

广 播 电 视 大 学

理论力学复习表解

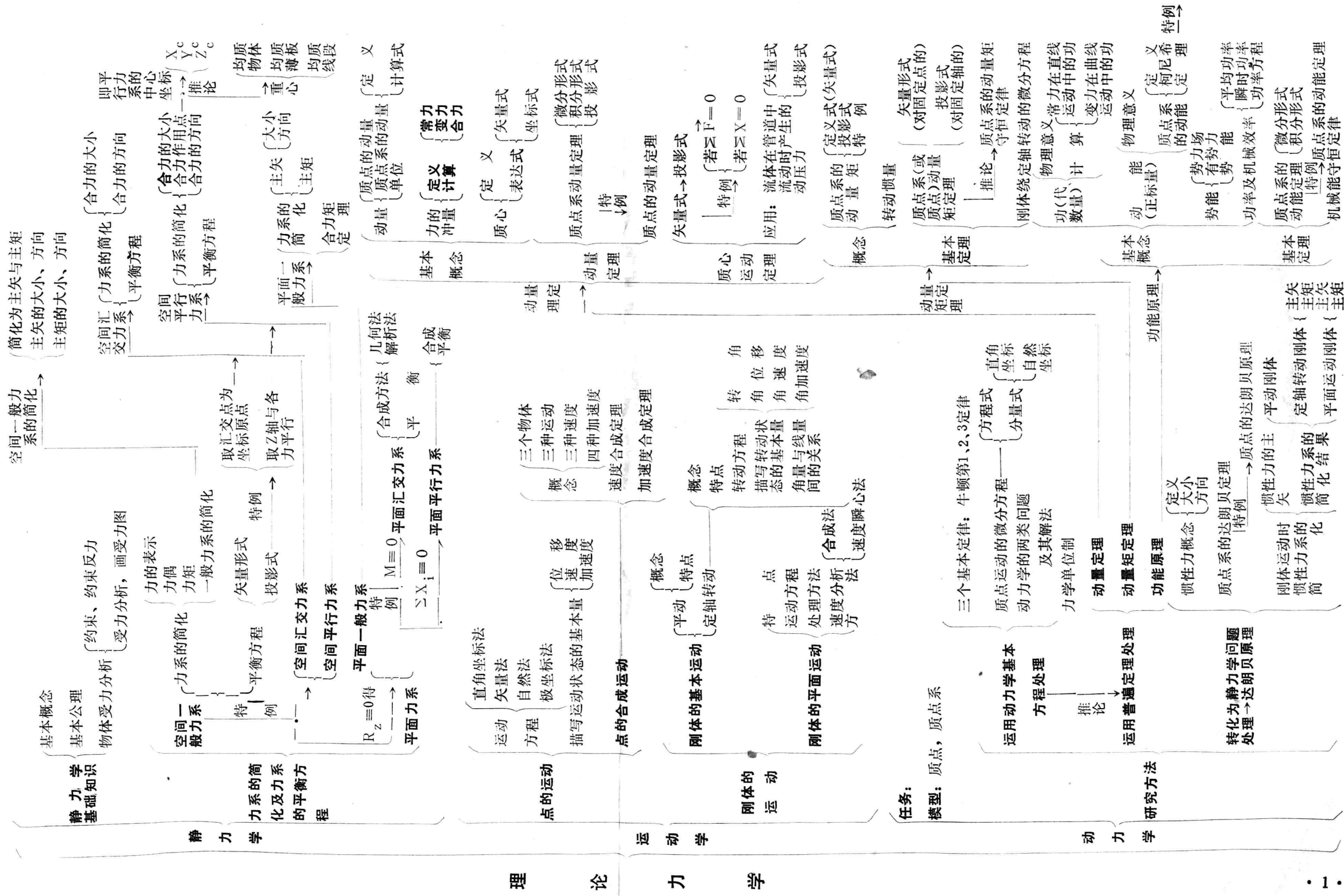
张 宪 魁

整 理

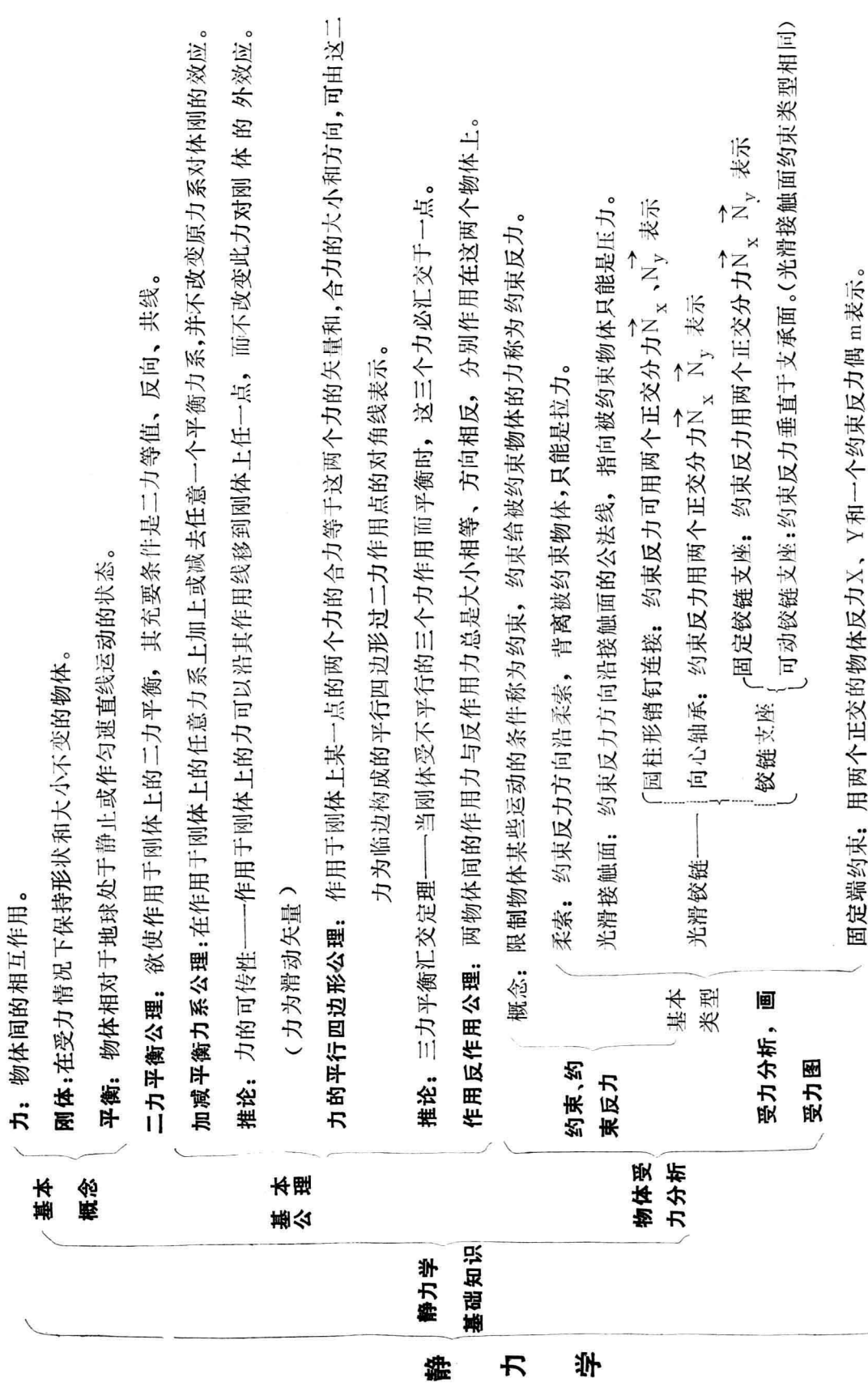
山 东 广 播 电 视 大 学 教 务 处

济 宁 行 署 电 大 工 作 站

理论力学知识内容总表解



单元表解(一)



物 体 的 受 力 分 析	静 力 学 问 题 解 题 步 骤
1、首先确定“研究对象”, 并把它与周围物体隔离开来; 2、观察环境, “看研究对象”与其它哪些物体接触; 3、分析“研究对象”所受之力: 首先考虑重力, 并画出重力矢号, 从重力矢号开始转一周, 看“研究对象”与哪些物体接触, 则可能受到这些物体的作用力(弹力、摩擦力), 根据约束的种类确定受力方向; 4、画受力图: 注意只画外力, 不要漏画, 不要重画。	1、首先判断是否属于静力学问题; 2、确定研究对象; 3、分析物体受力情况; 4、画物体受力图, 确定所受之力是属于哪种力系(空间? 平面? 一般? 汇交? 平行?); 5、选坐标系; 6、视力系的种类不同列出有关的平衡方程式; 7、求解方程; 8、讨论。

单元表解 (二)

静力学基础知识 (详见第二页单元表解 (一))

力的表示

力的方向与x、y、z轴的正向夹角为α、β、γ; cos α, cos β, cos γ为方向余弦

坐标轴上的投影

$$\begin{cases} X = F \cos \alpha \\ Y = F \cos \beta \\ Z = F \cos \gamma \end{cases}$$

大小: $= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

等效条件: 作用在同一刚体的两平行平面内的两个力偶, 若它们的转向相同, 力偶矩大小相等, 则两力偶等效。

力偶 (自由矢量)

三要素

- 力偶作用面的方向
- 力偶矩的大小
- 力偶的转向

用力偶矩矢表示

- 方向: 与力偶作用面法线方向相同
- 大小: 用按一定比例的矢量长度表示
- 指向: 按右螺旋表示力偶的转向

性质: 可以滑动、可以平移的矢量——称为自由 矢量

空间一般力系

合成: $\vec{m} = \vec{m}_1 + \vec{m}_2 + \dots + \vec{m}_n$

合力偶矩等于零 $\sum \vec{m} = 0$

空间力偶系平衡条件

投影方程

$$\begin{cases} \sum (m_i)_x = 0 \\ \sum (m_i)_y = 0 \\ \sum (m_i)_z = 0 \end{cases}$$

力对点的矩矢: $\vec{m}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}$, 等于矩心到该力作用点的矢径与该力的矢量的积

力对轴的矩

大小: 等于力在垂直于轴的平面内的分力的矩的大小和它与轴间的垂直距离的乘积 $m_z(\vec{F})$

合力对轴的矩等于各分力对该轴的矩的代数和

