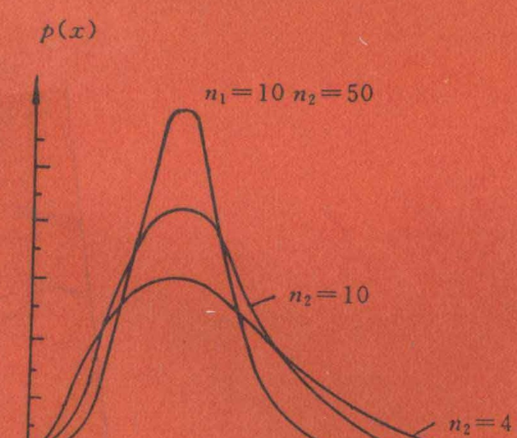
高等学校系列教材

经济应用数学

# 概率论与数理统计

主编 张文双 魏国强




海洋出版社

高等学校系列教材

# 经济应用数学

## ·概率论与数理统计·

主　编　张文双　魏国强
副主编　崔秋珍　宋礼民

海洋出版社

1998年·北京

**图书在版编目(CIP)数据**

经济应用数学:概率论与数理统计/张文双,魏国强主编.—北京:海洋出版社,1998.2

高等学校教材

ISBN 7-5027-4492-4

Ⅰ.经… Ⅱ.①张… ②魏… Ⅲ.①经济数学-高等学校-教材②概率论-高等学校-教材③数理统计-高等学校-教材 Ⅳ.F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 04418 号

## 内 容 简 介

本书内容包括随机事件与概率、随机变量及其分布、随机变量的数字特征、数理统计基本知识、参数估计、假设检验、方差分析、回归分析和正交试验法。配有习题，书末附习题答案。

本书结构严谨，叙述清楚，可作为高等专科学校经济、管理和财贸等专业“概率论与数理统计”课程教材，也可作为财经管理人员的自学用书。


海洋出版社 出版发行

（100081 北京市海淀区大慧寺路 8 号）

北京兰空印刷厂印刷 新华书店发行所经销

1998 年 2 月第 1 版 1998 年 2 月北京第 1 次印刷

开本：850×1168 1/32 印张：8.8125

字数：220 千字 印数：1～3500 册

定价：11.60 元

# 前　言

《经济应用数学》是根据国家教委批准印发的《高等工程专科学校课程教学基本要求》编写的。

在编写中，力求贯彻“必需、够用”的原则，结合经济、教育体制改革的要求，尝试对教材进行改革。本书重视基本概念的讲述和基本技能的训练，重视培养学生运用数学知识解决实际问题的能力，而不拘泥于理论推导和繁杂的运算，在引例和应用诸方面尽可能多联系经济工作实际。

《经济应用数学》这套书分三册出版。一册为《微积分》介绍函数、极限与连续、导数与微分、不定积分、定积分、无穷级数、多元函数和常微分方程；另一册为《线性代数与线性规划》介绍行列式、矩阵、线性方程组和线性经济模型；本册《概率论与数理统计》介绍随机事件及概率、随机变量及其分布、随机变量的数字特征、数理统计基本知识、参数估计、假设检验、方差分析、回归分析和正交试验法。

本套书教学参考时数约为 200 学时：《微积分》100 学时；《线性代数与线性规划》50 学时；《概率论与数理统计》50 学时。章末配有习题，书末附有习题答案。

参加本书编写的有张文双、魏国强、崔秋珍、宋礼民、李龙星、张永珍。张文双、魏国强任主编，崔秋珍、宋礼民任副主编。编写分工如下：第 1、2、3 章：魏国强，第 4 章：张永珍，第 5 章：崔秋珍，第 6、8 章：宋礼民，第 7 章：李龙星，第 9 章：张文双。全书由张文双统稿。

本书是《华北高等职业教育》编辑部组编的“高等学校系列教

材”之一。

限于编者水平，加上时间比较仓促，书中难免有不妥之处，恳请专家读者批评指正。

编　者

1998 年 1 月

# 目　次

# 第一章　随机事件与概率

自然界和人类社会中存在两类现象，一类是确定性现象，它在一定条件下必然发生；另一类是随机现象，它在一定条件下可能发生也可能不发生，即不能精确预言哪种结果会发生. 例如：市场经济条件下存在商品交换是必然现象，而一定时期内某种商品滞销与畅销、某种证券价格的上涨与下跌则是随机现象. 随机现象在一次试验中呈现出偶然性，但在多次试验中则会表现出一定的统计规律性. 概率论和数理统计就是揭示和研究这种规律性的一门应用数学学科，它是在市场经济条件下从事经济、管理等专业人员所必备的基础知识.

