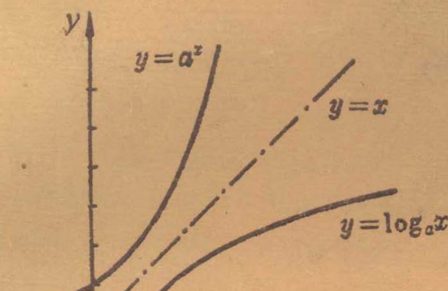
高级中学课本

代数

DAISHU

上册



人民教育出版社

说明

一、这套高中用的数学课本是根据国家教育委员会制订的《全日制中学数学教学大纲》编写的，共分四册：《代数》上、下册，《立体几何》全一册，《平面解析几何》全一册，供二年制或三年制高中使用。

二、本册内容包括：幂函数、指数函数和对数函数，三角函数，两角和与差的三角函数，反三角函数和简单三角方程，以及附录二次函数的图象和性质，一元一次不等式组和一元二次不等式，近似计算的法则。

三、本书习题共分三类：练习、习题、复习参考题。

1. 练习　供课堂练习用；

2. 习题　供课内、外作业用；

3. 复习参考题　供复习本章知识时使用。

习题及复习参考题的题量多于通常所需题量，供教学时根据情况选用。

四、本书由人民教育出版社数学室编写。参加编写的有蔡上鹤、饶汉昌、贾云山、李琳等。全书由吕学礼校订。

目　录

[1]第一章　幂函数、指数函数和对数函数

一　集　合

1.1　集合

考察下面几组对象：(1) 1,2,3,4,5；(2) 与一个角的两边距离相等的所有的点；(3) 所有的直角三角形；(4) x^2，$3x+2$，$5y^3-x$，x^2+y^2；(5) 某农场所有的拖拉机.

它们分别是由一些数、一些点、一些图形、一些整式、一些物体组成的．我们说，每一组对象的全体形成一个集合（有时也简称**集**）．集合里的各个对象叫做这个集合的**元素**．例如，(1) 是由数 1,2,3,4,5 组成的集合，其中的对象 1,2,3,4,5 都是这个集合的元素.

含有有限个元素的集合叫做**有限集**，上面(1)，(4)，(5)这三个集合都是有限集；含有无限个元素的集合叫做**无限集**，上面(2)，(3)这两个集合都是无限集.

对于一个给定的集合，集合中的元素是确定的．这就是说，任何一个对象或者是这个给定集合的元素，或者不是它的元素．例如，对于由所有的直角三角形组成的集合，内角分别

---

[1] 在初中未学过"二次函数的图象和性质"与"一元一次不等式组和一元二次不等式"或其中的一部分内容的学生，应在学习本章前补学这些内容（见本书附录一、二）.

为 30°, 60°, 90° 的三角形，是这个集合的元素，而内角分别为 50°, 60°, 70°的三角形，就不是这个集合的元素．

对于一个给定的集合，集合中的元素是互异的．这就是说，集合中的任何两个元素都是不同的对象；相同的对象归入任何一个集合时，只能算作这个集合的一个元素。因此，集合中的元素是没有重复现象的．

集合的表示方法，常用的有列举法和描述法．

把集合中的元素一一列举出来，写在大括号内表示集合的方法，叫做**列举法**．

例如，由数 1, 2, 3, 4, 5 组成的集合，可以表示为

$$\{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

又如，由整式 x^2, $3x+2$, $5y^3-x$, x^2+y^2 组成的集合，可以表示为

$$\{x^2, 3x+2, 5y^3-x, x^2+y^2\}.$$

用列举法表示集合时，不必考虑元素之间的顺序．例如由四个元素 $-3, 0, 2, 5$ 组成的集合，可以表示为 $\{-3, 0, 2, 5\}$，也可以表示为 $\{0, 2, -3, 5\}$，等等．

应该注意，a 与 $\{a\}$ 是不同的：a 表示一个元素；$\{a\}$ 表示一个集合，这个集合只有一个元素 a．

把集合中的元素的公共属性描述出来，写在大括号内表示集合的方法，叫做**描述法**．这时往往在大括号内先写上这个集合的元素的一般形式，再划一条竖线，在竖线右边写上这个集合的元素的公共属性．