$$m_z(\vec{R}) = m_z(\vec{F}_1) + m_z(\vec{F}_2) + \dots + m_z(\vec{F}_n) = \sum m_z(\vec{F}_i)$$

力系的简化及力系的平衡方程

正负号: 按右手规则确定

合力矩定理: 空间力系的合力对任一点的矩等于该力系中各力对同一点的矩的矢量和。 $m_O(\vec{R}) = \sum m_O(\vec{F}_i)$ (详见第四页单元表解三)

一般力系的简化 (根据力线平移定理)

平衡方程

矢量形式

$$\begin{cases} \vec{R} = 0 \\ \vec{m}_O = 0 \end{cases}$$

即作用于刚体上的空间一般力系平衡的充分必要条件是力系的主矢和对任一点的主矩都等于零。

投影式

$$\begin{cases} R_x = \sum X_i = 0 \\ R_y = \sum Y_i = 0 \\ R_z = \sum Z_i = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} m_x = \sum m_x(\vec{F}_i) = 0 \\ m_y = \sum m_y(\vec{F}_i) = 0 \\ m_z = \sum m_z(\vec{F}_i) = 0 \end{cases}$$

特例

取汇交点为坐标原点则变成空间汇交力系的平衡方程

取Z轴与各力平行则变成空间平行力系的平衡方程 (其中各力对Z轴的矩 $m_z = 0$ 各力在x、y轴上的投影 $R_x = 0 \quad R_y = 0$)

特点: 力系中各力的作用线汇交于一点

特点: 力系中各力的作用线彼此平行

(详见第4页单元表解三)

(详见第4页单元表解三)

合力矩定理: 平面一般力系的合力对作用面内任一点的矩等于力系中各力对同一点的矩的代数和。 $m_O(\vec{R}) = \sum m_O(\vec{F}_i)$ (详见第4页单元表解三)

特例

平面一般力系

合成方法

几何法 $\vec{R} = \sum \vec{F}_i$

解析法 $\begin{cases} R_x = \sum X_i \\ R_y = \sum Y_i \end{cases}$

平衡: $\vec{R} = 0$ 即 $\begin{cases} R_x = 0 \\ R_y = 0 \end{cases}$ 平面汇交力系平衡的充要条件是力系的力合等于零

$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \cdot \text{tg } 0 = \frac{R_y}{R_x}$

得平面力系

平面平行力系

合成: $\vec{R} = \sum \vec{P}_i$

大小: $R = \sum P_i$ 合力大小等于各分力之和

方向: 与各分力方向一致

合力作用点位置: 平行力系中心的位置坐标

平衡: $\begin{cases} \sum Y = 0 \\ \sum m_A = 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} \sum m_B = 0 \\ \sum m_C = 0 \end{cases}$ (但A、B、C连线不能与诸力平行)

