▲ 高 等 学 校 教 材

常微分方程

袁 荣

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

内容提要

本书详细介绍了常微分方程的基本解法和基本理论，其内容符合高等学校数学专业常微分方程课程大纲的要求，共由七章组成，包括基本概念，初等积分法，线性微分方程组，高阶线性微分方程，微分方程的基本定理，定性理论初步，一阶偏微分方程。书中提供了较多的例题，并在各章节之后按基础和提高要求配备了一定数量的习题。

本书可作为高等学校数学专业常微分方程课程的教材，也可供自学者学习参考。

图书在版编目(CIP)数据

常微分方程/袁荣编.—北京：高等教育出版社，2012.4

ISBN 978-7-04-034269-7

Ⅰ.①常…　Ⅱ.①袁…　Ⅲ.①常微分方程-高等学校-教材　Ⅳ.①O175.1

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第026958号

策划编辑　田　玲　　责任编辑　田　玲　　封面设计　于文燕　　版式设计　于　婕
插图绘制　尹文军　　责任校对　窦丽娜　　责任印制　毛斯璐

出版发行　高等教育出版社
社　　址　北京市西城区德外大街4号
邮政编码　100120
印　　刷　北京北苑印刷有限责任公司
开　　本　787mm×960mm　1/16
印　　张　20
字　　数　360千字
购书热线　010-58581118
咨询电话　400-810-0598
网　　址　http://www.hep.edu.cn
　　　　　http://www.hep.com.cn
网上订购　http://www.landraco.com
　　　　　http://www.landraco.com.cn
版　　次　2012年4月第1版
印　　次　2012年4月第1次印刷
定　　价　31.30元

物 料 号　34269-00

前　言

微分方程与微积分同时产生并在许多学科中有非常重要的应用, 如物理、力学、机械、电信、化工、生物、经济等学科中有些重要的现象是用微分方程描述的，研究和解决这些实际问题，就需要求解和研究微分方程。微分方程在数学学科的发展中也具有非常重要的地位, 它是许多数学分支产生的动力。

常微分方程理论是数学学科的基本工具之一, 是数学专业的重要基础课, 安排在大学二年级开设。北京师范大学数学科学学院十分重视教材建设, 这本教材是我在北京师范大学数学科学学院多年教学的基础上完成的, 在此期间也曾用过多种教材, 参阅了许多参考书。编写本书时综合考虑了三方面学生的要求, 包括重点大学和师范院校的数学专业学生, 及自学的学生。因而在书中仔细地选配了习题并分成基础部分和提高部分, 在某些地方进行了更多的描述, 提供了较多的例题, 便于学生的自学理解。有些加 * 的内容和习题供教师、学生选择, 以满足不同的需求, 部分或全部跳过这些内容不会影响对本书主体的学习。根据多年的教学经验, 54 学时可以学完前五章的内容, 72 学时可以学完全书的内容, 大体可按 4, 14, 12, 12, 12, 12, 6 的顺序来分配各章讲授学时。由于学时和篇幅的限制，对微分方程的应用方面只能偶有涉及，更多的内容建议参阅其他书籍。

感谢北京大学数学科学学院的丁同仁教授, 他的见解深深地影响了我。感谢北京师范大学教务处及数学科学学院领导的鼓励和帮助, 感谢我的同行和同事们, 与他们的讨论开阔了我的思路, 他们多年从事这门课程的教学工作, 为本书的编写提供了丰富的经验。感谢钱定边教授、赵丽琴教授、黎雄教授、刘志华教授、李怀兴博士、张子恒博士、余志先博士、由红连博士、储继迅博士、姚林红博士, 他们阅读了初稿并提出了许多有益的建议。本书在送审出版过程中, 承蒙审查专家提出了许多修改意见以及高等教育出版社李蕊编辑的许多帮助, 作者表示衷心的感谢。最后, 也要感谢我的学生, 是他们让我去仔细思考常微分方程课程内容的各个环节。

由于水平有限，这本书一定还有许多需要完善的地方，恳切地希望能得到各方面的批评和指教。

袁荣
2010 年 12 月于北京师范大学数学科学学院
Email:ryuan@bnu.edu.cn

目　　录

第一章 基本概念

求解方程与研究方程解的性质是数学中的重要基本问题, 与数学中的许多分支密切相连, 在物理、力学、生物、经济等学科中有重要的应用, 推动了数学科学的发展. 本章介绍常微分方程及其解的定义、初值条件和初值问题、积分曲线和线素场, 为进一步学习作准备.