例如：

由不等式 $x-3>2$ 的所有的解组成的集合（即 $x-3>2$

的解集),可以表示为

$$\{x \mid x-3>2\};^{[1]}$$

由抛物线 $y=x^2+1$ 上所有的点的坐标组成的集合,可以表示为

$$\{(x, y) \mid y=x^2+1\}.$$

在不引起混淆的情况下,为了简便,有些集合用描述法表示时,可以省去竖线及其左边的部分。例如,由所有的直角三角形组成的集合,可以表示为

{直角三角形};

由所有的小于 6 的正整数组成的集合,可以表示为

{小于 6 的正整数}.

集合通常用大写的拉丁字母表示,集合的元素用小写的拉丁字母表示. 如果 a 是集合 A 的元素,就说 a **属于**集合 A,记作 $a\in A$;如果 a 不是集合 A 的元素,就说 a **不属于** A,记作 $a\notin A$(或 $a\overline{\in} A$). 例如,设 B 表示集合 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$,则

$$5\in B, \qquad \frac{3}{2}\notin B.$$

全体自然数的集合通常简称**自然数集**,记作 N;

全体整数的集合通常简称**整数集**,记作 Z;

全体有理数的集合通常简称**有理数集**,记作 Q;

全体实数的集合通常简称**实数集**,记作 R.

为了方便起见,有时我们还用 Q^+ 表示正有理数集,用 R^- 表示负实数集,等等.

---

[1] 有的书上用冒号或分号代替竖线,如 $\{x: x-3>2\}$ 或 $\{x;\ x-3>2\}$.

练　习

(口答)下面集合里的元素是什么(第1～5题)?

1. {大于3小于11的偶数}. 4　6　8　10
2. {平方后等于1的数}. {1, -1}
3. {平方后仍等于原数的数}. $\{x \mid x=0,\ x=1\}$
4. {比2大3的数}.
5. {一年中有31天的月份}.

在下列各题中，分别指出了一个集合的所有元素，用适当的方法把这个集合表示出来，然后说出它是有限集还是无限集(第6～10题):

6. 水星、金星、地球、火星、木星、土星、天王星、海王星、冥王星.
7. 周长等于20厘米的三角形.
8. 长江、黄河、珠江、黑龙江.
9. 不等式$x^2+5x+6>0$的解.
10. 大于0的偶数.

把下列集合用另一种方法表示出来(第11～13题):

11. {2, 4, 6, 8, 10}.
12. {目前世界乒乓球锦标赛的七个比赛项目}.
13. {中国古代四大发明}.
14. 用符号∈或∉填空:

$$1\underline{\in}N,\ 0\underline{\in}N,\ -3\underline{\notin}N,\ 0.5\underline{\notin}N,\ \sqrt{2}\underline{\notin}N;$$

$$1\underline{\in}Z,\ 0\underline{\in}Z,\ -3\underline{\in}Z,\ 0.5\underline{\notin}Z,\ \sqrt{2}\underline{\notin}Z;$$

$$1\underline{\in}Q,\ 0\underline{\in}Q,\ -3\underline{\in}Q,\ 0.5\underline{\in}Q,\ \sqrt{2}\underline{\notin}Q;$$

$$1\underline{\in}R,\ 0\underline{\in}R,\ -3\underline{\in}R,\ 0.5\underline{\in}R,\ \sqrt{2}\underline{\in}R.$$

Δ 一个集合含有n个元素，则它的子集个数为2^n，真子集个数为2^n-1.