单元表解 (三)

力的表示 (详见第三页单元表解二)		力的表示 (详见第三页单元表解二)	
力系的简化	力的表示	力系的简化	力的表示
空间一般力系	① 简化为主矢与主矩: 作用于O点的汇交力系($\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$)和一个附加空间力偶(系 $m_1, m_2, \dots, m_n$) $\rightarrow$ 汇交力系的合力和R一个力偶 m_0 $\rightarrow$ 即 $\rightarrow$ $\begin{cases} \vec{R} = \sum \vec{F}_i \text{ (原力系的主矢)} \\ m_0 = \sum m_i = \sum m_0(F_i) \end{cases}$ (称原力系对简化中心的主矩)	② 主矢的大小: (选简化中心为坐标原点) $R_x = \sum X_i, R_y = \sum Y_i, R_z = \sum Z_i$ $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$ 主矢的方向: $\cos \alpha = \frac{R_x}{R}, \cos \beta = \frac{R_y}{R}, \cos \gamma = \frac{R_z}{R}$ ③ 主矩的大小: $M_x = \sum m_x(\vec{F}_i), M_y = \sum m_y(\vec{F}_i), M_z = \sum m_z(\vec{F}_i)$ $M_0 = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}$ 主矩的方向: $\cos \lambda = \frac{M_x}{M_0}, \cos \mu = \frac{M_y}{M_0}, \cos \nu = \frac{M_z}{M_0}$	① 简化为主矢与主矩: 作用于O点的汇交力系($\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$)和一个附加空间力偶(系 $m_1, m_2, \dots, m_n$) $\rightarrow$ 汇交力系的合力和R一个力偶 m_0 $\rightarrow$ 即 $\rightarrow$ $\begin{cases} \vec{R} = \sum \vec{F}_i \text{ (原力系的主矢)} \\ m_0 = \sum m_i = \sum m_0(F_i) \end{cases}$ (称原力系对简化中心的主矩)
平衡方程	平衡方程	平衡方程	平衡方程
空间汇交力系	合力的大小: $R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n$ $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$ 合力的方向: 方向余弦 $\cos \alpha = \frac{R_x}{R}, \cos \beta = \frac{R_y}{R}, \cos \gamma = \frac{R_z}{R}$ 合力的大小: $R_x = \sum X_i, R_y = \sum Y_i, R_z = \sum Z_i$ 合力的作用点: $\vec{r}_c = \frac{\sum P_i \vec{r}_i}{\sum P_i}$ (即平行力系中心的坐标) (仅与平行力大小、位置有关、与各力方向无关) 平衡方程: $\begin{cases} R_z = \sum Z_i = 0 \\ M_x = \sum m_x = 0 \\ M_y = \sum m_y = 0 \end{cases}$	合力的大小: $R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n$ $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$ 合力的方向: 方向余弦 $\cos \alpha = \frac{R_x}{R}, \cos \beta = \frac{R_y}{R}, \cos \gamma = \frac{R_z}{R}$ 合力的大小: $R_x = \sum X_i, R_y = \sum Y_i, R_z = \sum Z_i$ 合力的作用点: $\vec{r}_c = \frac{\sum P_i \vec{r}_i}{\sum P_i}$ (即平行力系中心的坐标) (仅与平行力大小、位置有关、与各力方向无关) 平衡方程: $\begin{cases} R_z = \sum Z_i = 0 \\ M_x = \sum m_x = 0 \\ M_y = \sum m_y = 0 \end{cases}$	合力的大小: $R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n$ $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$ 合力的方向: 方向余弦 $\cos \alpha = \frac{R_x}{R}, \cos \beta = \frac{R_y}{R}, \cos \gamma = \frac{R_z}{R}$ 合力的大小: $R_x = \sum X_i, R_y = \sum Y_i, R_z = \sum Z_i$ 合力的作用点: $\vec{r}_c = \frac{\sum P_i \vec{r}_i}{\sum P_i}$ (即平行力系中心的坐标) (仅与平行力大小、位置有关、与各力方向无关) 平衡方程: $\begin{cases} R_z = \sum Z_i = 0 \\ M_x = \sum m_x = 0 \\ M_y = \sum m_y = 0 \end{cases}$
空间平行力系	合力的大小: $R = P_1 + P_2 + \dots + P_n = \sum P_i$ 合力的作用点: $\vec{r}_c = \frac{\sum P_i \vec{r}_i}{\sum P_i}$ (即平行力系中心的坐标) (仅与平行力大小、位置有关、与各力方向无关) 平衡方程: $\begin{cases} R_z = \sum Z_i = 0 \\ M_x = \sum m_x = 0 \\ M_y = \sum m_y = 0 \end{cases}$	合力的大小: $R = P_1 + P_2 + \dots + P_n = \sum P_i$ 合力的作用点: $\vec{r}_c = \frac{\sum P_i \vec{r}_i}{\sum P_i}$ (即平行力系中心的坐标) (仅与平行力大小、位置有关、与各力方向无关) 平衡方程: $\begin{cases} R_z = \sum Z_i = 0 \\ M_x = \sum m_x = 0 \\ M_y = \sum m_y = 0 \end{cases}$	合力的大小: $R = P_1 + P_2 + \dots + P_n = \sum P_i$ 合力的作用点: $\vec{r}_c = \frac{\sum P_i \vec{r}_i}{\sum P_i}$ (即平行力系中心的坐标) (仅与平行力大小、位置有关、与各力方向无关) 平衡方程: $\begin{cases} R_z = \sum Z_i = 0 \\ M_x = \sum m_x = 0 \\ M_y = \sum m_y = 0 \end{cases}$
平面一般力系	简化为主矢与主矩: 主矢: $\vec{R} = \sum \vec{F}_i$ 大小: (选简化中心为原点) $R_x = \sum X_i$ $R_y = \sum Y_i$ 方向: $\tan \alpha = \frac{R_y}{R_x}$ 或 $\cos(R, X) = \frac{R_x}{R}$ 主矩: $M_0 = \sum m_0(\vec{F}_i)$ (代数和) 合力矩定理: $m_0(R) = \sum m_0(\vec{F}_i)$ 平衡方程: $\begin{cases} R_x = \sum X_i = 0 \\ R_y = \sum Y_i = 0 \\ M_0 = 0 \text{ 即 } \sum m_0(\vec{F}_i) = 0 \end{cases}$ 特例: $M_0 \equiv 0 \rightarrow$ 平面汇交力系 (详见第3页单元表解二) $\sum X_i \equiv 0 \rightarrow$ 平面平行力系 (详见第3页单元表解三)	简化为主矢与主矩: 主矢: $\vec{R} = \sum \vec{F}_i$ 大小: (选简化中心为原点) $R_x = \sum X_i$ $R_y = \sum Y_i$ 方向: $\tan \alpha = \frac{R_y}{R_x}$ 或 $\cos(R, X) = \frac{R_x}{R}$ 主矩: $M_0 = \sum m_0(\vec{F}_i)$ (代数和) 合力矩定理: $m_0(R) = \sum m_0(\vec{F}_i)$ 平衡方程: $\begin{cases} R_x = \sum X_i = 0 \\ R_y = \sum Y_i = 0 \\ M_0 = 0 \text{ 即 } \sum m_0(\vec{F}_i) = 0 \end{cases}$ 特例: $M_0 \equiv 0 \rightarrow$ 平面汇交力系 (详见第3页单元表解二) $\sum X_i \equiv 0 \rightarrow$ 平面平行力系 (详见第3页单元表解三)	简化为主矢与主矩: 主矢: $\vec{R} = \sum \vec{F}_i$ 大小: (选简化中心为原点) $R_x = \sum X_i$ $R_y = \sum Y_i$ 方向: $\tan \alpha = \frac{R_y}{R_x}$ 或 $\cos(R, X) = \frac{R_x}{R}$ 主矩: $M_0 = \sum m_0(\vec{F}_i)$ (代数和) 合力矩定理: $m_0(R) = \sum m_0(\vec{F}_i)$ 平衡方程: $\begin{cases} R_x = \sum X_i = 0 \\ R_y = \sum Y_i = 0 \\ M_0 = 0 \text{ 即 } \sum m_0(\vec{F}_i) = 0 \end{cases}$ 特例: $M_0 \equiv 0 \rightarrow$ 平面汇交力系 (详见第3页单元表解二) $\sum X_i \equiv 0 \rightarrow$ 平面平行力系 (详见第3页单元表解三)
平面力系	平面一般力系	平面一般力系	平面力系

