说直线在平面内或者说平面经过直线.

4.“有且只有一条”的含义是:“有”说明“存在”,“只有”说明“唯一”.

5. 符号语言与数学语言的关系:

| 数学符号表示 | 数学语言表达 |
|---|---|
| $A \in a$ | 点 $A$ 在直线 $a$ 上 |
| $A \notin a$ | 点 $A$ 在直线 $a$ 外 |
| $A \in \alpha$ | 点 $A$ 在平面 $\alpha$ 内 |
| $A \notin \alpha$ | 点 $A$ 在平面 $\alpha$ 外 |
| $a \subset \alpha$ | 直线 $a$ 在平面 $\alpha$ 内 |
| $a \cap b = A$ | 直线 $a$、$b$ 相交于点 $A$ |
| $\alpha \cap \beta = a$ | 平面 $\alpha$、$\beta$ 相交于直线 $a$ |

**【讲解设计】· 重点与难点**

**例 1**　在正方体 $ABCD - A'B'C'D'$ 中,画出平面 $ABC'D'$ 和平面 $A'B'CD$ 的交线.

**解**　如图 02 - 3.

连结 $AD'$ 和 $A'D$ 交于点 $M$,连结 $BC'$ 和 $B'C$ 交于点 $N$.

$\because M \in$ 直线 $AD'$, $AD' \subset$ 平面 $ABC'D'$,

$\therefore M \in$ 平面 $ABC'D'$.

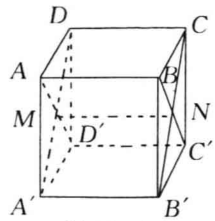


图 02 - 3

又 $M \in$ 直线 $A'D$, $A'D \subset$ 平面 $A'B'CD$,

$\therefore M \in$ 平面 $A'B'CD$.

因此,点 $M$ 是平面 $ABC'D'$ 和平面 $A'B'CD$ 的公共点.

同理,点 $N$ 也是平面 $ABC'D'$ 与平面 $A'B'CD$ 的公共点.

连结 $MN$,根据公理 2 可知直线 $MN$ 就是平面 $ABC'D'$ 和平面 $A'B'CD$ 的交线.

**点评**　① 不要把两个平面的公共点说成两个平面的交点. ② 要确定两个平面的交线,关键在于确定两个平面的两个公共点,这两个公共点的连线就是这两个平面的交线.

**【讲解设计】· 思路与方法**

**例 2**　读图 02 - 4,试根据图形写出其中几何元素:平面 $\alpha$、$\beta$,直线 $PQ$、$a$,点 $A$、$B$ 之间的位置关系.

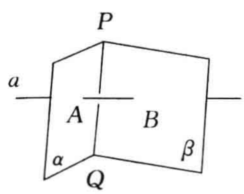


图 02 - 4

**提示**　利用数学符号表达.

**例 3**　在正方体 $ABCD - A'B'C'D'$ 中,点 $P$ 在棱 $CC'$ 上,画出直线 $AP$ 和平面 $A'B'C'D'$ 的交点(如图 02 - 5).

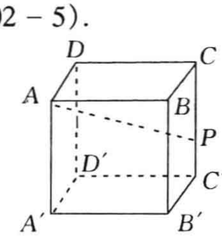


图 02 - 5

**提示**　首先画出 $AP$ 所在的平面 $AA'C'C$

与平面 $A'B'C'D'$ 的交线 $A'C'$，再画出直线 $AP$ 与直线 $A'C'$ 的交点.

**例4** 已知 $E$、$F$、$G$、$H$ 分别是空间四边形 $ABCD$ 各边 $AB$、$AD$、$CB$、$CD$ 上的点，且直线 $EF$ 与 $GH$ 交于点 $P$（如图 02－6）.

求证：点 $B$、$D$、$P$ 在同一条直线上.

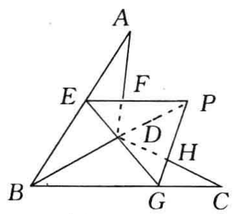


图 02－6

**提示** ① 证明这三点都是两个平面的公共点. ② 证明其中一点是两个平面的公共点，而另两点确定的直线恰为这两个平面的交线.

**【练习设计】·识记与理解**

1. 用数学符号表示下列语句：

(1) 点 $A$ 在平面 $\alpha$ 内，但在平面 $\beta$ 外；

(2) 直线 $a$ 经过平面 $\alpha$ 外一点 $M$；

(3) 直线 $a$ 在平面 $\alpha$ 内，又在平面 $\beta$ 内，即平面 $\alpha$ 和 $\beta$ 相交于直线 $a$.