1.2 子集、交集、并集、补集

1. 子集

我们知道，任何一个自然数都是一个整数，就是说，自然数集N的任何一个元素都是整数集Z的一个元素．同样，自然数集N的任何一个元素都是有理数集Q的一个元素．

对于两个集合A与B，如果集合A的任何一个元素都是集合B的元素，那么集合A叫做集合B的**子集**，记作

$$A\subseteq B(\text{或 } B\supseteq A),$$

读作"A包含于B"(或"B包含A")．例如

$$N\subseteq Z,\quad N\subseteq Q,\quad R\supseteq Z,\quad R\supseteq Q.$$

当A不是B的子集时，我们可以记作

$$A\not\subseteq B(\text{或 } B\not\supseteq A),$$

读作"A不包含于B"(或"B不包含A")．

对于任何一个集合A，因为它的任何一个元素都属于集合A本身，所以

$$A\subseteq A,$$

也就是说，**任何一个集合是它本身的子集．**

为了方便起见，我们把不含任何元素的集合叫做**空集**，记作$\varnothing$．例如：

$$\{x|x+1=x+3\}=\varnothing,$$

$$\{\text{小于零的正整数}\}=\varnothing,$$

$$\{\text{两边之和小于第三边的三角形}\}=\varnothing.$$

我们规定空集是任何集合的子集．也就是说，对于任何集合A，有

$$\varnothing\subseteq A.$$

如果 A 是 B 的子集，并且 B 中至少有一个元素不属于 A，那么集合 A 叫做集合 B 的**真子集**，记作

$$A\subset B(\text{或 } B\supset A).$$

当 A 不是 B 的真子集时，我们可以记作

$$A\not\subset B(\text{或 } B\not\supset A).$$

例如，自然数集 N 是 N 的子集，但不是 N 的真子集，所以 $N\subseteq N$，但 $N\not\subset N$；N 是实数集 R 的子集，也是 R 的真子集，所以 $N\subset R$.

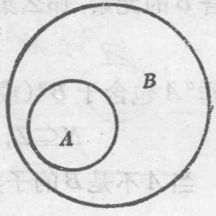


图 1-1

集合 B 同它的真子集 A 之间的关系，可以用图 1-1 中 B 同 A 的关系来说明，其中 A，B 两个圈的内部分别表示集合 A，B.

显然，空集是任何非空集合的真子集.

容易知道，**对于集合 A，B，C，如果 $A\subseteq B$，$B\subseteq C$，那么 $A\subseteq C$.** 事实上，设 x 是集合 A 的任意一个元素，因为 $A\subseteq B$，所以 $x\in B$，又因为 $B\subseteq C$，所以 $x\in C$. 从而 $A\subseteq C$. 用定义证明

同样可知，**对于集合 A，B，C，如果 $A\subset B$，$B\subset C$，那么 $A\subset C$.**

对于两个集合 A 与 B，如果 $A\subseteq B$，同时 $B\subseteq A$，我们就说这两个集合相等，记作

$$A=B,$$

读作"A 等于 B".

例如，$A=\{x\mid x^2+3x+2=0\}$，$B=\{-1,-2\}$，则

$$A=B.$$

例 1 写出集合 $\{a, b\}$ 的所有的子集及真子集.

解: 集合$\{a, b\}$的所有的子集是$\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{a, b\}$, 其中$\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$是真子集.

例 2　写出不等式 $x-3>2$ 的解集并进行化简（即化成直接表明未知数本身的取值范围的解集）.

解: 不等式 $x-3>2$ 的解集是

$$\{x \mid x-3>2\}=\{x \mid x>5\}.$$

2. 交集

已知 6 的正约数的集合为

$$A=\{1, 2, 3, 6\},$$

10 的正约数的集合为

$$B=\{1, 2, 5, 10\},$$

那么 6 与 10 的正公约数的集合为

$$\{1, 2\}.$$

容易看出, 集合 $\{1, 2\}$是由所有属于A且属于B的元素(即 A, B 的公共元素)所组成的.

一般地, 由所有属于集合A且属于集合B的元素所组成的集合, 叫做 A, B 的**交集**, 记作 $A\cap B$（可读作“A 交 B”), 即

$$A\cap B=\{x \mid x\in A, 且\ x\in B\}.$$

这样, 6 与 10 的正公约数的集合, 可以从求 6 的正约数的集合与 10 的正约数的集合的交集而得到, 即

$$\{1, 2, 3, 6\}\cap\{1, 2, 5, 10\}$$
$$=\{1, 2\}.$$

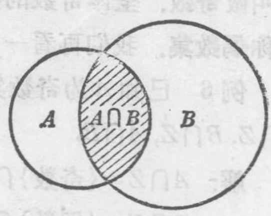


图　1-2

图 1-2 中的阴影部分，表示集合 A, B 的交集 $A\cap B$.