力系的简化及平衡方程

单元表解 (四)

运动学

点的运动

运动方程
(消去 t 即可求轨迹方程)

直角坐标法: $\begin{cases} x=f_1(t) \\ y=f_2(t) \\ z=f_3(t) \end{cases}$ 轨迹知否皆可用此法, 关键是据题设条件找动点的几何关系

矢量法: $\vec{r}=\vec{r}(t)$ 或 $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$, $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$; $\cos\alpha=\frac{x}{r}$, $\cos\beta=\frac{y}{r}$, $\cos\gamma=\frac{z}{r}$

自然法: $s=f(t)$ 已知轨迹方程可用此法

极坐标法: $\begin{cases} r=f_1(t) \\ \theta=f_2(t) \end{cases}$

位移: 点的位移 $\Delta\vec{r}$ 是矢量
若 $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$, $\vec{v}=\frac{dx}{dt}\vec{i}+\frac{dy}{dt}\vec{j}+\frac{dz}{dt}\vec{k}$

速度: $\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\dot{\vec{r}}$

动点的速度等于矢径对时间的一阶导数

$\vec{V}=\frac{ds}{dt}\vec{\tau}=\dot{s}\vec{\tau}$

大小: $V=\frac{ds}{dt}=f'(t)$, $s=f(t)$, $\frac{ds}{dt}=V$ 是速度的代数值, 其正负号表示沿轨道切线的正向或反向。

方向: 若 $\frac{ds}{dt}>0$, 指向与 $\vec{\tau}$ 相同, 即沿轨道切线的正方向, $\vec{\tau}=\frac{d\vec{r}}{ds}$ 为沿轨迹切线方向的单位矢量。

描写运动状态的基本量

加速度 $\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\ddot{\vec{r}}$

动点的加速度等于速度矢量对时间的一次导数或其矢径对时间的二次导数。

$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\frac{d^2x}{dt^2}\vec{i}+\frac{d^2y}{dt^2}\vec{j}+\frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$

大小: $a=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$

方向: $\cos(\vec{a}, x)=\frac{a_x}{a}$, $\cos(\vec{a}, y)=\frac{a_y}{a}$, $\cos(\vec{a}, z)=\frac{a_z}{a}$

$\vec{a}=\frac{d^2s}{dt^2}\vec{\tau}+\frac{v^2}{\rho}\vec{n}$

大小: $a=\sqrt{(\frac{d^2s}{dt^2})^2+(\frac{v^2}{\rho})^2}$

方向: $\tan(\vec{a}, \vec{n})=\frac{a_\tau}{a_n}$

动点作曲线运动时, 其全加速度等于切向加速度与法向加速度之矢量和, 切向加速度 $\frac{d^2s}{dt^2}$ 代表速度大小对时间的变化率, 方向沿轨迹切线。法向加速度代表速度方向对时间的变化率, 方向沿轨迹的法线, 指向曲率中心, 大小等于 $\frac{v^2}{\rho}$

匀变速曲线运动

$$V=V_0+a_\tau t$$

$$S=S_0+V_0 t+\frac{1}{2}a_\tau t^2$$

$$V^2=V_0^2+2a_\tau(S-S_0)$$

概念

三个物体: 动点、动系、静系。

三种运动: 绝对运动、相对运动、牵连运动

三种速度: 绝对速度、相对速度、牵连速度。

四种加速度: 绝对加速度、相对加速度、牵连加速度、哥氏加速度。

点的合成运动

速度合成定理: (速度平行四边形定理) $\vec{V}_a=\vec{V}_r+\vec{V}_e$ ($\vec{V}_a$ 绝对速度、 $\vec{V}_r$: 相对速度、 $\vec{V}_e$: 牵连速度) 动点在每一瞬时的绝对速度等于其相对速度与牵连速度的矢量和,

对于 $\begin{cases} \text{相对运动是任意的曲线运动} \\ \text{牵连运动是刚体任一运动形式} \end{cases}$ 皆适用。

加速度合成定理

牵连运动为平动时: $\vec{a}_a=\vec{a}_e+\vec{a}_r$ 即动点在任一瞬时的绝对加速度等于牵连加速度与相对加速度的矢量和。

牵连运动为转动时: $\vec{a}_a=\vec{a}_e+\vec{a}_r+\vec{a}_k$ 即动点在每一瞬时的绝对加速度等于牵连加速度、相对加速度与哥氏加速度之矢量和。

