

朱 健 编著

结构动力学原理 与地震易损性分析



科学出版社

内 容 简 介

本书是一本理论、应用和实践相结合的结构动力损伤方面的应用研究型著作。全书共 10 章:第 1 章和第 2 章阐述了动力学基础,包括结构动力学概述、单自由度体系振动问题;第 3 章和第 4 章介绍了结构动力分析常用方法,包括反应谱分析计算方法和时程分析计算方法;第 5 章介绍了结构动力损伤研究的背景以及地震易损性研究的意义、内容等;第 6 章分析了地震风险性;第 7 章分析了常规钢筋混凝土结构动力易损性;第 8 章分析计算了隔减震结构动力易损性;第 9 章分析了地震易损性与地震灾害保险;第 10 章为结构动力损伤研究展望。

本书可作为高等院校结构工程专业、防灾减灾与防护工程专业研究生的动力学与结构抗震学习教材,也可作为土木工程结构、交通专业研究生的选修参考书,还可为地震保险精算人员提供理论参考依据。

图书在版编目(CIP)数据

结构动力学原理与地震易损性分析 / 朱健编著. —北京: 科学出版社, 2013

ISBN 978-7-03-036236-0

I. ①结… II. ①朱… III. ①建筑结构-结构动力学②建筑结构-防震设计 IV. ①TU311.3②TU352.104

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 310424 号

责任编辑:陈 捷 张海丽 / 责任校对:钟 洋

责任印制:张 倩 / 封面设计:陈 敬

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

铭浩彩色印务有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2013 年 1 月第 一 版 开本: B5(720×1000)

2013 年 1 月第一次印刷 印张: 14 1/2

字数: 280 000

定价: 70.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前 言

工程结构的抗震性能和动力损伤一直是工程技术界和力学学术界关注的焦点,其研究热度长盛不衰。究其原因,一方面是由于它与工程的安全性直接相连,事关重大;另一方面则是对此问题的研究同时涉及结构宏观性与工程材料微观性两个方面,涉及面广,机理复杂,极富挑战性。面对这样的态势,部分高校工科专业相继开设了结构动力学、结构抗震及工程本构行为的相关课程。

对于结构抗震及动力损伤的研究由来已久,但目前国内对于结构地震易损性的研究才刚刚起步,成果不多且仅见于科技文献,将结构动力学原理与地震易损性结合起来论述的专著或教材非常少。因此,作者在总结、归纳前人研究体会和个人研究成果的基础上,根据目前土木结构抗震与动力损伤研究的需要,撰写了这部理论与应用相结合的偏研究型专著。

本书具有以下两方面的突出特点:

- (1) 结构动力学基本理论与工程应用(抗震、隔震)相结合;
- (2) 理论与实践(计算机应用)相结合。

全书共 10 章;第 1 章介绍结构动力学分析的目的、动力荷载类型、结构动力计算特点以及三种运动学方法,即达朗贝尔原理、虚功原理和哈密尔顿原理;第 2 章介绍单自由度体系振动力学问题;第 3 章介绍反应谱分析计算方法;第 4 章介绍时程分析计算方法;第 5 章介绍结构动力损伤研究与结构地震易损性研究的意义、内容;第 6 章分析地震风险性;第 7 章应用专业有限元软件完成常规钢筋混凝土结构的非线性动力时程分析和增量动力时程分析,介绍易损性分析内容;第 8 章讨论几类常见被动隔减震消能结构动力损伤分析与地震易损性分析算例;第 9 章专题研究结构地震易损性与地震灾害保险费率之间的理论关系计算;第 10 章概述结构动力损伤分析研究的重大意义并对其进行展望。

本书的著述得到了恩师周福霖院士、广州大学工程抗震研究中心谭平研究员的热情指导和大力支持,在此表示诚挚的谢意! 本书的部分内容来源于作者承担的国家自然科学基金重点项目“重大工程结构地震损伤破坏的控制原理与方法”(90815027)和国家自然科学基金项目“强震下层间隔震体系的损伤破坏机制及性能控制研究”(51078097)子课题的研究成果;此外,本书在撰写过程中还参考了有关专家的研究成果和资料,在此一并表示衷心的感谢。