§1.1 定义和例子

在用数学方法研究一些问题时, 通常先建立一些关系, 然后从中求出或了解未知. **方程**就是指含有未知量的等式. 读者已学过的方程类型有一元一次方程、一元二次方程、二元一次方程、三角方程、函数方程等. 在学习方程时通常采取的方法是: 先确定方程的类型, 再进行求解或研究解的性质. 这样的方法在学习和研究微分方程时也是适用的.

1.1.1 方程和解

所谓微分方程, 就是联系着自变量、未知函数及其导数在内的方程.

定义 1.1 *称形如*

$$F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0 \tag{1.1}$$

*的等式为**常微分方程**, 或简称**方程**, 其中 x 是自变量, y 是未知函数, $y', \cdots, y^{(n)}$ 是 y 对 x 的导数. n 称为方程的**阶**.*

注 1 方程 (1.1) 中自变量是一元的, 且 y 及其导数均在 x 点取值. 若未知函数是多元的, 则微分方程中将出现偏导数, 这种微分方程称作**偏微分方程**.

例如,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{1}{x}y = x^3, \quad x \neq 0, \tag{1.2}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+a^2\sin\theta=0 \tag{1.3}$$

是常微分方程, 而

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \tag{1.4}$$

是偏微分方程.

在方程 (1.2) 中, x 是自变量, y 是未知函数, 导数出现的最高阶数是 1, 称作**一阶常微分方程**. 在方程 (1.3) 中, t 是自变量, θ 是未知函数, 导数出现的最高阶数是 2, 称作**二阶常微分方程**. 一般地, 方程 (1.1) 称作 n **阶常微分方程**.

在方程 (1.4) 中, x,y 是自变量, u 是未知函数, 导数出现的最高阶数是 2, 因而称作**二阶偏微分方程**.

在方程 (1.1) 中, 如果左端函数 F 关于 $y,y',\cdots,y^{(n)}$ 全体而言是一次的, 则称之为**线性常微分方程**. 否则称之为**非线性常微分方程**. 例如, (1.2) 是线性常微分方程, 而 (1.3) 是非线性常微分方程.

假设 J 是一个区间, 它可以是开区间、闭区间、半开区间、半实轴或整个实轴.

定义 1.2 *设函数 $y=\phi(x)$ 在区间 J 上连续, 有直到 n 阶的导数, 且满足*

$$F(x,\phi(x),\phi'(x),\cdots,\phi^{(n)}(x))=0,\quad x\in J,$$

*则称 $y=\phi(x)$ 是方程 (1.1) 在区间 J 上的一个***解**, *J 称作该解的***存在区间**. *如果关系式 $\Phi(x,y)=0$ 决定的隐函数 $y=\phi(x)$ 是方程 (1.1) 的解, 则称 $\Phi(x,y)=0$ 为 (1.1) 的***隐式解**. *隐式解也称作***解**.

例 1.1 *自由落体运动只考虑重力作用而忽略空气阻力等其他外力的影响. 假设重力加速度为常数 g, 试寻求自由落体的运动规律.*

解 设物体 B 作垂直于地面的运动, 因此建立坐标系如图 1–1: 取一垂直于地面的直线, 并将它与地面的交点作为原点, 向上的方向为正方向. 设落体 B 在时刻 t 的位置为 $y=y(t)$. 下面寻求 $y(t)$ 的表达式.