当——

$\begin{cases} \text{动系的转轴与 } V_r \text{ 不垂直时} \\ \text{动系的转轴与 } V_r \text{ 垂直时} \end{cases}$

$$\vec{a}_k=2\vec{\omega}\times\vec{V}_r$$

$$a_k=2\omega V_r$$

刚体的运动 (详见第6页单元表解五)

单元表解 (五)

点的运动: (详见第5页单元表解四)

刚体的
基运
本动

平动

概念: 刚体上任意两点之间的连线在刚体运动中始终保持平行, 包括曲线(空间曲线、平面曲线)平动和直线平动。

特点: 刚体上各点的轨迹相同, 同一瞬时各点的速度、加速度皆相等。因此可作质点运动处理。

概念: 运动时刚体或其扩大部分内有一条固定不动的直线。

特点: 刚体上转轴以外的各点都分别在垂直于转轴的各平面内绕转轴作圆周运动。

转动方程: $\varphi = f(t)$

定轴
转动

描写转动
状态的基本量

转角: φ 为代数量

角位移: $\Delta\varphi$

角速度: $\omega = \frac{d\varphi}{dt} = f'(t)$

转速 n (rad/min), $\omega = \frac{2\pi n}{60}$

角加速度: $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = f''(t)$

$$\vec{a} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}$$

$$\vec{\varepsilon} = \vec{\omega}_e \times \vec{\omega}_r$$

都是代数量

(注意正负的规定) 特例

匀速
转动

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \text{常量}$$

$$\varepsilon = 0$$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t$$

$$\varepsilon = \text{常量}$$

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t$$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \varepsilon t^2$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\varepsilon(\varphi - \varphi_0)$$

匀变
速转动

v 对应 ω , S 对应 φ ,
 a 对应 ε ,

$$v_t = v_0 + at$$

$$S = v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

$$v_t^2 = v_0^2 + 2as$$

与匀变速直线运动
的公式对比记忆

特点: 运动过程中刚体内所有点至某一固定平面的距离始终保持不变, 即刚体内的各点都在平行于该固定平面的某一平面内运动。

运动方程

$$x_{O'} = f_1(t)$$

$$y_{O'} = f_2(t)$$

$$\varphi = f_3(t)$$

处理方法: 可分解为随基点(所选平动坐标系的原点)的平动(牵连运动)和相对于基点的转动(相对运动)。

平动部分与基点选取有关。转动部分与基点选取无关。

刚体的
平运
面动

速度分析

合成法: $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{BA}$ ——刚体作平面运动时, 任一瞬时其上任一点的速度等于基点的速度与该点相对于基点作圆周运动的速度的矢量和。

推论:

→速度投影定理: 刚体作平面运动时其上任意两点的速度在这两点连线上的投影相等。

方法

速度
瞬心法

瞬时中心: 刚体上某瞬时速度为零的那个点称为平面图形在该瞬时的瞬时速度中心。

瞬时中心的确定: 知任意两点的速度方向, 通过这两点作垂直于其速度方向的两条直线, 这两条直线的交点就是速度瞬心。

速度瞬心法: 平面图形内各点的速度的大小与该点至速度瞬心的距离成正比, 方向与该点同速度瞬心的连线相垂直(即平面图形上各点的速度分布情况与图形在该瞬时以角速度 ω 绕速度瞬心 P 转动时一样)

运动学问题主要类型及解题思路

1、首先判断是点的运动(是否是合成运动)还是刚体运动(平动? 转动? 平面运动?)

2、问题主要类型:

①求质点的运动方程: 关键是找动点的几何关系。

②已知质点的运动方程求轨道、速度、加速度: 可从运动方程中消去时间 t 即得轨道方程, 运动方程中, x, y 对时间 t 一次求导、二次求导即可得速度、加速度

③已知速度、加速度的表达式求运动方程: 可进行积分, 积分常数由初始条件定。

④点的合成运动:

确定动点、动系、静系、绝对运动、相对运动, 牵连运动; 确定绝对速度、相对速度、牵连速度并画出其矢量图; 确定绝对加速度、相对加速度、牵连加速度并画出其矢量图; 判断牵连运动是平动还是转动应用速度合成定理或加速度合成定理列方程求解。

⑤已知刚体的转动规律 $\varphi = \varphi(t)$ 求

ω, ε : φ 对 t 一次求导、二次求导即得 ω, ε 。

⑥已知 ω, ε 求 φ :

可进行积分, 并根据初始条件确定积分常数。

⑦刚体的平面运动:

分解为随基点的平动(牵连运动)和相对基点的转动。

运动学

刚体的
运
动

单元表解 (六)

任务: 研究物体运动状态的变化与作用于物体上的力之间的关系。

模型: 质点、质点系。

动

力

学

研究
方法

运用动力学基本方程处理

三个基本定律: 牛顿第一、二、三定律

质点运动微分方程

方程式: $m \ddot{\gamma} = \Sigma \vec{F}$ (外力)

分量式

直角坐标

$$\begin{cases} m \ddot{x} = \Sigma X \\ m \ddot{y} = \Sigma Y \\ m \ddot{z} = \Sigma Z \end{cases}$$

自然坐标

$$\begin{cases} m a_t = m \dot{S} = \Sigma F_t \\ m a_n = \frac{m \dot{S}^2}{\rho} = \Sigma F_n \end{cases}$$

动力学的两类问题及其解法
力学单位制:

是力学现象普遍规律的反映, 它们都可由动力学基本方程推导出来

运用普遍定理处理:

惯性力概念

定义: 当质点受力的作用而改变其原来的运动状态时, 由于质点的惯性产生对外界反抗的反作用力, 称为质点的惯性力。

大小: 等于质点的质量与加速度的乘积。

方向: 与加速度方向相反, 作用在迫使质点改变运动状态的施力物体上。

$$\vec{G} = -m\vec{a}$$

质点系的达朗贝尔原理

$$\Sigma \vec{F}_i + \Sigma \vec{N}_i + \Sigma \vec{G}_i = 0$$

$$\Sigma m_i (\vec{F}_i) + \Sigma m_i (\vec{N}_i) + \Sigma m_i (\vec{G}_i) = 0$$

即当一非自由质点系运动时, 作用于该质点系的主动动力系、约束反力系与质点系的惯性力系在形式上组成一平衡力系。

特例

质点的达朗贝尔原理 $\vec{F} + \vec{N} + \vec{G} = 0$

当非自由质点运动时, 作用于质点的主动动力 $\vec{F}$, 约束反力 $\vec{N}$ 与质点的惯性力 $\vec{G}$ 在形式上组成一平衡力系。

转化为静力学问题处理→达朗贝尔原理(动静法)