本书的出版得到了宁夏自然科学基金项目(211 重点项目)“基于干湿冻融和跨尺度理论的大跨工业厂房结构时变损伤研究”(NZ1156)的资助,在此

目 录

前言

第 1 章 结构动力学概述	1
1.1 结构动力学研究对象与研究目的	1
1.1.1 动荷载的定义	2
1.1.2 动荷载的分类	2
1.2 结构动力学的任务和研究内容	3
1.2.1 结构动力学问题的基本特点	4
1.2.2 结构动力学研究任务	4
1.2.3 结构动力学研究内容	4
参考文献	5
第 2 章 单自由度体系振动问题	6
2.1 概述	6
2.2 自由振动	7
2.3 强迫振动	10
2.4 振动响应的迭代积分法	11
2.5 响应积分的 Newmark- β 法	14
2.6 响应积分的 Wilson- θ 法	18
2.7 基于能量的结构动力计算	21
2.8 地震作用下的响应分析	26
参考文献	27
第 3 章 反应谱分析计算方法	28
3.1 概述	28
3.2 单自由度结构	29
3.3 设计地震反应谱	37
3.4 单自由度体系响应	43
参考文献	49
第 4 章 时程分析计算方法	50
4.1 概述	50
4.2 地震地面运动	51
4.3 比例阻尼标准模态法	54

4.4	非比例阻尼	57
4.5	静力凝聚法	60
4.6	动力凝聚法	66
4.7	状态空间响应法	67
	参考文献	77
第5章	结构动力损伤与地震易损性	78
5.1	概述	78
5.2	国内外历次地震房屋损伤回顾	79
5.3	基于性能的设计方法与结构易损性研究的关系概述	80
5.4	结构易损性方法概述	82
	参考文献	84
第6章	地震风险性分析	88
6.1	地震风险性分析模型	88
6.1.1	震源模型及震源分区	88
6.1.2	地震能量释放模型	89
6.1.3	地表运动衰减模型	90
6.1.4	按地震烈度和场地条件确定的地震动模型参数	91
6.1.5	地震发生预测模型	93
6.1.6	地震风险性分析流程	95
6.2	概率反应谱的建立	97
6.2.1	分析方法	97
6.2.2	动力放大因子	98
6.3	反应谱拟合人工地震波	98
6.3.1	分析步骤	99
6.3.2	人工地震波时程模拟	99
6.3.3	地震时程的修正	103
	参考文献	105
第7章	钢筋混凝土结构易损性分析	108
7.1	结构的损伤参数	108
7.1.1	结构局部损伤参数	108
7.1.2	结构整体损伤参数	117
7.2	我国建筑规范与 HAZUS 系统的比较	118
7.3	静力弹塑性推覆法简介	123
7.3.1	Push-over 分析方法的步骤	123
7.3.2	Push-over 分析方法的基本假定	124

7.3.3 侧向力的分布方式	125
7.3.4 自适应 Push-over 分析	126
7.4 动力分析方法简介	126
7.4.1 动力时程分析	126
7.4.2 增量动力分析	128
7.5 钢筋混凝土框架结构地震易损性分析	129
7.5.1 框架结构在地震中的反应及损伤定义	129
7.5.2 框架结构的建模及有限元	133
7.5.3 IDA 分析框架结构易损性部位及隔震加固易损性分析	136
参考文献	161
第 8 章 隔减震消能措施下结构动力易损性分析	166
8.1 目前常见的结构消能减震措施简介	166
8.2 框架结构基础隔震加固地震易损性分析	167
8.3 钢筋混凝土框架-剪力墙结构易损性分析	176
8.3.1 框剪结构的建模及有限元	176
8.3.2 框剪结构在地震中的反应及损伤定义	178
8.3.3 框剪结构易损伤部位及基础隔震加固易损性分析	180
8.4 工业厂房基础隔震加固地震易损性分析	187
8.4.1 厂房结构的建模及有限元	188
8.4.2 厂房结构在地震中的反应及损伤定义	190
8.4.3 厂房结构易损伤部位及隔震加固易损性分析	191
8.5 软钢斜撑结构地震易损性分析	193
8.5.1 加固后的旧框架结构在地震中的反应及损伤定义	196
8.5.2 斜撑消能加固结构易损伤部位及隔震加固易损性分析	197
8.6 层间隔震结构地震易损性分析	201
8.6.1 层间隔震结构的建模及有限元	201
8.6.2 层间隔震结构在地震中的反应及损伤定义	205
参考文献	208
第 9 章 地震灾害保险及隔震加固经济性分析	209
9.1 国内外地震灾害保险概况	209
9.1.1 国外地震灾害保险概况	209
9.1.2 我国地震灾害保险概况	212
9.2 基于易损性分析的房屋地震损失评估	213
9.3 地震保险费率确定	215
9.3.1 目前常用的保险费率确定基本原则	215

9.3.2 基于易损性模型的保险计价模型	216
9.4 我国地震保险制度建设及建议	218
参考文献	219
第 10 章 结构动力损伤研究展望	220
10.1 结论	220
10.2 问题及展望	222