由交集定义容易推出，对于任何集合 A, B，有

$$A\cap A=A,\ \ A\cap\varnothing=\varnothing,$$
$$A\cap B=B\cap A.$$

例 3 设 $A=\{x|x>-2\}, B=\{x|x<3\}$，求 $A\cap B$.

解: $A\cap B=\{x|x>-2\}\cap\{x|x<3\}$

$$=\{x|-2<x<3\}.$$

例 4 设 $A=\{(x,\ y)|4x+y=6\}$，$B=\{(x,\ y)|3x+2y=7\}$，求 $A\cap B$. 表示一个交点或一组的

解: $A\cap B=\{(x,y)|4x+y=6\}\cap\{(x,\ y)|3x+2y=7\}$

$$=\left\{(x,y)\ \middle|\ \begin{cases}4x+y=6,\\3x+2y=7\end{cases}\right\}$$

$$=\{(1,2)\}.$$ 不是{1,2}

例 5 设 $A=$\{等腰三 角 形\}，$B=$\{直 角 三 角 形\}，求 $A\cap B$.

解: $A\cap B=$\{等腰三角形\}$\cap$\{直角三角形\}

=\{有两边相等且有一个角是直角的三角形\}

=\{等腰直角三角形\}.

形如 $2n(n\in Z)$ 的整数叫做**偶数**，形如 $2n+1(n\in Z)$ 的整数叫做**奇数**. 全体奇数的集合简称**奇数集**，全体偶数的集合简称**偶数集**. 我们再看一个例子.

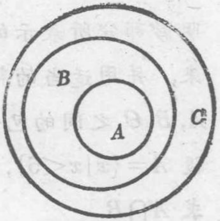
例 6 已知 A 为奇数集，B 为偶数集，Z 为整数集，求 $A\cap Z, B\cap Z, A\cap B$.

解: $A\cap Z=$\{奇数\}$\cap$\{整数\}$=$\{奇数\}$=A$,

$B\cap Z=$\{偶数\}$\cap$\{整数\}$=$\{偶数\}$=B$,

$$A\cap B=\{奇数\}\cap\{偶数\}=\varnothing.$$

练　习



(第1题)

1. 图中 A, B, C 表示集合，说明它们之间有什么包含关系.
2. 写出集合 $\{a, b, c\}$ 的所有子集及真子集.
3. 用适当的符号 ($\in, \notin, =, \supset, \subset$) 填空：

(1) a__$\{a\}$;　　(2) a__$\{a, b, c\}$;

(3) d__$\{a, b, c\}$;　　(4) $\{a\}$__$\{a, b, c\}$;

(5) $\{a, b\}$__$\{b, a\}$;　　(6) $\{3, 5\}$__$\{1, 3, 5, 7\}$;

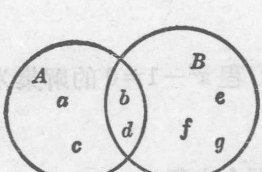
(7) $\{2, 4, 6, 8\}$__$\{2, 8\}$;　　(8) $\varnothing$__$\{1, 2, 3\}$.

4. 写出方程 $x+3=\dfrac{x}{2}-5$ 的解集并进行化简.
5. 写出方程组

$$\begin{cases}2x+3y=1,\\3x-2y=3\end{cases}$$

的解集并进行化简.

6. 写出不等式 $3x+2<4x-1$ 的解集并进行化简.



(第7题)

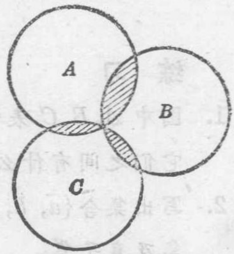
7. 如图，设 $A=\{a, b, c, d\}$, $B=\{b, d, e, f, g\}$.

(1) 求 $A\cap B, B\cap A$;

(2) 用适当的符号 ($\supset, \subset, =$) 填空：

$A\cap B$ ___ A, $A\cap B$ ___ $B\cap A$,

B ___ $A\cap B$, $\varnothing$ ___ $B\cap A$.



（第 8 题）

8. 图中 A, B, C 表示集合，把各个阴影部分所表示的集合分别标出来，并用适当的符号表示它们同 A, B, C 之间的包含关系。

9. 设 $A=\{x|x<5\}$，$B=\{x|x\geqslant 0\}$，求 $A\cap B$.