刚体运动时惯性力系的简化

惯性力的主矢:

$$\vec{G} = -M\vec{a}_c$$

即无论刚体作何种运动, 惯性力系的主矢都等于刚体的质量与其质心加速度的乘积, 方向与质心加速度方向相反。

惯性力系的简化结果

平动刚体:

$$\vec{G} = -M\vec{a}_c = -M\vec{a}$$

即平动刚体惯性力系可合成为一个通过质心的合力 $\vec{G}$, 其大小等于刚体的质量与加速度的乘积, 方向与加速度相反。

定轴转动刚体

$$\begin{cases} \text{主矢 } \vec{G} = -M\vec{a}_c \\ \text{主矩 } M_{G0} = -J_z \epsilon \end{cases}$$

即具有垂直于转轴的质量对称面的转动刚体的惯性力系向 O 点 (即轴心) 简化的结果为一个主矢与一个主矩。主矢的大小等于刚体的质量与质心加速度的乘积, 方向与质心加速度相反, 主矩的大小等于刚体对转轴的转动惯量与角加速度的乘积, 转向与角加速度相反。

平面运动刚体

$$\begin{cases} \text{主矢 } \vec{G} = -M\vec{a}_c \\ \text{主矩 } M_{Gc} = -J_c \epsilon \end{cases}$$

即具有质量对称平面且平行于此平面运动的刚体, 惯性力系向其质心简化的结果为一主矢和主矩, 主矢的大小等于刚体的质量与其质心加速度的乘积, 方向与质心加速度相反。主矩的大小等于刚体对于通过质心并垂直于运动平面的轴的转动惯量与刚体的角加速度的乘积, 转向与角加速度相反。

第一类问题: 已知质点的运动方程(或速度函数), 求作用于质点的力。

解法: 将运动方程 (或速度函数) 对时间求导得加速度 a ,

再将 a 代入微分方程求力。

第二类问题: 已知作用于质点上的力, 求质点的运动规律。

解法: 将已知力代入运动微分方程, 经积分求得质点的运动规律, 积分常数由初始条件定。

→ (详见第 8~10 页单元表解七~九)

投影形式

直角坐标

$$\begin{cases} F_x + N_x + G_x = 0 & G_x = -ma_x \\ F_y + N_y + G_y = 0 & G_y = -ma_y \\ F_z + N_z + G_z = 0 & G_z = -ma_z \end{cases}$$

自然坐标

$$\begin{cases} F_t + N_t + G_t = 0 & G_t = -ma_t = -m \frac{dv}{dt} \\ F_n + N_n + G_n = 0 & G_n = -ma_n = -m \frac{v^2}{\rho} \\ F_b + N_b = 0 \end{cases}$$

单元表解 (七)

运动力学普遍定理研究

动量定理

[可由动力学基本方程推出]

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \sum \vec{F}$$

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \sum \vec{F}$$

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \sum \vec{F} \cdot dt$$

$$\sum \vec{F} \cdot dt$$

它反映了质点系或质点动量的改变与作用力的冲量之间的关系

动量矩定理

(详见第9页单元表解八)

功能原理
(详见第10页单元表解九)

动量 (矢量)

质点的动量: $m\vec{v}$ 是矢量——质点的质量与其速度的乘积。

质点系的动量: 定义: $\vec{K} = \sum m_k \vec{v}_k$ ——质点系内所有质点的动量的矢量和。

计算式: $\vec{K} = m\vec{v}_c$ ——质点系的动量等于整个质点系的质量与质心速度的乘积, 方向与质心速度同。

单位: $\text{Kg} \cdot \text{m} / \text{S}$

——特例: 质点系内各质点速度相同, 则 $\vec{K} = m\vec{v}$ 。

力的冲量 (矢量)

定义: 作用于物体上的力与其作用时间的乘积, 谓之。

常力的冲量: $\vec{S} = \vec{F} \cdot t$

变力的冲量: $\vec{S} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot dt$

合力的冲量: $\vec{S} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{R} \cdot dt = \sum \vec{S}_k$

投影式

$$S_x = \int_{t_1}^{t_2} X dt$$

$$S_y = \int_{t_1}^{t_2} Y dt$$

$$S_z = \int_{t_1}^{t_2} Z dt$$

单位: $\text{Kg} \cdot \text{m} / \text{S}$

——即合力的冲量等于各分力冲量的矢量和。

定义: 质点系的质量中心, 它反映了质点系质量的分布情况 (与其所受外力无关), 在地球表面附近, 质心与重心重合。

质心

矢量表达式: $\vec{r}_c = \frac{\sum m_k \vec{r}_k}{M}$

坐标表达式

$$x_c = \frac{\sum m_k x_k}{M}$$

$$y_c = \frac{\sum m_k y_k}{M}$$

$$z_c = \frac{\sum m_k z_k}{M}$$

动量定理

矢量式: $M\vec{a}_c = M \cdot \frac{d^2 \vec{r}_c}{dt^2} = \sum \vec{F}$

$$Ma_{cx} = \sum X$$

$$Ma_{cy} = \sum Y$$

$$Ma_{cz} = \sum Z$$

质点系的质量与质心加速度 (在 X、y、z 轴上的投影) 的乘积, 等于

作用于质点系的所有外力 (在 X、y、z 轴上的投影) 的矢量和 (代数和)。

与质点动力学基本方程 $m\vec{a} = \sum \vec{F}$ 形式相同。

质心

运动定理

特例: 若 $\sum \vec{F} = 0$ 则 $\vec{a}_c = 0, \vec{v}_c = \text{常矢量}$ 。即作用于质点系上的所有外力的主矢恒为零, 则质心作惯性运动。

若 $\sum X = 0$ 则 $a_{cx} = 0, v_{cx} = \text{常量}$, 即作用于质点系的所有外力的主矢在某一轴上的投影恒为零, 则质心在该轴方向作惯性运动。

$\vec{N}'' = \rho Q (\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$ 流体动反力是流体动量变化 (包括速度大小及方向的变化) 所引起的管壁的附加反力。

应用: 流体在管道内流动时产生的动压力

$$\text{投影式: } \begin{cases} N''_x = \rho Q (v_{2x} - v_{1x}) \\ N''_y = \rho Q (v_{2y} - v_{1y}) \end{cases}$$