2. 已知点 $P$ 在直线 $l$ 上，$l$ 在平面 $\alpha$ 内，则 $P$、$l$、$\alpha$ 之间的关系是（　　）.

A. $P \in l,\ l \in \alpha$　　B. $P \in l,\ l \subset \alpha$

C. $P \subset l,\ l \in \alpha$　　D. $P \subset l,\ l \subset \alpha$

3. 图 02－7、图 02－8 用作公理 2 的示意图是否恰当？为什么？

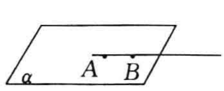


图 02－7

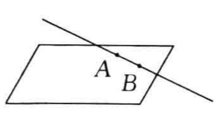


图 02－8

4. 同一平面内的四条直线两两相交，则交点的个数是____________.

5. 三个平面两两相交，则这三个平面可能的交线条数是____________.

**【练习设计】·巩固与掌握**

6. 根据图形，写出几何元素满足的条件.

(1) 图 02－9：________________；

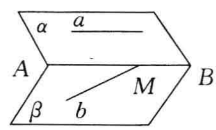


图 02－9

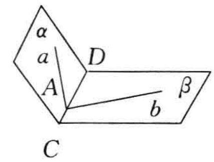


图 02－10

(2) 图 02－10：________________.

7. 如图 02－11，$\triangle ABC$ 的两边 $AB$、$AC$ 分别与平面 $\alpha$ 交于点 $D$、$E$. 若直线 $BC$ 与平面 $\alpha$ 交于点 $F$，试画出 $F$ 的位置.

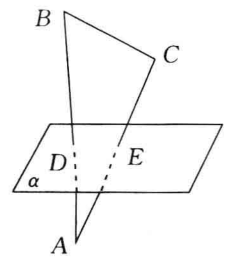


图 02－11

**【练习设计】·拓展与迁移**

8. 如图 02－12，点 $A$、$B \in$ 平面 $\beta$，直线 $a \subset$ 平面 $\alpha$，点 $M \in \alpha$，$M \notin a$，$\alpha \cap \beta =$ 直线 $l$. 试在直线 $a$ 上找一点 $N$，使 $MN$ 与 $AB$ 相交.

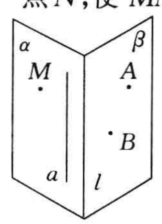


图 02－12

9. 已知平行四边形 $ABCD$ 的四条边 $AB$、$BC$、$CD$、$DA$ 所在的直线分别与另一平面内的平行四边形 $A'B'C'D'$ 的四条边 $A'B'$、$B'C'$、$C'D'$、$D'A'$ 所在的直线交于点 $E$、$F$、$G$、$H$. 求证：$E$、$F$、$G$、$H$ 四点共线.

10. 如图 02－13，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$A_1C$ 与平面 $ABC_1D_1$ 交于点 $Q$，试作出 $Q$ 的位置.

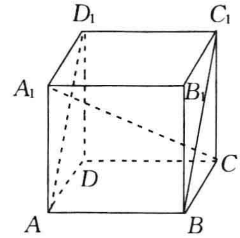


图 02－13

# 03　平面的基本性质(二)

**【概念与规律】**

1. 确定平面的依据:

(1) 公理 3　经过不在同一直线上的三点,有且只有一个平面(如图 03 - 1).

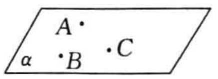



图 03 - 1

(2) 推论 1　经过一条直线和这条直线外的一点,有且只有一个平面(如图 03 - 2).

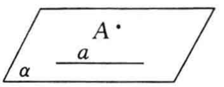



图 03 - 2

(3) 推论 2　经过两条相交直线,有且仅有一个平面(如图 03 - 3).

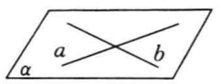



图 03 - 3

(4) 推论 3　经过两条平行直线,有且只有一个平面(如图 03 - 4).

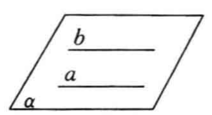



图 03 - 4

2. 数学用语"有且只有"与"确定"是同意词,都包含两层意思:"存在"和"唯一".

**【讲解设计】·重点与难点**

**例 1**　如图 03 - 5,已知:直线 $AB$、$BC$、$CA$ 两两相交,交点分别是 $A$、$B$、$C$. 求证:直线 $AB$、$BC$、$CA$ 共面(在同一平面内).

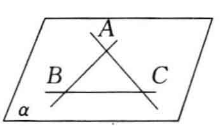



图 03 - 5

**证明一**　$\because AB \cap AC = A$,

$\therefore$ 直线 $AB$ 和 $AC$ 确定平面 $\alpha$.

又 $B \in AB, C \in AC$,

$\therefore B \in \alpha, C \in \alpha$.

$\therefore BC \subset \alpha$.

因此,直线 $AB$、$BC$、$CA$ 共面 $\alpha$.

**证明二**　$\because A$、$B$、$C$ 三点不共线,

$\therefore A$、$B$、$C$ 三点确定一个平面 $\alpha$,

$\therefore A \in \alpha, B \in \alpha$.

又 $A \in AB, B \in AB$,

$\therefore AB \subset \alpha$.

同理,$BC \subset \alpha, CA \subset \alpha$.

因此,$AB$、$BC$、$CA$ 共面.

**点评**　上述两种证法都称为"纳入法",其特点是先找出一个平面,再证明其它的几何元素在这个平面内.

**例 2**　如图 03 - 6,已知直线 $a$ // 直线 $b$,直线 $m$ 与 $a$、$b$ 分别交于点 $A$、$B$. 求证:过 $a$、$b$、$m$ 有且只有一个平面.

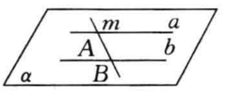



图 03 - 6

**证明**　$\because a \parallel b$,

$\therefore$ 过 $a$、$b$ 有一个平面 $\alpha$.

又 $m \cap a = A, m \cap b = B$,

$\therefore A \in a, B \in b$.

$\therefore A \in \alpha, B \in \alpha$.

又 $A \in m, B \in m$,

$\therefore m \subset \alpha$,

$\therefore a$、$b$、$m$ 共面 $\alpha$.

反设过 $a$、$b$、$m$ 有一个平面 $\beta$ 异于 $\alpha$,

则 $a \subset \alpha, b \subset \alpha, a \subset \beta, b \subset \beta$.

这与 $a \parallel b$,过 $a$、$b$ 有且只有一个平面相矛盾.

因此,过 $a$、$b$、$m$ 有且只有一个平面.

**点评**　证明三线共面与证明三线确定一个平面不同,前者只要证明平面的存在性,而后者不但要证明平面的存在性,还必须证明平面的唯一性.反证法是证明唯一性的常用方法.

**【讲解设计】·思路与方法**

**例 3**　正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中,$M$、

$N$ 分别是 $AA_1$、$D_1C_1$ 的中点(如图 03－7),试画出过点 $D$、$M$、$N$ 的截面图.

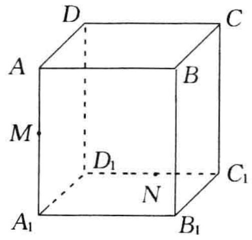



图 03－7

**提示**　利用公理 2 与公理 1.

**例 4**　已知:$A$、$B$、$C$ 是平面 $\alpha$ 外三个点,且 $AB$、$BC$、$CA$ 分别和 $\alpha$ 交于点 $E$、$F$、$G$.求证:$E$、$F$、$G$ 共线(如图 03－8).

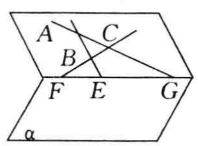



图 03－8

**提示**　利用公理 3、公理 1、公理 2.

**【练习设计】·识记与理解**

1.(1) 三点能确定一个平面的条件是______.

(2) 两条直线能确定一个平面的条件是______.

2. 为什么四条腿的凳子没有三条腿的凳子容易放稳?

3. 一条直线和直线外三点最多可以确定的平面的个数是(　　).

A.3 个　　B.4 个

C.5 个　　D.6 个

4. 四条直线交于一点,则最多可确定平面______个.

5. 三角形、梯形是否一定是平面图形?为什么?

6.(1) 三条直线两两平行,但不共面,它们可以确定平面______个.