10. 设 $A=\{(x, y)|\ 3x+2y=1\}$，$B=\{(x, y)|\ x-y=2\}$，$C=\{(x, y)|\ 2x-2y=3\}$，$D=\{(x, y)|\ 6x+4y=2\}$，求 $A\cap B, B\cap C, A\cap D$.

11. 设$A=\{$锐角三角形$\}$，$B=\{$钝角三角形$\}$，求 $A\cap B$.

12. 设 $A=\{x|x=2k,\ \ k\in Z\}$，$B=\{x|x=2k+1,\ \ k\in Z\}$，$C=\{x|x=2(k+1),\ k\in Z\}$，$D=\{x|x=2k-1,\ k\in Z\}$. 问 A, B, C, D 中哪些集合相等，哪些集合的交集是空集。

3. 并集

已知方程 $x^2-4=0$ 的解集为

$$A=\{2, -2\},$$

方程 $x^2-1=0$ 的解集为

$$B=\{1, -1\},$$

那么方程

$$(x^2-4)(x^2-1)=0$$

的解集为

$$\{1, -1, 2, -2\}.$$

容易看出，集合$\{1, -1, 2, -2\}$是由所有属于A或属于B的元素所组成的.

一般地，由所有属于集合A或属于集合B的元素所组成的集合，叫做A, B的**并集**，记作$A\cup B$(可读作"A并B")，即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A, \text{或 } x\in B\}.$$

这样，方程$(x^2-4)(x^2-1)=0$的解集，可以从求方程$x^2-4=0$的解集与方程$x^2-1=0$的解集的并集而得到，即

$$\{2, -2\}\cup\{1, -1\}=\{1, -1, 2, -2\}.$$

图 1-3 中的阴影部分，表示集合A, B的并集$A\cup B$.

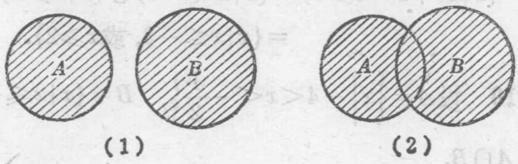


图 1-3

注意：我们已经知道，集合中的元素是没有重复现象的. 因此，在求两个集合的并集时，这两个集合的公共元素在并集中只能出现一次. 例如，设$A=\{3, 5, 6, 8\}$, $B=\{4, 5, 7, 8\}$，则$A\cup B$应是$\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$，而不是$\{3, 5, 6, 8, 4, 5, 7, 8\}$.

由并集定义容易知道，对于任何集合A, B，有

$$A\cup A=A, \quad A\cup\varnothing=A,$$

$$A\cup B=B\cup A.$$

例7 设 $A=\{x|-1<x<2\}$，$B=\{x|1<x<3\}$，求 $A\cup B$.

解： $A\cup B=\{x|-1<x<2\}\cup\{x|1<x<3\}$

$=\{x|-1<x<3\}$.

例8 设 $A=\{$锐角三角形$\}$，$B=\{$钝角三角形$\}$，求 $A\cup B$.

解： $A\cup B=\{$锐角三角形$\}\cup\{$钝角三角形$\}$

$=\{$锐角三角形，或钝角三角形$\}$

$=\{$斜三角形$\}$.

例9 写出不等式 $x^2+x-6\geqslant0$ 的解集并进行化简.

解： 不等式 $x^2+x-6\geqslant0$ 的解集是

$$\{x|x^2+x-6\geqslant0\}=\{x|x\leqslant-3\}\cup\{x|x\geqslant2\}$$

$$=\{x|x\leqslant-3，或x\geqslant2\}.$$

例10 设 $A=\left\{x\left|-4<x<-\frac{1}{2}\right.\right\}$，$B=\{x|x\leqslant-4\}$，求 $A\cup B$，$A\cap B$.

解： $A\cup B=\left\{x\left|-4<x<-\frac{1}{2}\right.\right\}\cup\{x|x\leqslant-4\}$

$=\left\{x\left|x<-\frac{1}{2}\right.\right\}$，

$A\cap B=\left\{x\left|-4<x<-\frac{1}{2}\right.\right\}\cap\{x|x\leqslant-4\}$

$=\varnothing$.