质点系的动量定理

微分形式

$d\vec{K} = \sum (\vec{F} \cdot dt)$ 质点系动量的微分等于所有外力之冲量的矢量和。

$\frac{d\vec{K}}{dt} = \sum \vec{F}$ 质点系的动量对时间的导数等于作用于质点系上所有外力的矢量和 (主矢)。

特例 → 若 $\sum \vec{F} = 0$ 则 $\vec{K} = \text{常矢量}$ ——即质点系动量守恒 (作用于质点系所有外力的主矢恒为零, 则该质点系的动量保持不变)。

积分形式

$$\vec{K}_2 - \vec{K}_1 = \sum \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \cdot dt = \sum \vec{S}$$

质点系的动量在一有限时间间隔内的改变, 等于作用在质点系所有外力在同一时间间隔内冲量的矢量和。

投影式

$\begin{cases} K_{2x} - K_{1x} = \sum S_x \\ K_{2y} - K_{1y} = \sum S_y \\ K_{2z} - K_{1z} = \sum S_z \end{cases}$ 在某一有限时间间隔内, 质点系的动量在某一坐标轴上投影的改变, 等于作用在该质点系上所有外力在同一时间间隔内的冲量在同一轴上投影的代数和。

特例 → 若 $\sum F_x = 0$ 则 $K_{2x} = K_{1x} = 0$

即作用于质点系上的所有外力在某坐标轴上的投影的代数和恒为零, 则该质点系的动量在同一轴上的投影保持不变。

质点动量定理: 与上述各式类似, $\vec{K}$ 、 $\vec{F}$ 、 $\vec{S}$ 分别代表质点的动量, 所受之力、冲量。

单元表解 (八)

用普遍定理研究动力学问题 (2)

动量定理 (详见第8页单元表解七)

动量矩定理 [可由动力学基本方程推出:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$$

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{F}$$

两边用质点的矢径作矢乘

$$\vec{r} \times \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\frac{d(\vec{r} \times m\vec{v})}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\text{即 } \frac{d\vec{h}_0}{dt} = \vec{M}_0$$

它反映了质点或质点系的动量对某固定点 (或某固定轴) 的矩的变化与作用在该质点或质点系上的力系对同一点 (或轴) 的主矩之间的关系。]

功能原理 (详见第10页单元表解九)

概念

质点系的动量矩

$\vec{H}_0 = \sum \vec{h}_{0k} = \sum \vec{M}_0 (m_k \vec{v}_k)$ 即质点系各质点的动量对于某固定点O (或已知轴) 的矩的矢量和 (或代数和) 称为质点系对固定点O (或对该轴) 的动量矩。

$$\text{投影式} \begin{cases} H_x = \sum h_x = \sum M_x (m_k \vec{v}_k) \\ H_y = \sum h_y = \sum M_y (m_k \vec{v}_k) \\ H_z = \sum h_z = \sum M_z (m_k \vec{v}_k) \end{cases}$$

特例 ① $H_z = J_z \omega$ —— 即定轴转动刚体对于转轴的动量矩等于刚体对该轴的转动惯量与角速度的乘积。

② 质点的动量矩: $\vec{h}_0 = \vec{M}_0 (m\vec{v}) = \vec{r} \times m\vec{v}$

大小: 等于 $|\vec{mv}| d$, d 为矩心O到动量 $m\vec{v}$ 矢线的垂直距离。

指向: 是定位矢量, 应画在矩心O上, 方向按右手法则定。

单位: $\text{Kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$

转动惯量 (正标量)

$J_z = \sum m_k r_k^2$ (或 $J_z = \int_M r^2 dm$) 质点对某z轴的转动惯量就是刚体内各质点的质量与该点到z轴距离平方的乘积的总和。它是刚体转动惯性的量度, 是个正标量。单位为 $\text{Kg} \cdot \text{m}^2$ 。

$J_z = M \rho_z^2$ ρ_z 为回转半径, 意义是: 设想刚体的质量集中在与z轴相距为 ρ_z 的点上, 则此集中质量对z轴的转动惯量与原刚体的转动惯量相同。

$J_{z'} = J_z + Md^2$ —— 平行移轴定理: 刚体对任一 z' 轴的转动惯量等于刚体对平行于 z' 轴的质心轴的转动惯量加上刚体质量与两轴间距离平方的乘积。

质点系 (或质点) 动量矩定理

矢量形式 (对固定点的) $\frac{d\vec{H}_0}{dt} = \vec{M}_0$ 质点系 (或质点) 对任一固定点的动量矩对时间的导数等于质点系 (或质点) 所受外力对同一点的矩的矢量和。

投影式 (对固定轴的) $\begin{cases} \frac{dH_x}{dt} = M_x \\ \frac{dH_y}{dt} = M_y \\ \frac{dH_z}{dt} = M_z \end{cases}$ 质点系 (或质点) 对任一固定轴的动量矩对时间的导数等于质点系 (或质点) 所受外力对同一轴的矩的代数和。

推论

质点系的动量矩守恒定律

$\begin{cases} \text{当 } \vec{M}_0 = 0 \text{ 时} & \text{则 } \vec{H}_0 = \text{常矢量} \\ \text{当 } M_z = 0 \text{ 时} & \text{则 } H_z = \text{常量} \end{cases}$

即质点系所受外力对固定点O (或固定轴z) 的主矩 $\vec{M}_0$ (M_z) 始终为零, 则质点系对O点 (或对z轴) 的动量矩 $\vec{H}_0$ (或 H_z) 为常矢量 (或常量)。

刚体绕定轴转动的微分方程: $J_z \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = M_z$ (或 $J_z \cdot \varepsilon = M_z$) 可与质点作直线运动的微分方程 $m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} = \sum \vec{F}_x$

对比理解记忆。

动力学问题解题思路

肯定是动力学问题之后, 然后考虑运用动力学基本方程求解, 或者运用三个普遍定理之一求解; 或者运用动静法求解。并注意与运动学有关公式结合, 有时同一问题还可用多个定理求解。

运用动量矩定理解题思路

- 1、确定研究对象。
- 2、分析系统所受之外力。
- 3、画出受力图, 如果系统为非自由的, 可解除其上之约束, 同时引入反作用力。
- 4、选取固定的坐标系。
- 5、计算全部外力对矩心的主矩 $\vec{M}_0$ 或对轴的主矩 M_x 、 M_y 、 M_z 。
- 6、计算系统对矩心O点 (或转轴) 的动量矩。
- 7、列方程:

① 对固定点或对质心的动量矩定理

$$\frac{d\vec{H}_0}{dt} = \vec{M}_0$$

② 对固定轴的动量矩定理 $\frac{dH_z}{dt} = M_z$

③ 刚体作定轴转动可列: $J_z \cdot \varepsilon = M_z$

④ 刚体平面运动 $\begin{cases} ma_{cx} = \sum F_x \\ ma_{cy} = \sum F_y \\ J_{cz} \cdot \varepsilon = M_z \end{cases}$

列上述方程求解时注意角量与线量之间的关系。

8、解方程: 求未知量, 积分常数由初始条件定。如果 $\vec{M}_0 = 0$ 或 $M_x = 0$ 或可利用动量矩守恒定律求解。

单元解 (九)

运用普遍定理研究动力学问题 (3)

动量定理 (详见第8页单元表解七)

动量矩定理 (详见第9页单元表解八)

功能原理 [质点的功能原理可由动力学基本方程推出:

$$\begin{aligned} m \frac{d\vec{v}}{dt} &= \vec{F}, \\ \frac{d}{dt}(m\vec{v}) &= \vec{F} \\ \text{两边点乘 } d\vec{r}, \\ d\vec{r} &= \vec{v} \cdot dt, \\ \frac{d}{dt}(m\vec{v}) \cdot \vec{v} \cdot dt &= \vec{F} \cdot d\vec{r}, \\ \frac{m}{2} d(\vec{v} \cdot \vec{v}) &= \delta W \\ d(\frac{1}{2}mv^2) &= \delta W \end{aligned}$$

基本概念

基本定理

功 (代数量)

物理意义: 表示力在一段路程上对物体作用的累积效应。

计算

$$\begin{aligned} \text{① 常力在直线运动中的功: } W &= \vec{F} \cdot \vec{S} = F \cdot S \cdot \cos(\vec{F}, \vec{v}) \cdot s \\ \text{② 变力在曲线运动中的功} & \quad \uparrow \text{特例} \\ \text{元功: } \delta w &= \vec{F} \cdot d\vec{r} = F \cdot \cos(\vec{F}, \vec{v}) \cdot ds, \text{ 解析式 } \delta w = xdx + ydy + zdz \\ \text{总功: 积分 } W &= \int_{M_1}^{M_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{M_1}^{M_2} F_c \cdot ds \\ \text{③ 合力的功: } W_R &= \sum W_F \quad \text{合力的功等于各分力的功的代数和} \\ \text{④ 几种常见力的功} & \end{aligned}$$

- ① 重力的功: $W = mg(Z_{c1} - Z_{c2})$ 重力的功等于质点系的重量与其重心在始末位置的高度之差的乘积, 重心降低时为正, 重心升高时为负。
- ② 弹力的功: $W = \frac{1}{2}k(\delta_1^2 - \delta_2^2)$ 弹力的功等于弹簧的刚度与其在始末位置上变形的平方之差的乘积的一半。
- ③ 作用于转动刚体上的力的功: $W = \int_0^\varphi M_z(\vec{F}) d\varphi$ 即等于该力对转动轴的矩对刚体转角的积分。

动能

(正标量)

物理意义: 质点的质量与质点运动速度平方的乘积 $\frac{1}{2}mv^2$ 称为质点的动能, 是正标量, 单位 $1J = 1N \cdot m$ 。
定义: 质点系某瞬时的动能等于该系内各质点动能之和 (算术和) $T = \sum \frac{1}{2}M_k v_k^2$

质点系的动能

柯尼希定理: $T = \frac{1}{2}MV_c^2 + \frac{1}{2}\sum M_k r_k^2 \omega^2$

质点系在绝对运动中动能等于它随质心平动的动能与相对于质心运动的动能之和

特例

- ① 若 $\frac{1}{2}\sum M_k v_k^2 = 0$ 则 $T = \frac{1}{2}MV_c^2$ 一即刚体平动动能
- ② 若 $\frac{1}{2}MV_c^2 = 0$ 则 $T = \frac{1}{2}\sum M_k (r_k \omega)^2 = \frac{1}{2}J_z \omega^2$ 一即刚体绕固定轴转动的动能
- ③ 若 $T = \frac{1}{2}MV_c^2 + \frac{1}{2}J_z \omega^2$ 一即刚体平面运动的动能

势能

势力场: 若某力场作用力的功与质点所经过的路径无关, 仅与其起点与终点位置有关, 该力场称为势力场。

有势力: 势力场中, 场作用于质点的力谓之有势力如重力、弹力等。

势能: 质点由某一位置运动到给定的零位置 $M_0 (x_0, y_0, z_0)$ 过程中, 有势力所作的功为质点在该位置所具有的势能, 其量值是通过功E计算。

$$V = W_{M \rightarrow M_0} = U(x_0, y_0, z_0) - U(x, y, z) \quad U \text{ 为力函数或势函数。}$$

功率

平均功率: $\bar{N} = \frac{\Delta W}{\Delta t}$

瞬时功率: $N = \vec{F} \cdot \vec{v} = F_t \cdot v$ 或 $N = \frac{\delta W}{dt} = M \omega$ (功通过力矩或力偶矩计算, 并由 $dW = M \cdot d\phi$ 得) 单位: $1W = 1J/s = 1N \cdot m/s$

$$1 \text{ 公制马力 (ps)} = 735.5 (W) = 0.7355 (kW)$$

功率方程: $\frac{dT}{dt} = \sum N_A + \sum N_n$ 或 $\frac{dT}{dt} = \sum N^{(e)} + \sum N^{(i)}$ 即质点系的动能对时间的导数等于作用于质点系的主动力与约束力 (或外力与内力) 的功率的代数和。

机械效率: $\mu = \frac{N_1}{N_0} = \frac{\text{有用功率}}{\text{输入功率}}$

质点系动能定理

微分形式: $dT = \sum \delta w_k^{(e)} + \sum \delta w_k^{(i)}$ 质点系动能的微分等于作用于该质点系的全部外力与内力的元功之总和。

特例

积分形式: $T_2 - T_1 = \sum W^{(e)} + \sum W^{(i)}$ 某过程中, 质点系动能的改变等于作用在质点系上全部外力与内力在该过程中所作功之总和。

质点的动能定理

$$\begin{aligned} d(\frac{1}{2}mv^2) &= \delta W \\ \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 &= W \end{aligned}$$

机械能守恒定律: $E = T + V = \text{常量}$, 即在势力场中质点 (系) 某位置时的动能与势能 (外力势能与内力势能) 之和保持不变。

山东济宁地区教育局印刷厂印

(内部发行)