(2) 空间四点最多可确定平面______个.

**【练习设计】·巩固与掌握**

7. 过直线外一点与这条直线上的三点分别画三条直线.证明:这三条直线共面.

8. 四条线段首尾相连接,所得的四边形一定是平面图形吗?

9. 如图 03－9,已知线段 $AB$、$CD$ 所在的直线平行,分别与平面 $\alpha$ 交于点 $E$、$F$,试画出线段 $AD$、$BC$ 与平面 $\alpha$ 的交点.

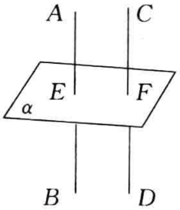



图 03－9

**【练习设计】·拓展与迁移**

10. 已知:空间四点 $A$、$B$、$C$、$D$ 不在同一平面内,求证:直线 $AB$ 和直线 $CD$ 既不相交也不平行.

11. 过一个已知点的五条直线可以确定的平面的个数是______.

12. 四条直线两两相交,且没有四线共点,求证:这四条直线共面.

13. 如图 03－10 中,已知点 $M$、$N$、$P$ 分别是四面体 $ABCD$ 的棱 $AD$、$BD$、$CD$ 上的点,点 $S$ 在面 $ABC$ 内,试画出直线 $SD$ 与平面 $MNP$ 的交点.

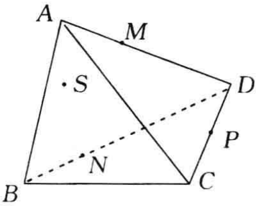



图 03－10

# 04　水平放置的平面图形的直观图的画法

**【概念与规律】**

1. 直观图：把空间图形在平面内画得既富有立体感，又能表达出图形各主要部分的位置关系和数量关系的图形.

2. 斜二测画法的规则：

(1) 在已知图形中取互相垂直的轴 $Ox$、$Oy$，画直观图形时，把它们画成对应的轴 $O'x'$、$O'y'$，使 $\angle x'O'y' = 45°$(或 $135°$).

(2) 已知图形中平行于 $x$ 轴和 $y$ 轴的线段，在直观图形中分别画成平行于 $x'$ 轴和 $y'$ 轴的线段.

(3) 已知图形中平行于 $x$ 轴的线段，在直观图中保持原长度不变；平行于 $y$ 轴的线段，在直观图中，长度为原来的一半.

2. 画水平放置的平面图形的直观图，关键是确定直观图的顶点，而顶点应放在轴上或与轴平行的直线上.

**【讲解设计】·重点与难点**

**例 1**　画水平放置的正五边形的直观图(如图 04－1).

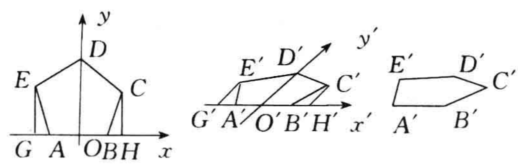



图 04－1

**画法**　(1) 在已知正五边形 $ABCDE$ 中，取边 $AB$ 所在的直线为 $x$ 轴，以线段 $AB$ 的垂直平分线为 $y$ 轴. 分别过点 $C$、$E$ 作 $CH \parallel Oy$、$EG \parallel Oy$，与 $x$ 轴分别交于点 $H$、$G$. 再画对应的轴 $O'x'$、$O'y'$，使 $\angle x'O'y' = 45°$.

(2) 以点 $O'$ 为中点、在 $x'$ 轴上分别取 $G'H' = GH$，$A'B' = AB$. 分别过 $G'$、$H'$ 在 $x'$ 轴的上方作 $G'E' \parallel O'y'$、$H'C' \parallel O'y'$ 并使 $G'E' = \frac{1}{2}GE$、$H'C' = \frac{1}{2}HC$；在 $y'$ 轴上 $x'$ 轴的上方，取 $O'D' = \frac{1}{2}OD$.

(3) 连结 $B'C'$、$C'D'$、$D'E'$、$E'A'$，所得的五边形 $A'B'C'D'E'$ 就是正五边形 $ABCDE$ 的直观图.