第 1 章 结构动力学概述

结构动力学是 21 世纪结构工程研究的主题,在整个 20 世纪,结构动力学的发展将土木工程结构专业推动到一个崭新的高度,即可以基于力学方程对房屋和其他结构在一定合理置信度下的实际结构性能进行分析评估。在 20 世纪的前期,工程研究人员使用力学和数学理论建立了理想化的结构动力学结构模型,但真正的突破在 20 世纪 60 年代,随着数学矩阵法和结构模型数字化分析的发展,结构动力学进入成熟和精确化时代,这一切都为随后借助高速计算机进行计算的现代结构分析有限元方法奠定了基础。

在 20 世纪 70 年代施加于结构上的动力问题就得到了研究者们的关注。例如,对强地震运动的特征和房屋反应的关注就始于 1971 年的美国加州的圣费尔南多大地震(Ms6.6)。在这次地震中人类第一次准确地测量和获取到大量的来自于地面和房屋内的地震加速度时程记录。在 20 世纪后半期,更多的来自于地面和房屋中的地震时程记录被准确记录。因此,在进入 21 世纪后,研究者已经有了一个很好的基础和不断创新发展的结构动力分析方法。目前人类对于诸如风、波浪和其他施加于结构上的荷载有了比 20 世纪更加完整和成熟的理解。

21 世纪结构动力学的发展将更加精彩,新的材料和新的结构单元将得到更广泛的使用。例如,用于结构和地基之间的基础隔震器的使用将显著地降低地震时作用在结构上的力;设置于房屋与桥梁的黏滞阻尼器单元,也同样可以减小风或地震输入结构的能量,这些优异的被动消能元件是整个结构通过计算机控制施加给结构人造力,以抵消外加荷载的主动抗震减震单元的有效补充,这实际上是目前工程前沿领域的结构被动智能控制。

现代的结构动力学计算需要非常精确的数字有限元模型,使结构工程师可以准确地估计实际结构的反应。本书将经典的结构动力学理论予以详细的叙述,并结合实例将结构动力工程中的问题予以陈述。

1.1 结构动力学研究对象与研究目的

在动力作用下,结构产生振动,即结构在静平衡位置附近做往返运动。振动的产生,有的是由结构本身固有的原因引起的,如转动机器转子的偏心引起的振动;有的是由外界干扰引起的,如地震作用、风荷载作用、爆破荷载作用、车辆行驶中由于路面不平顺引起的车辆振动及车辆引起的路面的振动等。因此,结构动力学的

研究对象正是工程结构的各种振动问题。而结构动力学的研究目的就是要认识和了解工程结构的振动规律,并据此指导工程结构的设计实践及其他有关问题,有效地减轻并避免有害振动对工程结构造成的损伤,从而为人类社会带来更多福利。

1.1.1 动荷载的定义

作用在结构上的荷载由三个因素组成,即力的大小、方向和作用点。如果这些因素不随时间变化或随时间缓慢变化,则在求解结构的响应时,可以把荷载作为静荷载处理以简化计算,这是结构静力学的范畴;如果荷载的大小、方向和作用点随时间变化,使得质量运动加速度所引起的惯性力相比荷载无法忽略不计,则把这种荷载称为动荷载。

作用在结构上的荷载,定义其静或动和加载慢与快是相对的,它与结构自振周期有密切关系。若荷载从零增加到最大值的时间远大于结构的自振周期,则加载过程可以使用静力平衡方程来计算;如果运动过程中的加载时间接近结构的自振周期以致惯性力大到不能被忽略,则这时作用在结构上的荷载应作为动荷载来处理。

作用在结构基础的地震和作用于高层结构或大型桥梁的强风,其引起的地面运动通过基础传给上部结构或作用于结构外立面或桥面,使整体结构产生显著的惯性力,因此地震或强风是工程上常见的典型动荷载。

1.1.2 动荷载的分类

动荷载是时间的函数。根据动荷载随时间变化的规律,可以将其分为确定性动荷载与非确定性动荷载两大类。

1) 确定性动荷载

如果荷载的变化是时间的确定性函数,则称此类荷载为确定性动荷载。常见确定性动荷载的类型如下:

(1) 简谐周期动荷载。荷载随时间做周期性变化,是周期荷载中最简单、最为重要的一种荷载,见图 1.1(a),可用 $F(t) = A\sin(\theta t)$ 或 $F(t) = A\cos(\theta t)$ 来表示它的变化规律。

(2) 非简谐周期动荷载。荷载随时间作周期性变化,是时间 t 的函数,但不是简单地用三角函数来表示。例如,平稳情况下波浪对堤坝的动水压力、轮船螺旋桨产生的推力都是非简谐周期动荷载,见图 1.1(b)。