本章主要讨论随机事件、概率的定义、性质和计算等基本问题.

## 1.1　随机事件

### 1.1.1　随机试验

观察一定条件下发生的现象通常称为试验，它包括做一个实验，也包括进行一次测量或进行一次抽样观察等等，因此试验是一个相当广泛的概念. 在概率论中讨论的随机试验是指具有如下特征的一类试验：

(1)它可以在相同的条件下重复进行；

(2)每次试验的结果不止一个，但可预知其所有可能的结果；

(3)在试验进行前不能确定哪个结果会出现.

随机试验简称为试验，通常用字母 $E$ 来表示. 例如：以下几个

试验均是随机试验：

$E_1$：投掷一枚分币，观察是正面朝上还是反面朝上.

$E_2$：掷一粒骰子，观察出现的点数.

$E_3$：考察某段时间内来到某服务台的顾客人数.这里的服务台是广义的，可以被理解为储蓄所的营业柜台，也可理解为机场的跑道、车站的候车厅等.

$E_4$：考察某大型商场某年度的商品销售额，设销售额有下界 $T_0$ 和上界 $T_1$.

$E_5$：考察某国有企业某年度的劳动生产率和实现税利两项指标 $X$ 与 $Y$.

### 1.1.2 随机事件与样本空间

把随机试验 $E$ 的每个可能出现的结果称为 $E$ 的随机事件，简称事件，用 $A$、$B$、$C$…字母表示，而将 $E$ 的每个不可分解的、最基本的结果称为 $E$ 的基本事件，用 $\omega$ 等字母表示.

例如：在 $E_2$ 中，“出现 $i$ 点”($i=1,2,\cdots,6$)是试验 $E_2$ 的 6 个基本事件，而 $A=$“出现偶数点”，$B=$“出现点数不超过 5”是 $E_2$ 的事件，但不是基本事件.

将试验 $E$ 的所有基本事件组成的集合称为试验 $E$ 的样本空间，用字母 $\Omega$ 表示，即

$$\Omega=\{\omega \mid \omega\text{是 }E\text{ 的基本事件}\}$$

$\omega$ 称为 $E$ 的样本点.样本空间与试验密切相关，试验改变了，其样本空间也作相应改变.

请看上述几个试验的样本空间：

对应试验 $E_1$ 的基本事件有两个，即“正”、“反”，故 $E_1$ 的样本空间为{正，反}；

同样，可知对应于试验 $E_2$ 的样本空间为：$\{1,2,3,4,5,6\}$；

对应于试验 $E_3$，虽然实际中到达服务台的顾客数总是有上界的，但在上界不易明确的情况下，通常可认为 $E_3$ 的样本空间为

$\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$（$n$ 为自然数）；

$E_4$ 对应的样本空间为 $\{t \mid T_0 \leqslant t \leqslant T_1\}$；

在 $E_5$ 中，设 $a$，$b$ 是劳动生产率 $X$ 的下界和上界，$c$，$d$ 是实现利税 $Y$ 的下界和上界，则 $E_5$ 的样本空间为

$$\{(x,y) \mid a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d\}$$

引入样本空间的概念后，随机事件就成为样本空间的子集合．当且仅当随机事件 $A$ 所包含的基本事件之一发生时称事件 $A$ 发生．例如：$E_2$ 中的事件 $A=$"出现偶数点"$=\{2,4,6\}$是样本空间的子集．$A$ 发生当且仅当基本事件$\{2\}$、$\{4\}$、$\{6\}$之一发生．

将试验 $E$ 中必然发生的事件称为必然事件，记作 $\Omega$，而将 $E$ 中必然不发生的事件称为不可能事件，记作$\varnothing$．例如 $E_1$ 中的事件"正"或"反"、$E_2$ 中的事件"出现点数不超过 6"等都是必然事件，而 $E_1$ 中的"正且反"、$E_2$ 中的"点数为 7"等事件都是不可能事件．

由样本空间的定义知：样本空间包含所有基本事件，因而样本空间作为一个事件为必然事件 $\Omega$．不可能事件不含有任何基本事件，因而为空集$\varnothing$．必然事件和不可能事件是随机事件的两种极端情形．

### 1.1.3 事件的关系和运算

事件之间是有联系的，为研究事件间的关系以及用简单事件的复合来表示复杂事件，引入下面的概念：

(1)包含关系：若事件 $A$ 发生必然导致 $B$ 发生，则称事件 $A$ 包含于 $B$，记作 $A \subset B$．

例如：在 $E_2$ 中，设 $A_i=$"出现 $i$ 点"$(i=1,2,\cdots,6)$，$A=$"出现偶数点"，则 $A_2 \subset A$，$A_4 \subset A$，$A_6 \subset A$．

(2)相等关系：若事件 $A \subset B$，且 $B \subset A$，则称事件 $A$ 与 $B$ 相等，记作 $A=B$．

(3)事件的并：设 $A$，$B$ 是两事件，则"$A$ 与 $B$ 至少发生一个"这一事件称为 $A$ 与 $B$ 的并(或和)，记作：$A \cup B$ 或 $A+B$．

由定义知：事件 $A+B$ 发生当且仅当"$A$ 发生 $B$ 不发生"、"$B$

发生 $A$ 不发生"及"$A$ 发生且 $B$ 发生"三者之一发生.

设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为事件组,则"$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少发生一个"这一事件称为这一事件组的并(或和),记作:$\sum_{i=1}^{n} A_i$;同样事件"$A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$中至少有一事件发生",记作:$\sum_{i=1}^{\infty} A_i$.

例如,上例中的 $A=$"出现偶数点"$=A_2+A_4+A_6$

(4)事件的交:设 $A,B$ 为两事件,则"$A$ 与 $B$ 同时发生"这一事件称为 $A$ 与 $B$ 的交(或积),记作 $A\cap B$ 或 $AB$.

"$A_1,A_2,\cdots A_n$ 同时发生"这一事件称为事件组 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的交(或积),记作 $A_1A_2\cdots A_n$ 或 $\prod_{i=1}^{n} A_i$.

上例中,$A_iA_j=\varnothing(i\neq j)$,  $A_2A=A_2$

(5)事件的差:设 $A,B$ 为两事件,则"$A$ 发生且 $B$ 不发生"这一事件称为 $A$ 与 $B$ 之差,记作 $A-B$.

上例中,$A=$"出现偶数"与 $A_2$ 的差为 $A-A_2=A_4+A_6$

(6)若事件 $A,B$ 满足 $AB=\varnothing$,即事件 $A,B$ 在一次试验中不同时发生,则称 $A,B$ 互斥(或互不相容).

上例中,事件 $A=$"出现偶数"与事件 $B=$"出现奇数"是互斥的.一般地,同一样本空间的不同基本事件是两两互斥的.

(7)若 $A$ 是一事件,则称事件 $\Omega-A$ 是 $A$ 的对立事件(或称 $A$ 的逆事件),记作$\overline{A}$. $\overline{A}$即事件"$A$ 不发生"

由定义知:

$$A+\overline{A}=\Omega,\quad A\overline{A}=\varnothing$$

若事件 $A,B$ 满足条件 $A+B=\Omega,AB=\varnothing$,则称 $A,B$ 相互对立.需要注意:两事件相互对立亦互斥,但反之不然.例如:在上例中,$A=$"出现偶数"与 $B=$"出现奇数"相互对立亦互斥,而 $A_2$ 与 $B$ 互斥但不对立.

由定义可知：$A-B=A\overline{B}$

由于事件是样本空间的子集，因而事件的并、交、差运算分别对应于集合的并、交、差运算；对立事件对应于集合的补集. 另外，由于事件是特殊的集合，集合的运算性质对事件当然成立. 它们是：

1）交换律：$A+B=B+A$，　$AB=BA$

2）结合律：$(A+B)+C=A+(B+C)$，　$(AB)C=A(BC)$

3）分配律：$(A+B)C=AC+BC$，

$(AB)+C=(A+C)(B+C)$

4）对偶原则（De. Morgenr 公式）

$$\overline{\sum_{i=1}^{n} A_i}=\prod_{i=1}^{n} \overline{A_i},\quad \overline{\prod_{i=1}^{n} A_i}=\sum_{i=1}^{n} \overline{A_i}$$

其他有关性质都可以同上面性质一样，从集合论角度导出，并可从事件角度理解. 同时，集合的文氏图一样可以用来帮助对事件性质的理解. 总之，用集合观点看待事件，更利于用数学方法来研究事件.

**例 1**　从标有 1 号到 5 号的 5 个签中任意抽出一个，观察抽出签的标号. 设：$A=$“标号为奇数”，$B=$“标号小于 5”. 用集合列举法表示下列事件：　$\Omega$，$A+B$，$A-B$，$\overline{A}+B$

**解**　$\Omega=\{1,2,3,4,5\}$，　$A+B=\{1,2,3,4,5\}$

$A-B=\{5\}$，　$\overline{A}+B=\{2,4\}+\{1,2,3,4\}=\{1,2,3,4\}$

**例 2**　某人三次购买体育奖券，用 $A_i$ 表示该人第 $i$ 次中奖，$i=1,2,3$，试用符号表示下列事件：(1)三次中至少有一次中奖；(2)三次全中奖；(3)恰有一次中奖；(4)至少有 2 次中奖；(5)至多有一次中奖.

**解**　(1)三次至少有一次中奖：　$A_1+A_2+A_3$

(2)三次全中奖：　$A_1A_2A_3$

(3)恰有一次中奖：　$A_1\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$

(4)至少有二次中奖：　$A_1A_2+A_1A_3+A_2A_3$，

或　$A_1A_2\overline{A}_3+A_2\overline{A}_2A_3+\overline{A}_1A_2A_3+A_1A_2A_3$

(5)至多有一次中奖：$\overline{A}_1\overline{A}_2+\overline{A}_1\overline{A}_3+\overline{A}_2\overline{A}_3$，

或 $$\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3+A_1\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$$

## 1.2 随机事件的概率

人们不仅要了解随机事件，更重要的是研究随机事件发生的可能性大小，以求在各项社会活动中掌握主动权.

### 1.2.1 频率与概率

设事件 $A$ 在 $n$ 次重复试验中发生了 $m_A$ 次，则称比值$\frac{m_A}{n}$为事件 $A$ 发生的频率，记作 $f_n(A)$，$m_A$ 称为 $A$ 发生的频数. 即有

$$f_n(A)=\frac{m_A}{n} \tag{1.1}$$

频率具有如下性质：

(1)(非负性) $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$

(2)(完备性) $f_n(\Omega)=1$

(3)(有限可加性) 若 $AB=\varnothing$，则 $f_n(A+B)=f_n(A)+f_n(B)$

事实上，性质 1，2 是显然的. 对于性质 3，设 $AB=\varnothing$，则在各次试验中 $A$，$B$ 不同时发生，因而有 $m_{A+B}=m_A+m_B$，

从而 $$f_n(A+B)=\frac{m_A+m_B}{n}=f_n(A)+f_n(B)$$

随机事件在一次试验中可能发生也可能不发生，呈现出偶然性，但在多次重复试验中 $A$ 发生的频率则呈现出稳定性. 这可从历史上著名的蒲丰、皮尔逊掷硬币试验中得到证实. 见表 1-1.

**表 1-1**

| 试验者 | 投掷次数 $n$ | 正面出现频数 $m_A$ | 正面出现频率 $f_n(A)$ |
|---|---|---|---|
| 蒲　丰 | 4 040 | 2 048 | 0.506 9 |
| 皮尔逊 | 12 000 | 6 019 | 0.501 6 |
| 皮尔逊 | 24 000 | 12 012 | 0.500 5 |

由该表可见，当试验次数 $n$ 逐渐增加时，$f_n(A)$ 总在常数 0.5 附近摆动，且逐渐稳定于 0.5，这数正反映了 $A=$“出现正面”这一事件发生的可能性大小.

**定义 3.1** 如果在不变的条件下重复进行了 $n$ 次试验，事件 $A$ 发生的频率 $f_n(A)$ 稳定地在某一常数 $p$ 附近摆动，且一般说来，$n$ 越大，摆动幅度越小，则称常数 $p$ 为事件 $A$ 的概率，记作 $P(A)$.

上述定义称为概率的统计定义. 不同的一系列试验会产生不同的频率，可见频率具有随机性，只能近似反映事件发生的可能性大小；概率才是反映事件发生可能性大小的理论值. 在实践中，常用频率来作为概率的估计值. 例如：产品的废品率、男女婴的比例、射击命中率、股票认购证的中签率等都可用频率来估计.

再看一例：某酒厂的广告中宣称该厂的酒瓶盖中较大比例地装有纯金戒作为奖品，但消费者及批发商、零售商却从未中过此类奖，于是人们有足够的理由怀疑该广告是虚假的. 这表明人们在自觉或不自觉地用频率来估计事件发生的可能性大小—— 概率.

### 1.2.2 古典概型

利用频率估计概率虽然较直观，但需要作多次试验，这往往要花费较大代价，在作破坏性试验时尤其如此，因而在很多情况下是不可行的，但在某些试验中，根据事物的本身特征就可以计算出事件的概率. 例如：由摇奖机从 $0,1,\cdots,9$ 十个数中任意摇出一数，共有 10 个基本事件，且任一基本事件的出现是等可能的，因而摇出任何一数的概率都为 $\frac{1}{10}$.

上述试验属古典概型，是概率论中研究得最早的一类随机试验. 这类试验具有两个特征：

(1)样本空间含有有限个基本事件；

(2)每个基本事件出现的可能性大小相等.

例如：掷一粒骰子，观察出现点数的试验是古典概型，而考察某

电话交换台某时段内收到的电话呼唤次数的试验则不是古典概型.

关于古典概型中事件概率(简称古典概率)的计算,我们给出下面的定义:

**定义 3.2** 设试验 $E$ 的样本空间所含基本事件总数为 $n$,事件 $A$ 所含的基本事件数为 $m$,则事件 $A$ 发生的概率为

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{A\text{ 所包含的基本事件数}}{\text{基本事件总数}} \tag{1.2}$$

**例 1** 将一枚硬币在相同条件下投掷两次,设事件 $A=$“两次全正”,$B=$“一次正、一次反”,$C=$“至少出现一正”,求事件 $A$、$B$、$C$ 的概率.

**解** 由题意,每投掷两次硬币是一次试验.该试验的所有基本事件有 4 个,它们是: $\omega_1=\{反,反\}$,$\omega_2=\{反,正\}$,$\omega_3=\{正,反\}$ $\omega_4=\{正,正\}$,而 $A=\{\omega_4\}$, $B=\{\omega_2,\omega_3\}$, $C=\{\omega_2,\omega_3,\omega_4\}$,所以

$$P(A)=\frac{1}{4},\quad P(B)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2},\quad P(C)=\frac{3}{4}$$

对于较为复杂的古典概型,很难一一列出试验的基本事件,此时可以利用排列、组合知识计算基本事件总数 $n$ 和 $A$ 所含基本事件数 $m$,此为解决这类问题的关键.

**例 2** 盒中放有 5 个同类产品,其中有 2 个次品,3 个正品.现按下列不同方式抽取样本:(1)一次取出 2 个;(2)每次取出一个,取后再放回,共取两次;(3)每次取 1 个,取后不放回,共取两次.求事件 $A=$“两个都是正品”、$B=$“恰有一正品”的概率.

**解** (1)从 5 件产品中一次取出 2 件,共有 $C_5^2$ 种不同取法,每种取法对应一基本事件,所以有 $n=C_5^2$,取出的两件正品来自 3 件正品,共有 $C_3^2$ 种不同情况,所以 $A$ 含基本事件数 $m=C_3^2$;当取出正品和次品数各为 1 时,正品和次品分别取自 3 件正品和 2 件次品,由乘法原理,$B$ 含基本事件数 $m=C_3^1C_2^1$.