**点评**　画水平放置的多边形的直观图，要充分利用图形的对称性选坐标轴. 最后再擦去辅助线，包括 $x'$ 轴、$y'$ 轴(也可以保留辅助线).

**例 2**　如图 04－2 中，图(2) 是图(1) 的斜二测画法的直观图，找出错误之处，并且画出正确的直观图.

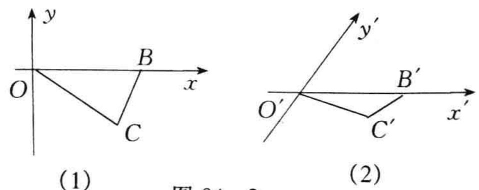



图 04－2

**解**　点 $C'$ 的位置不对.

**画法一**　作 $CD \parallel Ox$，交 $y$ 轴于点 $D$，画对应轴 $O'x'$、$O'y'$，使 $\angle x'O'y' = 45°$，在 $O'x'$ 上取 $O'B' = OB$，在 $y'$ 轴的负半轴上取 $O'D' = \frac{1}{2}OD$. 过 $D'$ 作 $x'$ 轴的平行线，在这条直线上 $y'$ 轴的右边取 $D'C' = DC$，连结 $O'C'$、$B'C'$，则 $\triangle O'B'C'$ 即为所求三角形，如图 04－3(1)、(2).

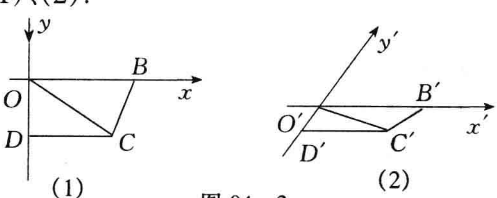



图 04－3

**画法二**　作 $CD \parallel Oy$，交 $x$ 轴于点 $D$，画对应轴 $O'x'$、$O'y'$，使 $\angle x'O'y' = 45°$，在 $x'$ 轴的正半轴上取 $O'D' = OD$，$O'B' = OB$，过 $D'$ 作 $O'y'$ 的平行线，在这条直线上 $x'$ 轴的下方取 $D'C' = \frac{1}{2}DC$，连结 $O'C'$、$C'B'$，则 $\triangle O'B'C'$ 即为所求三角形，如图 04－4(1)、(2).

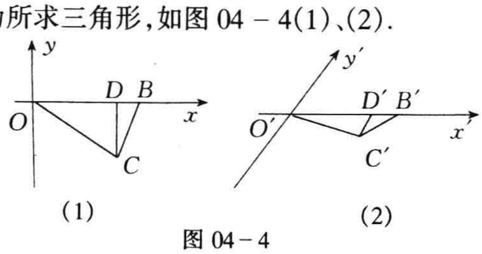



图 04－4

**点评** 画水平放置的平面图形的直观图，难点是确定不在坐标轴上的点的位置，而要确定这样的点的位置，应该通过这一点的坐标的几何表示——平行于坐标轴的线段来确定.

**【讲解设计】·思路与方法**

**例3** 如图04－5是四边形 $ABCD$ 的水平放置的直观图 $A'B'C'D'$，试还原成四边形 $ABCD$.

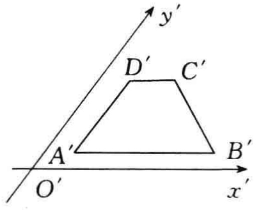



图04－5

**提示** 利用 $A'B' \parallel x'$ 轴、$A'D' \parallel y'$ 轴，得出 $AB \parallel x$ 轴、$AD \parallel y$ 轴.

**【练习设计】·识记与理解**

1. 画水平放置的边长为2cm的正方形的直观图.

2. 画水平放置的边长为2cm的正三角形的直观图.

3. 画水平放置的边长为2cm、4cm的平行四边形的直观图.

4. 画水平放置的等腰梯形的直观图，已知等腰梯形的上、下底长分别是2cm、4cm，高为3cm.

5. 画出水平放置的边长为2cm的正六边形的直观图，使 $\angle x'O'y' = 135°$.

**【练习设计】·巩固与掌握**

6. 画出图04－6中的水平放置的四边形的直观图.

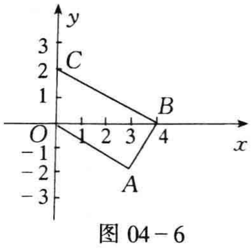



图04－6

7. 画出水平放置的五边形(如图04－7)的直观图.

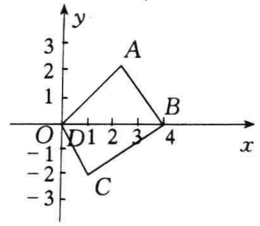



图04－7

8. 画出如图04－8中两个水平放置的平面图形的直观图.

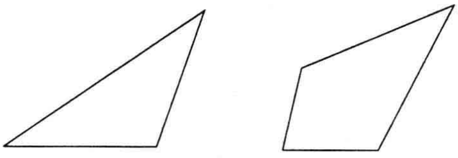


图04－8

**【练习设计】·拓展与迁移**

9. 如图04－9是 $\triangle ABC$ 的水平直观图，试还原成 $\triangle ABC$.

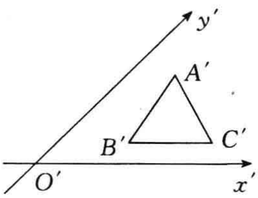



图04－9

10. 如图04－10是四边形 $ABCD$ 的水平直观图，试还原成四边形 $ABCD$.

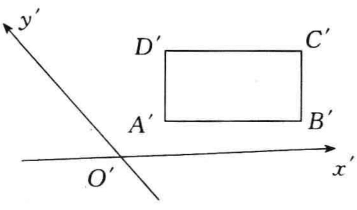



图04－10

11. 如图04－11是 $\triangle ABC$ 的直观图，试求 $\triangle ABC$ 的面积.

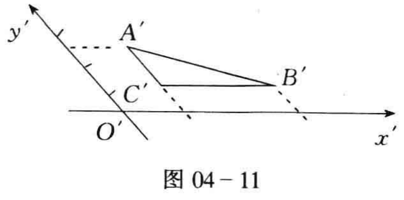



图04－11

## 05　空间两条直线的位置关系(一)

**【概念与规律】**

1. 不同在任何一个平面内的两条直线称为异面直线.

2. 空间两条直线的位置关系有三种：相交、平行、异面.

3. 空间两条直线的位置关系还可进行如下分类.

(1) 以有无公共点为标准，可分为：

① 有一个公共点 —— 相交；

② 没有公共点 —— 平行、异面.

(2) 以平行为标准，可分为：

① 平行；

② 不平行 —— 相交、异面.

(3) 以平面的基本性质为标准，可分为：

① 共面 —— 相交、平行；

② 异面.

4. 异面直线的表示(如图 05 - 1).

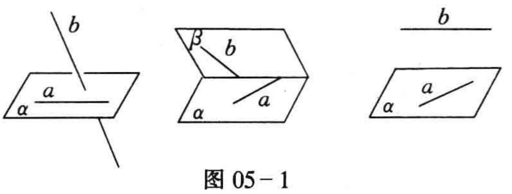



图 05 - 1

**【讲解设计】· 重点与难点**

**例 1**　过平面外一点与平面内一点的直线，与平面内不经过该点的直线是异面直线.

已知：$a \subset \alpha, A \notin \alpha, B \in \alpha, B \notin a$(如图 05 - 2).

求证：直线 $AB$ 和 $a$ 是异面直线.

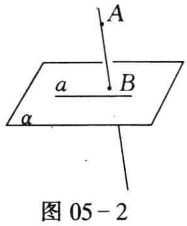



图 05 - 2

**证法一**　假设直线 $AB$ 与 $a$ 在同一个平面内，那么这个平面一定经过点 $B$ 和直线 $a$.

$\because B \notin a$，经过点 $B$ 与直线 $a$ 只能有一个平面 $\alpha$，

$\therefore$ 直线 $AB$ 与 $a$ 应在平面 $\alpha$ 内.

$\therefore A \in \alpha$，这与已知 $A \notin \alpha$ 矛盾.

$\therefore$ 直线 $AB$ 和 $a$ 是异面直线.

**证法二**　假设直线 $AB$ 与 $a$ 不异面，则直线 $AB$ 与 $a$ 平行或相交.

若直线 $AB \parallel a$，则 $AB$ 与 $a$ 确定一个平面，这个平面一定经过点 $B$ 和直线 $a$.

$\because B \notin a$，经过点 $B$ 与直线 $a$ 只能有一个平面 $\alpha$，

$\therefore$ 直线 $AB$ 与 $a$ 应在 $\alpha$ 内.

$\therefore A \in \alpha$，这与 $A \notin \alpha$ 矛盾.