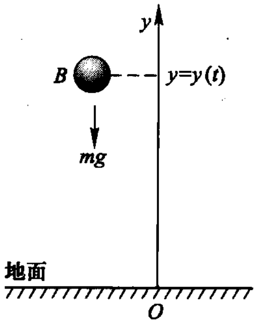

图 1–1

由物理学知, $y'=y'(t)$ 表示 B 的瞬时速度, $y''=y''(t)$ 表示 B 的瞬时加速度. 设物体 B 的质量为 m, 由牛顿第二定律知

$$my''=-mg,$$

上式右端出现负号是由于 B 所受的重力与 y 轴的正方向相反. 由此得到微分方程

$$y''=-g. \tag{1.5}$$

求 $y(t)$ 的表达式即是求解方程 (1.5).

对微分方程 (1.5) 的两侧关于 t 积分就有

$$y'=-gt+C_1, \tag{1.6}$$

其中 C_1 是任意常数. 对 (1.6) 再次进行积分, 得

$$y=-\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2, \tag{1.7}$$

其中 C_2 是任意常数.

力学、电学、天体力学中的许多运动规律都可以用微分方程来描述, 如力学中的 Newton(牛顿, 1642— 1727, 英国数学家、物理学家、天文学家) 定律、电学中的 Kirchhoff(基尔霍夫, 1824— 1887, 德国物理学家) 定律、天体力学中的 N 体问题等. 此外, 在诸如地球轨道的计算、海王星的发现、弹道轨道的定位、自动控制的设计、气象数值预报等方面, 微分方程都提供了重要的技术支持. 推动微分方程研究和发展的例子很多, 建议读者阅读相关参考书 [2, 7, 14, 15, 21, 34].

1.1.2 通解

从例 1.1 的求解中可以看出, 方程 (1.5) 的解 (1.7) 含有两个任意常数. 对一般的 n 阶微分方程, 有如下定义.

定义 1.3 如果 n 阶微分方程 (1.1) 的解 $y=\phi(x,C_1,\cdots,C_n)$ 包含 n 个独立的任意常数 $C_1,\cdots,C_n$, 则称它为**通解**. 如果方程 (1.1) 的解不包含任意常数, 则称它为**特解**. 如果由关系式 $\Phi(x,y,C_1,\cdots,C_n)=0$ 决定的隐函数 $y=\phi(x,C_1,\cdots,C_n)$ 是通解, 则称 $\Phi(x,y,C_1,\cdots,C_n)=0$ 为方程 (1.1) 的**通积分**. 通积分也称为**通解**.

注 2 $y=\phi(x,C_1,\cdots,C_n)$ 含有 n **个独立的常数** $C_1,\cdots,C_n$ 是指 Jacobi(雅可比, 1804— 1851, 德国数学家) 行列式

$$\frac{D[\phi,\phi',\cdots,\phi^{(n-1)}]}{D[C_1,C_2,\cdots,C_n]}:=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial\phi}{\partial C_1} & \dfrac{\partial\phi}{\partial C_2} & \cdots & \dfrac{\partial\phi}{\partial C_n}\\ \dfrac{\partial\phi'}{\partial C_1} & \dfrac{\partial\phi'}{\partial C_2} & \cdots & \dfrac{\partial\phi'}{\partial C_n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial\phi^{(n-1)}}{\partial C_1} & \dfrac{\partial\phi^{(n-1)}}{\partial C_2} & \cdots & \dfrac{\partial\phi^{(n-1)}}{\partial C_n}\end{vmatrix}\neq 0,$$

其中 $\phi^{(k)}$ 表示 ϕ 对 x 的 k 阶导数.

例如, 自由落体运动

$$y''=-g$$

的解为

$$y=-\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2,$$

其中 C_1,C_2 为任意常数. 由 $y'=-gt+C_1$, 得

$$\frac{D[y,y']}{D[C_1,C_2]}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial y}{\partial C_1} & \dfrac{\partial y}{\partial C_2}\\ \dfrac{\partial y'}{\partial C_1} & \dfrac{\partial y'}{\partial C_2}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}t & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-1\neq 0.$$

所以, $y=-\dfrac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2$ 是通解.

1.1.3 初值问题

(1.7) 是自由落体的一般运动规律, 其中的两个任意常数说明微分方程 (1.5) 有无穷多个解, 因此具体的运动规律尚未确定下来. 对这种求解结果的不确定性, 该如何解释呢？检查我们最初的提法发现: 我们没有指明下落物体在初始时刻 t_0 的位置, 也没有给出它在初始时刻的速度. 大家知道, 在同一时刻出发, 从不同的高度或以不同的初始速度自由下落的物体, 将表现出不同的运动情况. 因此, 为了确定相应的运动, 我们需要考虑物体 B 在初始时刻 (不妨设 $t_0=0$) 的位置和速度. 设 $t=0$ 时 (初始时刻), B 的高度和速度分别为 y_0 和 v_0, 即设

$$y(0)=y_0,\quad y'(0)=v_0. \tag{1.8}$$

(1.8) 称为**初值条件**或**初始条件**.

将 (1.8) 代入 (1.6) 和 (1.7), 可以得到 $C_1 = v_0$, $C_2 = y_0$. 这样, 在初值条件 (1.8) 下, 微分方程 (1.5) 有唯一确定的解

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + y_0. \tag{1.9}$$

(1.9) 描述了从高度为 y_0 的位置、下落初始速度为 v_0 的自由落体运动规律.

由此可知, 从通解中确定特解需要初值条件. 对 n 阶微分方程 (1.1), 通解中有 n 个独立的任意常数, 因而**初值条件**的提法是

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0', \cdots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \tag{1.10}$$

其中 $x_0, y_0, y_0', \cdots, y_0^{(n-1)}$ 是预先取定的数值. 求微分方程满足初值条件的解的问题称为**初值问题**. 方程 (1.1) 的**初值问题**为

$$\begin{cases} F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0, \\ y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0', \cdots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \end{cases} \tag{1.11}$$

即将方程与初值条件放在一起. 初值问题又名 Cauchy 问题 (柯西, 1789—1857, 法国数学家).

1.1.4 曲线族

一阶微分方程的通解含有一个任意常数 (参变量). 当赋予该参数不同的值时, 就得到了一个单参变量曲线族.

可以料想, 任一单参量曲线族也是某个一阶微分方程的通解所对应的一族曲线.

例如, 由曲线族方程

$$f(x, y, C) = 0 \tag{1.12}$$

两端对 x 求微分, 得

$$g\Big(x, y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, C\Big) = 0. \tag{1.13}$$

由 (1.12) 和 (1.13) 消去 C, 得

$$F\Big(x, y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big) = 0,$$

即为所求的微分方程.

例 1.2 求曲线族 $x^2 + y^2 = 2Cx$ 所满足的微分方程.

解 两边对 x 微分, 得 $2x+2y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2C$. 由

$$\begin{cases} x^2+y^2=2Cx, \\ 2x+2y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2C \end{cases}$$

消去 C, 得曲线族所满足的微分方程为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y^2-x^2}{2xy}$.

例 1.3 求双参数函数族

$$y=C_1\mathrm{e}^x\cos\ x+C_2\mathrm{e}^x\sin\ x \tag{1.14}$$

所满足的微分方程.

解 将 y 对 x 求导两次, 得

$$\begin{aligned} y'&=C_1\mathrm{e}^x(\cos\ x-\sin\ x)+C_2\mathrm{e}^x(\sin\ x+\cos\ x), \\ y''&=C_1\mathrm{e}^x(-2\sin\ x)+C_2\mathrm{e}^x(2\cos\ x). \end{aligned} \tag{1.15}$$

将 (1.15) 中的第一个式子与 (1.14) 联合即得

$$\begin{cases} y=C_1\mathrm{e}^x\cos\ x+C_2\mathrm{e}^x\sin\ x, \\ y'=C_1\mathrm{e}^x(\cos\ x-\sin\ x)+C_2\mathrm{e}^x(\sin\ x+\cos\ x). \end{cases} \tag{1.16}$$

如果将 (1.16) 中的 C_1,C_2 看成未知量, 则 (1.16) 是一个二元一次线性代数方程组, 其系数行列式为

$$\begin{vmatrix} \mathrm{e}^x\cos\ x & \mathrm{e}^x\sin\ x \\ \mathrm{e}^x(\cos\ x-\sin\ x) & \mathrm{e}^x(\sin\ x+\cos\ x) \end{vmatrix}=\frac{D[y,y']}{D[C_1,C_2]}=\mathrm{e}^{2x}\neq 0.$$

所以, 由 (1.16) 可以将 C_1,C_2 解出, 得

$$\begin{cases} C_1=\mathrm{e}^{-x}[y(\sin\ x+\cos\ x)-y'\sin\ x], \\ C_2=\mathrm{e}^{-x}[y(\sin\ x-\cos\ x)+y'\cos\ x]. \end{cases}$$

再将此表达式代入 (1.15) 中的第二个式子, 便得到微分方程

$$y''-2y'+2y=0.$$

这就是函数族所满足的微分方程.

习题 1.1

1. 指出下列方程的阶、自变量及因变量, 并说明这些方程是线性的还是非线性的:

(1) $xy' + y = \cos\ x$;

(2) $\left(\dfrac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}y^2}\right)^3 + y\left(\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}y}\right)^8 = 1$;

(3) $x^2\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} - 5x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 3xy = \mathrm{e}^x$;

(4) $\sin\left(y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = y$.

2. 试指出微分方程

$$y'' - 2y' + 3y = 0$$

的阶, 并说明下列函数中哪些是特解, 哪些是通解, 并用定义来严格证明:

(1) $y = 500\mathrm{e}^x \cos\ \sqrt{2}\,x$;

(2) $y = C\mathrm{e}^x \sin\sqrt{2}\,x$, C 为任意常数;

(3) $y = C_1\mathrm{e}^x \cos\ \sqrt{2}\,x + C_2\mathrm{e}^x \sin\ \sqrt{2}\,x$, C_1, C_2 是任意常数.

3. 验证下列函数是否是右端相应微分方程的解或通解, 并确定解的存在区间:

(1) $y = \dfrac{\sin\ x}{x}$, $\qquad xy' + y = \cos\ x$;

(2) $y = \ln x$, $\qquad xy'' + y' = 0$;

(3) $y = \mathrm{e}^{mx}$, $\qquad y''' - 2y'' - 4y' + 8y = 0$;

(4) $y = \begin{cases} -\dfrac{1}{4}(x - C_1)^2, & -\infty < x < C_1, \\ 0, & C_1 \leqslant x \leqslant C_2, \\ \dfrac{1}{4}(x - C_2)^2, & C_2 < x < +\infty, \end{cases} \qquad y' = \sqrt{|y|}$.

4. 求下列曲线族所满足的微分方程:

(1) $y = Cx + x^2$;

(2) $y = C_1\mathrm{e}^x + C_2 x\mathrm{e}^x$.

§1.2 几何解释

考虑一阶微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y), \tag{1.17}$$

其中 $f(x,y)$ 是平面区域 G 内的连续函数, 记为 $f \in C(G, \mathbb{R})$. 假设

$$y = \phi(x), \quad x \in J \tag{1.18}$$

是方程 (1.17) 的解, 其中 J 是解的存在区间, 则 $y=\phi(x)$ 在 (x,y) 平面上的图形

$$\Gamma := \{(x,y) \mid y=\phi(x),\ x\in J\}$$

就是一条光滑的曲线, 称它为方程 (1.17) 的一条**解曲线**或**积分曲线**.

设 $P_0=(x_0,y_0)$ 是 Γ 上的任意一点, 则有 $y_0=\phi(x_0)$, 且 Γ 在 P_0 点的切线斜率为

$$\phi'(x_0)=f(x_0,\phi(x_0))=f(x_0,y_0).$$

由此说明: 从方程 (1.17) 可以直接算出积分曲线上各点的切线斜率, 而并不需要知道积分曲线 Γ 的具体表达.