(3) 冲击动荷载。荷载的幅值在很短的时间内急剧增大或急剧减小,如爆破引起的冲击波,见图 1.1(c)。

对于图 1.1(d)、图 1.1(e)中已经记录到或发生过的地震波和脉动风引起的作用于建筑结构的地震作用或风荷载,由于其幅值大小、方向及持续时间是已知的,

故而用于结构动力响应分析时,它属于确定性荷载。

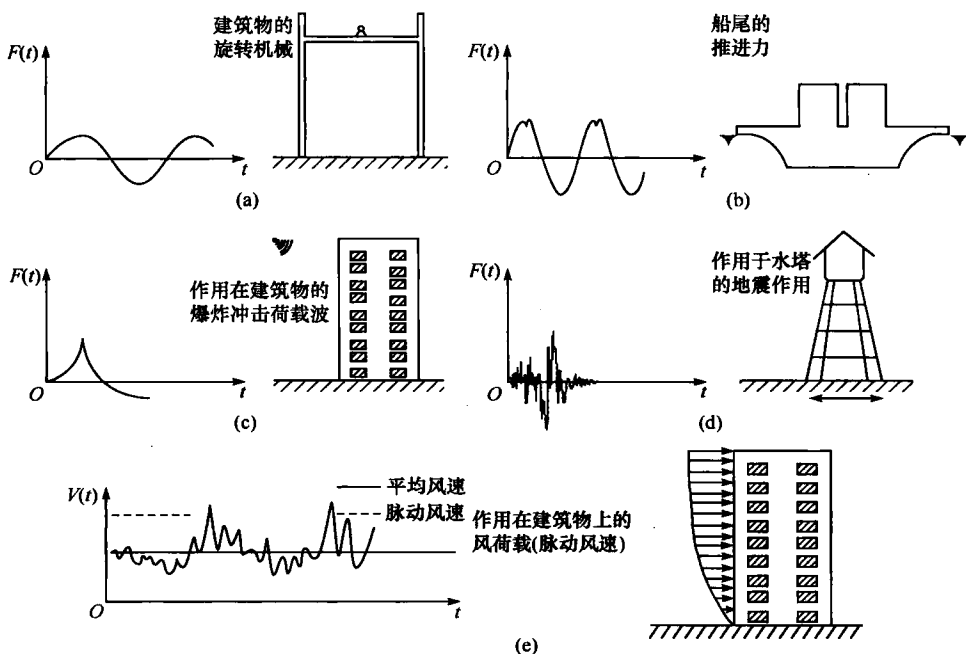


图 1.1 确定性荷载的特点和来源

2) 非确定性动荷载

如果荷载随时间的变化不能用确定的时间函数来描述,则此类荷载为非确定性动荷载。随机荷载是一种非确定性动荷载,在任一时刻荷载的大小是随机变量。例如,结构未来遭遇的地震作用、风荷载是未知的,在未来任意一段时间内的值是无法事先确定的,它属于随机荷载。结构在随机荷载作用下的响应称为结构的随机振动分析。

对于地震作用和风荷载而言,一个确定的记录相当于随机事件的一个样本,每一个具体的样本都具有确定性,但大量样本的集合可以反映出事件的随机规律。由此可知,虽然非确定性动荷载不能事先用时间 t 的确定性函数来描述,但它服从统计规律。

1.2 结构动力学的任务和研究内容

结构动力学的基本任务在于分析结构振动的固有力学特性,分析在动力荷载下的结构位移和内力等,使设计时能满足结构刚度和强度的要求,或采取隔震或减

震的措施,为改善工程结构体系在动力环境中的安全性和可靠性提供理论基础。在进一步的研究中,还要满足动力稳定性的要求,因此在振动情况下的强度、刚度和稳定性是结构动力学研究的基本内容。

1.2.1 结构动力学问题的基本特点

结构动力学与结构静力学相比,有以下几方面的不同:

(1) 数学处理更加复杂。结构动力分析要考虑结构因振动而产生的惯性力和阻尼力,其运动微分方程包含惯性力和阻尼力的平衡方程,其中惯性力是按照位移对时间的二阶导数关系来确定的,阻尼力是假定为位移对时间的一阶导数来处理的;而在结构静力分析中,并不考虑结构这两种力对结构的影响。

(2) 由于荷载和响应是随时间而变化的,故相对于结构的静力平衡方程,结构的动力平衡方程求解要复杂得多。

(3) 结构的动力响应除了随荷载时间变化而变化外,还与结构的质量和刚度分布、能量耗散形式等有关,这也是结构动力学中非常重要的一点。

需要注意的是,根据达朗贝尔原理,结构动力平衡方程中包含了结构所受的惯性力以达到一种动态的平衡,同时由于方程中的荷载和内力都是基于时间的导数关系,方程中的平衡实际上是一种瞬时态的平衡。

1.2.2 结构动力学的研究任务

结构动力学的研究任务可归纳为以下四个方面:

(1) 提供对结构进行动力响应分析的方法。

(2) 确定结构的固有动力特性,并建立结构的固有动力特性、动荷载和结构的动力响应三者之间的相互关系。

(3) 计算结构的动力响应,以确定结构受到的动荷载或振动的能量水平,从而提供对结构进行动力可靠性设计的依据。

(4) 为结构抗震的隔震、消能减震设计提供理论与计算依据。

1.2.3 结构动力学的研究内容

结构动力学的研究内容包括理论研究和试验研究两个方面。

1) 理论研究

在结构动力分析中,通常把所研究的结构称为振动体系,把外界对体系的作用或引起体系运动的力称为激励或输入,把结构在激励作用下产生的动态行为称为响应或输出。由此可知,结构动力学的理论研究内容为体系、激励和响应三者之间的关系。理论上讲,只要知道两者就可以知道第三者。因此,结构动力学所要解决的问题可归纳为三类:

(1) 结构响应的计算。已知体系结构的动力特性和输入,求体系的响应,包括位移、速度、加速度和内力的响应。这为确定结构的强度、刚度和允许振动能量水平提供了依据。

(2) 体系的设计。已知体系动荷载和所要满足的动态响应的要求,设计合理的体系参数。对结构而言,这个问题尤为重要。通常结构的设计要依据响应来进行分析,所以在实际工作中,这两个问题是交替进行的。

(3) 体系参数的识别。已知振动体系的动荷载和响应,求结构的动力特性参数和数学模型。体系参数识别包括物理参数识别(质量、刚度、阻尼等)和模态参数识别(固有频率、振型)。

这三者构成了振动体系的三要素。综合输入、体系和输出的全部信息,对体系进行环境预测和控制,即结构振动控制问题。结构振动控制可分为被动控制、主动控制和混合控制。

2) 试验研究

试验研究不仅为理论分析奠定了基础,而且是解决实际工程问题的主要手段。例如,材料性能和结构阻尼特性的测定、振动环境试验等工作,就是主要依靠试验研究。结构试验是检验数学模型的正确性,为理论计算提供确切数据的重要途径。重要结构的动力研究需要将数值计算和试验研究结合起来:一方面,利用数值计算为结构试验提供依据;另一方面,根据试验结果,不断修正模型,使数学模型能更好地反映实际情况。

参 考 文 献

- 彭俊生,罗永坤,彭地. 2007. 结构动力学、抗震计算与 SAP2000 应用[M]. 成都:西南交通大学出版社.
- 中华人民共和国住房和城乡建设部. 2010. 建筑抗震设计规范(GB50011—2010)[S]. 北京:中国建筑工业出版社.
- 周福霖. 1997. 工程结构减震控制[M]. 北京:地震出版社.
- Clough R W, Penzien J. 1981. 结构动力学[M]. 王光远等译. 北京:科学出版社.

第 2 章 单自由度体系振动问题

2.1 概 述

一般将单自由度体系的振动反应作为结构动力学最先介绍的内容通常都是基于以下几点重要的原因来考虑的:首先,结构的内在特性与外来地面运动激励之间的相互作用用单自由度模型能更好地得到表达;其次,包括我国建筑结构抗震规范在内的世界大部分国家的抗震规范,其中的结构运动方程都是基于单自由度系统的反应来列出的;当然,单自由度体系的振动分析也是多自由度体系振动分析的前提和基础。

典型的单自由度体系可以表达为不同的表示形式,常见的有如图 2.1 所示的三种形式。

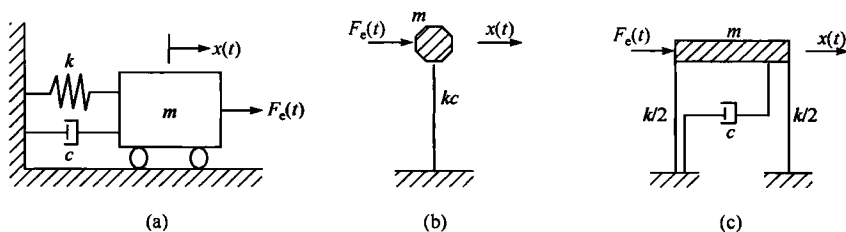


图 2.1 单自由度体系的三种表示形式

图 2.1(a)代表弹簧-质量单自由度体系,这种图形形式经常出现在力学教材振动章节中,用以表示单自由度体系;图 2.1(b)所示的单自由度体系采用一个在柱子顶端的集中质量体来表示,并且柱顶的转动和竖直变形可认为非常小,即假定为零;图 2.1(c)中,梁通常被假定为绝对刚体,柱顶端的转动变形和竖直变形也同样被假定为零。对于图 2.1(c),外力 $F_e(t)$ 可进一步分解为以下四种力:

(1) 刚体力 F_s 。对于弹性体系来讲,该力与柱顶端的相对水平位移成正比,与柱或梁的刚度成正比。当结构产生一个正方向的位移时,刚体力总是起着将结构中发生水平位移的部分拉回变形前位置的作用,因此该力总是与位移的方向相反,即 $F_s = -kx$ 。

(2) 阻尼力 F_d 。阻尼力是与结构相对地面的运动速度相关的物理量,对线性黏滞阻尼体系来说,阻尼力 F_d 直接与速度 $\dot{x}$ 成正比,阻尼系数 c 为常数。类似于弹性力,该力也是作用在与结构的速度相反的方向上,即 $F_d = -c\dot{x}$ 。

(3) 外力 F_e 。该力是诸如地震、风等外来能量作用于结构体上的力,一般为

随时间变化的变量。

(4) 内力 F_i 。内力即惯性力, $F_i = -m\ddot{x}$, 是与物体本身加速度有关的一个物理量, 作用方向与加速度方向相反。

根据牛顿第二定律, 以上各力之和为零, 得

$$\sum F = F_i + F_d + F_s + F_e = 0 \quad (2.1)$$

将以上四种力的表达式代入式(2.1), 得

$$-m\ddot{x} - c\dot{x} - kx + F_e = 0 \quad (2.2)$$

或

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_e \quad (2.3)$$

式(2.3)即代表结构的动力平衡方程, 或称为体系的运动平衡方程, 其解通常分为两部分: 通解 $x_h(t)$ 和特解 $x_p(t)$, 即式(2.3)可以分解为

$$m\ddot{x}_h(t) + c\dot{x}_h(t) + kx_h(t) = 0 \quad (2.4)$$

通解是体系在初始条件已知的情况下结构的自由振动方程, 见式(2.4), 而特解是体系在外力作用下的运动微分方程, 见式(2.5)。

$$m\ddot{x}_p(t) + c\dot{x}_p(t) + kx_p(t) = F_e \quad (2.5)$$

整个系统的反应 $x(t)$ 就是由通解 $x_h(t)$ 和特解 $x_p(t)$ 之和得到的, 即

$$\begin{aligned} x(t) &= x_h(t) + x_p(t) \\ m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) &= m(\ddot{x}_h + \ddot{x}_p) + c(\dot{x}_h + \dot{x}_p) + k(x_h + x_p) \\ &= (m\ddot{x}_h + c\dot{x}_h + kx_h) + (m\ddot{x}_p + c\dot{x}_p + kx_p) \\ &= 0 + F_e(t) \\ &= F_e(t) \end{aligned} \quad (2.6)$$

对于承受动荷载的任意线性结构体系, 其主要物理特性参数包括体系的质量、弹性特性(柔度或刚度)、能量耗散机理或阻尼、外部干扰或荷载。因此, 对于各种单自由度体系的振动状态, 都可以用质量、弹簧、阻尼器及动荷载来描述, 如图 2.1 所示, 由此建立的运动方程(2.3)也就是单自由度体系的运动方程。

2.2 自由振动

如果单自由度体系没有外在荷载作用, 当初始状态即结构的起始位移 x_0 或起始速度 $\dot{x}_0$ 不为零时, 体系的反应就是自由振动状态。因为外在力 F_e 为零, 故式(2.3)的特解是零, 即

$$m\ddot{x}_h + c\dot{x}_h + kx_h = 0, \quad x_h(0) = x_0, \dot{x}_h(0) = \dot{x}_0 \quad (2.7)$$

假定方程(2.7)的通解为 $x(t) = Ce^{st}$, 这里 C 和 s 是不随时间变化的常数, 由于方程为线性二阶微分方程, 故对 $x(t)$ 求导可得 $\dot{x}(t) = Cse^{st}$, $\ddot{x}(t) = Cs^2e^{st}$, 因此

式(2.7)变为

$$mCs^2e^{st} + cCse^{st} + kCe^{st} = 0 \quad (2.8)$$

考虑到系数 $Ce^{st} \neq 0$, 式(2.7)可进一步变为

$$ms^2 + cs + k = 0 \quad (2.9)$$

求解式(2.9)可得到

$$\begin{cases} s_1 = \frac{-c + \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} \\ s_2 = \frac{-c - \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} \end{cases} \quad (2.10)$$

因此自由振动方程的解为

$$x_h(t) = C_1 \exp\left(\frac{-c + \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}t\right) + C_2 \exp\left(\frac{-c - \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}t\right) \quad (2.11)$$