若 $AB$ 与 $a$ 相交，交点为 $P$，

$\therefore P \in a$，且 $P \neq B$.

又 $a \subset \alpha$，

$\therefore P \in \alpha$.

又 $B \in \alpha, P \in AB, B \in AB$，

$\therefore AB \subset \alpha$.

$\therefore A \in \alpha$，这与 $A \notin \alpha$ 矛盾.

因此，直线 $AB$ 与 $a$ 是异面直线.

**点评**　① 证明两条直线异面通常用反证法，反证法是一种间接证法，在立体几何证题中经常用到. 在运用反证法时，一定要严格按照步骤分层次进行：

第一步，作出和结论相反的假设；

第二步，从假设中出发，推导出一个与已知条件或某一公理、定理，或某一已获证的命题相抵触的结论，从而得到一对逻辑矛盾；

第三步，推翻假设，肯定题中的结论.

② 利用反证法证明两条直线异面，有两种假设：一是假设两直线共面；二是假设两直线平行或相交. 必须指出，后一种假设往往不如前一种假设优越.

**【讲解设计】· 思路与方法**

**例 2**　空间四边形的两条对角线是异面直线.

**提示**　利用反证法.

【练习设计】·识记与理解

1. 举出教室里的几对异面直线的例子.

2. 两条异面直线是指(　　).

A. 空间内没有公共点的两条直线

B. 平面内一条直线与平面外一条直线

C. 分别在两个平面内的两条直线

D. 不同在任何一个平面内的两条直线

3. 若 $a$ 与 $b$ 是异面直线, $b$ 与 $c$ 也是异面直线,则 $a$ 与 $c$ 的位置关系是(　　).

A. 一定是异面直线

B. 一定是相交直线

C. 平行直线或相交直线

D. 相交、平行或异面都有可能

4. 三条直线两两异面,试画图表示.

5. $a$、$b$ 是两条异面直线, $a$ 上有三个点, $b$ 上有四个点,则这七个点可确定的平面的个数是(　　).

A.7　　B.9

C.13　　D.30

6. 下列四个命题:

(1) 直线 $a$、$b$ 相交于点 $P$, $Q$ 是直线 $a$ 外的一点,则 $P$、$Q$ 和 $a$ 可确定一个平面 $\beta$,直线 $b$ 在平面 $\beta$ 内.

(2) 分别在两个平面内、没有公共点的两条直线必是异面直线.

(3) 分别与两条异面直线 $AB$、$CD$ 都相交的直线不一定是异面直线.

(4) 不共面的空间五点中,有且仅有三点共线,则过不共线的三点的平面有五个.

其中正确命题的个数是(　　).

A. 0　　B.1

C.2　　D.4

7. $a$、$b$ 为异面直线,直线 $c$、$d$ 分别与 $a$、$b$ 都相交,则 $a$、$b$、$c$、$d$ 四条直线可确定平面的个数是(　　).

A.2　　B.3

C.4　　D.3 或 4

8. 正方体的 12 条棱所在的直线中,可组成异面直线的对数是(　　).

A.12　　B.18

C.24　　D.30

【练习设计】·巩固与掌握

9. 已知线段 $AB$、$CD$ 所在的直线是异面直线.求证:直线 $AC$ 与 $BD$ 也是异面直线.

10. 如图 05－3,已知:平面 $\alpha \cap$ 平面 $\beta =$ 直线 $l$,直线 $a \subset \alpha$,直线 $b \subset \beta$, $a \cap l = A$, $b \cap l = B$.

求证:直线 $a$ 与 $b$ 是异面直线.

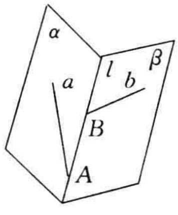



图 05－3

11. 试判断与两条异面直线都相交的两条直线的位置关系.

【练习设计】·拓展与迁移

12. 如图 05－4,在空间四边形 $ABCD$ 中,点 $E$ 在 $AD$ 上,点 $F$ 在 $BC$ 的延长线上.

求证:直线 $CD$ 与 $EF$ 异面.

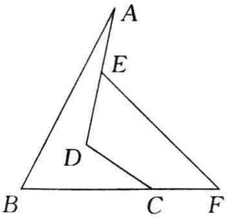



图 05－4

13. 三条直线都与两条异面直线相交,试判断这五条直线所确定的平面的个数.