在区域 G 内每一点 $P=(x,y)$ 作一个以 $f(P)$ 为斜率的 (短小) 线段 $l(P)$. 称 $l(P)$ 为微分方程 (1.17) 在 P 点的**线素**. 它表明积分曲线在该点的切线方向. 称区域 G 连同上述全体线素为微分方程 (1.17) 的**线素场**或**方向场**, 如图 1–2.

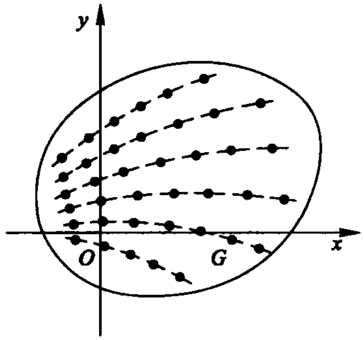

图 1–2

由上可知, 方程 (1.17) 的任何积分曲线 Γ 与它的线素场是吻合的. 因此我们有如下定理.

定理 1.1 *曲线 Λ 为方程 (1.17) 的积分曲线的充要条件是: 对于 Λ 上任一点, Λ 在该点的切线与方程 (1.17) 所确定的线素场在该点的线素重合, 即 Λ 在每点均与线素场的线素相切.*

证明 必要性已在定理的前面给出. 下证充分性. 设在区域 G 内有一条曲线

$$\Lambda: y=\psi(x),\quad x\in I,$$

它与方程 (1.17) 的线素场吻合. 在 Λ 上任取一点 $P=(x,y)$, 即 $y=\psi(x)$, 则 Λ 在 P 点的切线斜率为 $\psi'(x)$, 而线素 $l(P)$ 的斜率为 $f(P)=f(x,y)$. 因为曲线 Λ 与线素场是吻合的, 所以

$$\psi'(x)=f(x,\psi(x)),\quad x\in I.$$

这个等式说明 $y=\psi(x)$ 是方程 (1.17) 的解, 从而 Λ 是积分曲线. 证毕.

一般来说, 很难用上述定理画出精确的积分曲线. 但是只要这些线素取得足够细密, 我们就能看出线素场的走向, 并由此描绘出近似的积分曲线.

在构造方程 (1.17) 的线素场时, 常利用由关系式 $f(x,y)=k$ 确定的曲线 L_k, 称它为**等斜线**. 在等斜线 L_k 上各点的线素的斜率都等于 k. 因此, 等斜线简化了线素场逐点构造的方法, 有助于积分曲线的近似作图.

例 1.4 作出微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{x}{y} \tag{1.19}$$

的线素场和积分曲线.

解 右端函数的定义域是 $y\neq 0$. 等斜线是 $L_k: -\dfrac{x}{y}=k$, 即 $L_k: y=-\dfrac{1}{k}x$, 它是一条直线. 这说明 L_k 上每一点的线素的斜率是 k, 即当积分曲线与 L_k 相交时, 它在交点处的切线斜率是 k. 又易知直线 L_k 的斜率是 $-\dfrac{1}{k}$. 这说明当积分曲线与 L_k 相交时, 它在交点处与直线 L_k 垂直.

另一方面, 以原点 O 为中心的同心圆

$$x^2+y^2=C^2(C\text{ 为任意常数}) \tag{1.20}$$

与直线 L_k 相交时, 它在交点处是与直线 L_k 垂直的 (如图 1–3). 所以, (1.20) 是方程 (1.19) 的积分曲线.

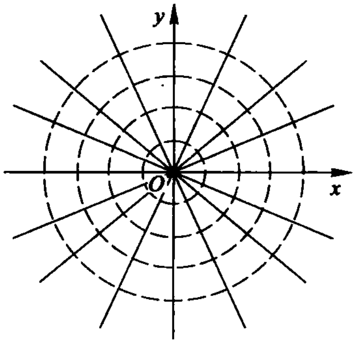

图 1–3

注 1 在上例中, 将 (1.20) 作为积分曲线, 当然要求 $y\neq 0$, 即此积分曲线是同心圆, 但要去掉与 x 轴的交点.