结构动力学中, 式(2.7)中的系数通常可以写为

$$\omega_n^2 = \frac{k}{m}, \quad 2\zeta\omega_n = \frac{c}{m} \quad (2.12)$$

式中, 变量 ω_n 是振动的非阻尼自然角频率; 变量 ζ 称为关键阻尼率, 它代表结构的阻尼水平。因此式(2.7)又可以写为

$$\ddot{x}_h(t) + 2\zeta\omega_n\dot{x}_h(t) + \omega_n^2x_h(t) = 0, \quad x(0) = x_0, \dot{x}(0) = \dot{x}_0 \quad (2.13)$$

如前, 取 $x(t) = Ce^{st}$, 此时式(2.13)就变为

$$s^2e^{st} + 2\zeta\omega_nse^{st} + \omega_n^2e^{st} = 0 \quad (2.14)$$

解式(2.14)得到

$$\begin{cases} s_1 = -\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \\ s_2 = -\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \end{cases} \quad (2.15)$$

因此自由振动方程的解为

$$x_h(t) = C_1 \exp[(-\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1})t] + C_2 \exp[(-\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1})t] \quad (2.16)$$

式(2.16)是在结构阻尼率 $\zeta > 1$ 情况下的自由振动解, 但对结构工程人员来说, 感兴趣的是阻尼率 ζ 在 2%~10% 的实际常见结构的求解值。当 $\zeta < 1$, $\sqrt{\zeta^2 - 1} = i\sqrt{1 - \zeta^2}$, 因此方程(2.16)就变为

$$x_h(t) = C_1 \exp[(-\zeta\omega_n + \omega_n i\sqrt{1 - \zeta^2})t] + C_2 \exp[(-\zeta\omega_n - \omega_n i\sqrt{1 - \zeta^2})t] \quad (2.17)$$

取 $\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$, ω_d 为有阻尼自然振动角频率, 式(2.17)进一步变为

$$\begin{aligned} x_h(t) &= C_1 e^{(-\zeta\omega_n + i\omega_d)t} + C_2 e^{(-\zeta\omega_n - i\omega_d)t} \\ &= C_1 e^{-\zeta\omega_n t} [\cos(\omega_d t) + i\sin(\omega_d t)] + C_2 e^{-\zeta\omega_n t} [\cos(\omega_d t) - i\sin(\omega_d t)] \\ &= (C_1 + C_2) e^{-\zeta\omega_n t} \cos(\omega_d t) + i(C_1 - C_2) e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t) \\ &= C'_1 e^{-\zeta\omega_n t} \cos(\omega_d t) + C'_2 e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t) \end{aligned} \quad (2.18)$$

此时,对式(2.18)求导得

$$\dot{x}_h(t) = (-\zeta\omega_n C_1' + \omega_d C_2')e^{-\zeta\omega_n t} \cos(\omega_d t) + (-\omega_d C_1' - \zeta\omega_n C_2')e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t) \quad (2.19)$$

式中,两个系数 C_1' 和 C_2' 可以通过方程的初始条件 $x(0)=x_0, \dot{x}(0)=\dot{x}_0$ 来确定

$$x_0 = C_1', \quad \dot{x}_0 = -\zeta\omega_n C_1' + \omega_d C_2' \quad (2.20)$$

进一步可求得系数 C_1' 和 C_2' 为

$$\begin{cases} C_1' = x_0 \\ C_2' = \frac{\zeta\omega_n x_0 + \dot{x}_0}{\omega_d} \end{cases} \quad (2.21)$$

最后,结合式(2.20)和式(2.21)可得解

$$x_h(t) = e^{-\zeta\omega_n t} \left[x_0 \cos(\omega_d t) + \frac{\zeta\omega_n x_0 + \dot{x}_0}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t) \right] \quad (2.22)$$

$$\dot{x}_h(t) = e^{-\zeta\omega_n t} \left[\dot{x}_0 \cos(\omega_d t) - \frac{\omega_n x_0 + \zeta \dot{x}_0}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\omega_d t) \right] \quad (2.23)$$

式(2.22)和式(2.23)的解值会随着时间 t 的变化在正值和负值间变化,同时,由于阻尼的存在,结构自由振动方程的振幅也随着时间的增加而不断减小。

结构自然振动角频率 ω_n 的单位为弧度/秒(rad/s),在工程上不经常使用,工程技术人员通常习惯使用结构频率 f_n ,单位为赫兹(Hz),即单位时间内的振动次数。角频率 ω_n 与频率 f_n 及自振周期 T 的关系为

$$\begin{cases} f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} \\ T_n = \frac{1}{f_n} = \frac{2\pi}{\omega_n} \end{cases} \quad (2.24)$$

结构无阻尼振动周期 T_n 是结构动力学中一个重要的指标值,结构有阻尼振动频率 f_d 和有阻尼自振周期 T_d 也可以被定义为

$$\begin{cases} f_d = \frac{\omega_d}{2\pi} = \frac{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}{2\pi} = f_n \sqrt{1-\zeta^2} \\ T_d = \frac{1}{f_d} = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{T_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} \end{cases} \quad (2.25)$$