例11 已知 Q 为有理数集，Z 为整数集，求 $Q\cup Z$，$Q\cap Z$.

解： $Q\cup Z=\{$有理数$\}\cup\{$整数$\}=\{$有理数$\}=Q$.

$$Q\cap Z=\{\text{有理数}\}\cap\{\text{整数}\}=\{\text{整数}\}=Z.$$

4. 补集

在研究集合与集合之间的关系时，在某些情况下，这些集合都是某一个给定的集合的子集，这个给定的集合可以看作一个全集，用符号I表示．也就是说，全集含有我们所要研究的各个集合的全部元素．

例如，在研究数集时，常常把实数集R作为全集；在研究图形的集合时，常常把所有的空间图形组成的集合作为全集．

已知全集I，集合$A\subseteq I$，由I中所有不属于A的元素组成的集合，叫做集合A在集合I中的**补集**，记作$\overline{A}$(可读作"A补")，即

$$\overline{A}=\{x\,|\,x\in I,\ \text{且}\ x\notin A\}.$$

图 1-4 中的长方形内表示全集I，圆内表示集合A，阴影部分表示集合A在集合I中的补集$\overline{A}$.

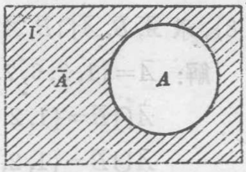


图 1-4

由补集定义容易知道，对于任何集合A，有

$$A\cup\overline{A}=I,\quad A\cap\overline{A}=\varnothing,\quad \overline{\overline{A}}=A,$$

其中$\overline{\overline{A}}$表示$\overline{A}$在I中的补集．

例如，如果$I=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，$A=\{1, 3, 5\}$，那么

$$\overline{A}=\{2, 4, 6\}.$$

容易看出

$$\{1, 3, 5\}\cup\{2, 4, 6\}=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}=I,$$

$$\{1, 3, 5\}\cap\{2, 4, 6\}=\varnothing,$$

$$\overline{\overline{A}}=\{1, 3, 5\}=A.$$

例 12 已知 $I=R=\{$实数$\}$, $Q=\{$有理数$\}$, 求 $\overline{Q}$.

解: 有理数集在实数集中的补集是全体无理数的集合, 所以

$$\overline{Q}=\{\text{无理数}\}.$$

以后我们就把全体无理数的集合简称无理数集, 记作 $\overline{Q}$

例 13 设 $I=\{$梯形$\}$, $A=\{$等腰梯形$\}$, 求 $\overline{A}$.

解: $\overline{A}=\{$不等腰梯形$\}$.

例 14 已知 $I=R=\{$实数$\}$, $A=\{x|x^2+3x+2<0\}$, 求 $\overline{A}$.

解: $\because\ A=\{x|x^2+3x+2<0\}=\{x|-2<x<-1\}$,

$\therefore\ \overline{A}=\{x|x\leqslant-2\}\cup\{x|x\geqslant-1\}$

$=\{x|x\leqslant-2, \text{或} x\geqslant-1\}$.

例 15 设 $I=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, $A=\{3,4,5\}$, $B=\{4,7,8\}$, 求 $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{A}\cap\overline{B}$, $\overline{A}\cup\overline{B}$.

解: $\overline{A}=\{1,2,6,7,8\}$, $\overline{B}=\{1,2,3,5,6\}$,

$\overline{A}\cap\overline{B}=\{1,2,6\}$,

$\overline{A}\cup\overline{B}=\{1,2,3,5,6,7,8\}$.

练　习

1. 设 $A=\{1,2,3,4,5\}$, $B=\{4,5,6,7,8,9\}$.

(1) 求 $A\cap B$, $A\cup B$;

(2) 用适当的符号($\supset$, $\subset$)填空:

$A\cup B$__A,　$A\cup B$__B,　$A\cap B$__$A\cup B$.

2. 设 $A=\{x|-2<x<1\}$, $B=\{x|0\leqslant x\leqslant 2\}$, 求 $A\cup B$.

3. 设 $A=\{x|x>-2\}$, $B=\{x|x\geqslant 3\}$, 求 $A\cup B$.

4. 写出不等式 $x^2-x-2<0$ 的解集并进行化简.