由式(2.25)可知,随着阻尼率 ζ 的增加,结构有阻尼自振周期 T_d 也随之增加。

当系统有一个非零的起始状态时,由于阻尼的存在,振动的幅值会随着时间的而减小,假设 t_1 时刻计算得到的结构振动位移为 x_1 ,令 $t_2 = t_1 + T_d$, x_2 是 t_2 时刻对应的振动位移,则有

$$\cos(\omega_d t_2) = \cos[\omega_d(t_1 + nT_d)] = \cos(\omega_d t_1 + n\omega_d T_d) = \cos(t_1 \omega_d + 2\pi n) = \cos(\omega_d t_1)$$

$$\sin(\omega_d t_2) = \sin[\omega_d(t_1 + nT_d)] = \sin(\omega_d t_1 + n\omega_d T_d) = \sin(\omega_d t_1 + 2\pi n) = \sin(\omega_d t_1)$$

对比式(2.22)进一步可得

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{x_0 e^{-\zeta \omega_n t_1}}{x_0 e^{-\zeta \omega_n t_2}} = e^{\zeta \omega_n (t_2 - t_1)} = e^{\zeta \omega_n T_d} \quad (2.26)$$

对式(2.26)求对数,可进一步求得两个位移比值为

$$\delta_1 = \ln \frac{x_1}{x_2} = \zeta \omega_n T_d = \frac{2\pi \zeta \omega_n}{\omega_d} = \frac{2\pi \zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad (2.27)$$

2.3 强迫振动

既然单自由度体系的自由振动通解已经得到,接下来就可以进一步对体系外加强迫振动求特解,以得到式(2.3)的完全解。由特解可以知道是外力强迫振动,其必须满足

$$\ddot{x}_p(t) + 2\zeta \omega_n \dot{x}_p(t) + \omega_n^2 x_p(t) = \frac{F_e}{m} \quad (2.28)$$

任何一个满足式(2.28)的解都可能是特解,这就提出了一个问题,即系统在外加力作用下如何满足初始条件。如果特解的初始条件满足 $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = \dot{x}_0$,则式(2.22)、式(2.23)就代表真实的简谐解;而如果初始条件为 $x(0) \neq x_0$ 或 $\dot{x}(0) \neq \dot{x}_0$,则式(2.28)必须改变为

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = C_1' e^{-\zeta \omega_n t} \cos(\omega_d t) + C_2' e^{-\zeta \omega_n t} \sin(\omega_d t) + x_p(t) \quad (2.29)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) = \dot{x}_h(t) + \dot{x}_p(t) = & (-\zeta \omega_n C_1' + \omega_d C_2') e^{-\zeta \omega_n t} \cos(\omega_d t) \\ & + (-\omega_d C_1' - \zeta \omega_n C_2') e^{-\zeta \omega_n t} \sin(\omega_d t) + \dot{x}_p(t) \end{aligned} \quad (2.30)$$

考虑结构的初始条件,将 $x(0) = x_0$ 代入式(2.29),将 $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$ 代入式(2.30),得

$$\begin{cases} C_1' + x_p(0) = x_0 \\ -\zeta \omega_n C_1' + \omega_d C_2' + \dot{x}_p(0) = \dot{x}_0 \end{cases} \quad (2.31)$$

解式(2.31)可得到

$$\begin{cases} C_1' = x_0 - x_p(0) \\ C_2' = \frac{\zeta \omega_n x_0 - \zeta \omega_n x_p(0) + \dot{x}_0 - \dot{x}_p(0)}{\omega_d} \end{cases} \quad (2.32)$$

将上述结果代入式(2.29)和式(2.30),得

$$\begin{cases} x(t) = [x_0 - x_p(0)] e^{-\zeta \omega_n t} \cos(\omega_d t) + \frac{\zeta \omega_n [x_0 - x_p(0)] + [\dot{x}_0 - \dot{x}_p(0)]}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta \omega_n t} \sin(\omega_d t) + x_p(t) \\ \dot{x}(t) = [\dot{x}_0 - \dot{x}_p(0)] e^{-\zeta \omega_n t} \cos(\omega_d t) - \frac{\omega_n [x_0 - x_p(0)] + \zeta [\dot{x}_0 - \dot{x}_p(0)]}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta \omega_n t} \sin(\omega_d t) + \dot{x}_p(t) \end{cases} \quad (2.33)$$

式(2.33)即为单自由度体系强迫运动的解。这个方程仍然较复杂,同时因为包含通解和特解,可以通过式(2.34)进一步将特解从方程中分离出: