高教版考试用书
www.eduexam.com.cn

2013

考研数学复习教程

（概率论与数理统计分册）

主编　王　莉

凭书后增值服务卡
享超值服务

- 公共课在线测试题
- 名师答疑服务
- 在线课程试听
- 优惠订手机报及课程
- 最新权威图书资讯

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高教版考试用书
www.eduexam.com.cn

考研数学复习教程

2013

(概率论与数理统计分册)

● 主编 王 莉

KAOYAN SHUXUE
FUXI JIAOCHENG (GAILÜLUN YU SHULI TONGJI FENCE)

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容提要

本书包括以下部分：

一、考核内容要点——本部分对《数学考试大纲》所要求的内容进行了全面、透彻的讲解，注重对基本概念、基本理论和基本方法的解读。

二、补充公式与结论——本部分对一般教材中没有的、但对知识理解和解题有益的公式和结论进行了较为全面的补充，并对难于理解的公式和结论给出了证明或举例说明。

三、典型问题与方法技巧——本部分是本书的精华也是本书最大的特色：在对历年试题研读的基础上，详细归纳总结了每部分考过的以及可能考到的各类问题，抛开其表面形式，剖析出其本质特征，给出了每类问题的快捷有效的处理方法，并注重每类问题的各种变式，使读者能够见到题目就知从哪入手，并快速准确求解。

四、强化训练——本部分试题的难易程度十分贴近考研真题，有的略高于真题，而且考查的知识点尽量不重复，望读者完成。

本书适用于考研数学的各个卷种，包括数学一、数学二、数学三以及农学门类联考数学等，其内容上的差异，书中有详细标注，请读者阅读时注意。

图书在版编目（CIP）数据

考研数学复习教程. 概率论与数理统计分册 / 王莉主编. -- 北京 : 高等教育出版社, 2012.7
ISBN 978-7-04-035448-5

Ⅰ. ①考… Ⅱ. ①王… Ⅲ. ①概率论－研究生－入学考试－自学参考资料②数理统计－研究生－入学考试－自学参考资料 Ⅳ. ①O13②O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第147572号

策划编辑 刘 佳　　责任编辑 雷旭波 张耀明　　封面设计 王 洋
版式设计 范晓红　　责任校对 殷 然　　责任印制 韩 刚

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印 刷 北京市四季青双青印刷厂
开 本 787mm×1092mm 1/16
印 张 7.5
字 数 170千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网 址 http://www.hep.edu.cn
http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.landraco.com
http://www.landraco.com.cn
版 次 2012年7月第1版
印 次 2012年7月第1次印刷
定 价 15.00元

物 料 号 35448-00

前　言

为了帮助有志于报考硕士学位研究生的广大同学全面、系统、深入、高效地复习数学课程，提高考研应试能力，并为今后研究生学业奠定坚实的数学基础，作者根据教育部考试中心最新颁布的《数学考试大纲》，结合作者多年在全国各地辅导班的授课经验，以作者的考研辅导讲义为蓝本，切实考虑到考研学子的不同需求，编写了**《考研数学复习教程》（包括高等数学、线性代数、概率论与数理统计等分册）**、**《考研数学基础过关 500 题》**、**《考研数学大纲配套 1000 题》**、**《考研数学 10 年真题解析》**以及**《考研数学全真模拟 10 套卷》**等系列丛书。其中**《考研数学基础过关 50000 题》**适宜于复习前期配合教材使用——夯实基础；**《考研数学复习教程》**与**《考研数学大纲配套 1000 题》**适宜于复习中期攻坚阶段使用——强化解题定式训练，培养解题能力；**《考研数学 10 年真题解析》**与**《考研数学全真模拟 10 套卷》**适宜于后期使用——模拟演练、巩固提高。考生可根据自己的具体情况选用。

本书**《考研数学复习教程（概率论与数理统计分册）》**的结构及特点如下：

一、考核内容要点——本部分对《数学考试大纲》所要求的内容进行了全面、透彻的讲解，不是"定义"、"定理"的简单罗列，注重对基本概念、基本理论和基本方法的解读。在体系上也不同于一般教材，注重各部分内容的有机联系，普遍采用表格将相近的内容列在一起，便于读者类比把握。

二、补充公式与结论——本部分对一般教材中没有的、但对知识理解和解题有益的公式和结论进行了较为全面的补充，并对难于理解的公式和结论给出了证明或举例说明。

三、典型问题与方法技巧——本部分是本书的精华也是本书最大的特色：在对历年试题研读的基础上，详细归纳总结了每部分考过的以及可能考到的各类问题，抛开其表面形式，剖析出其本质特征，给出了每类问题的快捷有效的处理方法，并注重每类问题的各种变式，使读者能够见到题目就知从哪入手，并快速准确求解。

四、强化训练——本部分按照考研试卷"选择题"、"填空题"、"解答题"的题型顺序精选编排了适量的经典习题，其中一部分是作者亲自命制的。这些题目几乎涵盖了考研数学所涉及的所有问题，难易程度十分贴近考研真题，有的略高于真题，而且考查的知识点尽量不重复，望读者完成。

本书适用于考研数学的各个卷种，包括数学一、数学二、数学三以及农学门类联考数学等，其内容上的差异，书中有详细标注，请读者阅读时注意。

在编写本书过程中，作者参考了许多教材和有关著作，引用了其中的一些例子，恕不一一列出，在此谨向有关作者致谢。另外，吴振奎先生百忙之中审阅了书稿，刘舒强先生也提出了一些建设性意见，在此一并致谢！

鉴于作者水平有限，书中疏漏之处在所难免，恳请同行专家和读者批评指正。

作者

2012 年 6 月 30 日于北京

阅读手记

数学不仅在各级教育中举足轻重，它也是各类统考中主要科目之一。

考研数学问题有其自身特点，它与通常在校学习数学时所遇的问题不尽相同，乍看熟悉但又陌生，这些问题往往是概括、总结、凝练了数学的精华，巧妙而不繁琐，深刻而不艰涩，处处蕴含凝聚着拟题专家的劳动和汗水。

倘若没有扎实的数学功底，没有经过恰当的训练，往往较难应付——有些题目你会觉得无从下手（正如数学竞赛，即便是小学竞赛问题，往往也会难住不少“大家”）。由此看来，参加考前训练是必须的，也是重要的。

现实告诉人们：老一辈考研专家已渐失魅力，这也是自然规律，历史的必然。当然这也是希望与未来所在，人们也期待新人的出现与成才。

王莉教授是全国年轻的数学考研辅导的希望，也是领军人物之一，颇受考研学子的爱戴。他的讲课更有特点：首先适应潮流，与考研试题更贴近，与年轻人鲜有“代沟”；再者是思路清晰、讲解细微、推理流畅，做到有分析、有过程、有总结、有练习。

本书正是他多年授课经验的积累与汇聚，也是他呕心沥血之所创、匠心立意之所在。

不同风格、不同思路、不同写法考研辅导书籍的出版，无疑给考研学子提供了更多的选择。

与传统“大家”的此类书籍不同，他的书中无哗众取宠的章节，例题乃至字句、内容更为贴近当下学生的水平，又不拘于此，读起来亲切、生动、易懂。更不似某些考研书十几年不修，始终一副老面孔。

本书的出版为考研图书市场吹来一股暖暖的春风，对广大考研学子来讲实乃一大幸事。

吴振奎
2012年3月于天津

郑重声明

目录

第一章 随机事件与概率

一、考核内容要点

1. 随机试验与随机事件的基本概念

随机试验	具有以下三个特征的试验称为随机试验: (1) 在相同的条件下,试验可重复进行; (2) 试验的结果不只一个,但事先可确知所有可能的结果; (3) 每次试验仅有一个结果出现,但试验前不能确定会出现哪一个结果. 随机试验一般用字母 E 或 $E_1,E_2,\cdots$ 表示.
基本事件与样本空间	随机试验中每一个基本的可能结果称为基本事件或样本点,记为 ω. 所有基本事件的全体称为基本事件空间或样本空间,记为 Ω,即 $\Omega=\{\omega\}$. 根据样本点的特点,样本空间可分为有限样本空间、无限可列样本空间、无限不可列样本空间三种类型.
随机事件	随机试验中样本空间 Ω 的子集称为随机事件,简称事件,一般用 $A,B,C,\cdots$ 表示. 随机事件 A 发生当且仅当这一子集中的一个样本点出现. 通常把必然事件(含所有样本点,记为 Ω)和不可能事件(不含样本点,记为 $\varnothing$)作为两个特殊的随机事件.
完备事件组	样本空间 Ω 的一个划分 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 称为一个完备事件组,若其满足: $B_iB_j=\varnothing\ (i\neq j)$; $\bigcup\limits_{i=1}^{n}B_i=\Omega$.

2. 事件间的关系和运算

关系或运算	含 义	运 算 律
包含 $A\subset B$	事件 A 发生必导致事件 B 发生.	交换律: $A\cup B=B\cup A$; $A\cap B=B\cap A$. 结合律: $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$; $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$. 分配律: $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$; $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$. 德·摩根律: $\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$; $\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$.
相等 $A=B$	事件 A,B 同时发生或同时不发生.	
互不相容(互斥) $AB=\varnothing$	事件 A 与 B 不能同时发生. 基本事件是两两互斥的.	
互逆(对立) $AB=\varnothing$,且 $A\cup B=\Omega$	事件 A,B 必有一个发生,且仅有一个发生.	
和事件 $A\cup B\ (A+B)$	事件 A 与事件 B 至少有一个发生.	
积事件 $A\cap B\ (AB)$	事件 A 与事件 B 同时发生.	
差事件 $A-B\ (A\bar{B})$	事件 A 发生而事件 B 不发生.	

注 1) 和事件与积事件可推广到有限多个或可列多个情形,如 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$,$\bigcap\limits_{j=1}^{\infty}B_j$ 等,其含义不变.

2) 事件的运算顺序一般是:先逆后积,再和差.

3) 有包含关系的事件的和事件,"谁大要谁";有包含关系的事件的积事件,"谁小要谁".

4) 讨论事件的关系时,常借助文氏图,既直观又简便.

例 1.1 设 A,B 是两个随机事件,且满足 $AB=\bar{A}\bar{B}$,则 $A+B=$ ________.

解 因 $A+B$ 与 $\overline{A+B}$ 互不相容,而由德·摩根律知 $\overline{A+B}=\bar{A}\bar{B}$,故 $A+B$ 与 $\bar{A}\bar{B}$ 互不相容. 又由于 $AB\subset A+B$,

所以有 AB 与 $\overline{A}\,\overline{B}$ 互不相容，而 $AB = \overline{A}\,\overline{B}$，故有 $AB = \overline{A}\,\overline{B} = \varnothing$，因此 $A + B = \Omega$，即 A 与 B 是对立事件.

3. 随机事件的概率及其性质

(1) 概率的定义

定义 1.1 设 E 是随机试验，Ω 是它的样本空间. 对于 E 的每一事件 A 赋予一个实数 $P(A)$，若满足：

1° 非负性：$P(A) \geqslant 0$；

2° 规范性：$P(\Omega) = 1$；

3° 可列可加性：设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 互不相容，那么

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i),$$

则称 $P(A)$ 是事件 A 的概率.

(2) 概率的性质

有界性	$0 \leqslant P(A) \leqslant 1$. 特别地，$P(\varnothing) = 0, P(\Omega) = 1$. 注意，由 $P(A) = 0$ 不能推得 $A = \varnothing$. 同样，由 $P(A) = 1$ 也不能推得 $A = \Omega$
求逆公式	$P(\overline{A}) = 1 - P(A), \quad P(A) + P(\overline{A}) = 1.$
单调性	若 $A \subset B$，则 $P(A) \leqslant P(B)$.
有限可加性	若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是两两互不相容事件，则 $P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.
加法公式	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$, $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$.
减法公式	$P(A - B) = P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB)$. 特别地，当 $B \subset A$ 时，$P(A - B) = P(A) - P(B)$.

(3) 条件概率及乘法公式

定义 1.2 设 A, B 是两个事件，且 $P(A) > 0$，称

$$P(B \mid A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

为在事件 A 发生的条件下事件 B 发生的概率.

定理 1.1（乘法公式） 设 $P(A) > 0$，则

$$P(AB) = P(A)P(B \mid A).$$

注意，条件概率仍满足概率的性质. 例如：

$$P(\overline{B} \mid A) = 1 - P(B \mid A), \quad P((B - C) \mid A) = P(B \mid A) - P(BC \mid A),$$
$$P((B_1 \cup B_2) \mid A) = P(B_1 \mid A) + P(B_2 \mid A) - P(B_1B_2 \mid A)，等等.$$

(4) 事件的独立性

定义 1.3 若事件 A, B 满足 $P(AB) = P(A)P(B)$，则称事件 A 与 B 相互独立.

如果事件组 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 满足对任意两个事件 A_i, A_j 有 $P(A_iA_j) = P(A_i)P(A_j) \quad (i \neq j, i, j = 1, 2, \cdots, n)$，则称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两独立.

对于事件组 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，如果对任意 $k\ (1 < k \leqslant n)$，$1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n$，有 $P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k})$，则称事件组 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立.

例如，事件 A, B, C 相互独立的充分必要条件是 A, B, C 两两独立，且 $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$.

注 n 个事件相互独立必两两独立，但反之不然.

定理 1.2 事件 A 与 B，A 与 $\overline{B}$，$\overline{A}$ 与 B，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 中，若有一对相互独立，则其他三对也相互独立. 一般地，若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 相互独立，则 $f(A_1, A_2, \cdots, A_k)$ 与 $g(A_{k+1}, A_{k+2}, \cdots, A_n)$ 也相互独立，其中 f, g 表示事件的运算符号.

例 1.2 设事件 A, B, C 相互独立，且 $0 < P(C) < 1$，则下列给出的四对事件中不独立的是

(A) $\overline{A + B}$ 与 C. (B) $\overline{AC}$ 与 $\overline{C}$.

(C) $\overline{A - B}$ 与 $\overline{C}$. (D) $\overline{AB}$ 与 C.

解 由A,B,C相互独立可知,事件A,B的和、差、积及其逆等事件与事件C或$\overline{C}$必相互独立,因此选项(A)、(C)、(D)均被排除,应选(B).

事实上,对于选项(A),由

$$\begin{aligned}P(\overline{A+B}\,C) &= P(\overline{A}\,\overline{B}C) = P(\overline{A})P(\overline{B})P(C)\\ &= P(\overline{A}\,\overline{B})P(C) = P(\overline{A+B})P(C)\end{aligned}$$

可知,事件$\overline{A+B}$与C相互独立.

对于选项(C),由

$$\begin{aligned}P((A-B)C) &= P(A\overline{B}C) = P(A)P(\overline{B})P(C)\\ &= P(A\overline{B})P(C) = P(A-B)P(C)\end{aligned}$$

可知,事件$A-B$与C相互独立,从而$\overline{A-B}$与C也相互独立.

类似地可证明(D)中的$\overline{AB}$与$\overline{C}$相互独立,(B)中的$\overline{AC}$与$\overline{C}$不独立,请读者练习.

4. 基本概型及其概率计算

概型	随机试验特征	概率计算公式
古典概型	(1) 基本事件等可能; (2) 样本空间有限.	$P(A)=\dfrac{A\text{中基本事件数}}{\Omega\text{中基本事件总数}}$.
几何概型	(1) 基本事件等可能; (2) 样本空间无限.	$P(A)=\dfrac{A\text{的度量(长度,面积,体积)}}{\Omega\text{的度量(长度,面积,体积)}}$.
全概模型	试验分两次进行,第一次所有可能结果$B_1,B_2,\cdots,B_n$为完备事件组,A为第二次试验后的某随机事件.	全概率公式: $P(A)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(AB_i)=\sum\limits_{i=1}^{n}P(B_i)P(A\mid B_i)$. 贝叶斯公式(逆概率公式): $P(B_i\mid A)=\dfrac{P(AB_i)}{P(A)}=\dfrac{P(B_i)P(A\mid B_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(B_i)P(A\mid B_i)}$.
伯努利概型	n次独立重复试验,且每次试验只有两个可能结果:A和$\overline{A}$,$P(A)=p$不变.	n次试验中A恰好发生k次的概率为: $B_k(n,p)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k},k=0,1,\cdots,n$.

例 1.3 随机取一个非负整数,则此数平方的个位数是 1 的概率为______.

解 随机取一个非负整数,其样本空间包含无穷多个样本点,但不是连续的.由于几何概型的样本空间一般是连续的点集(某个区间或平面某块区域等),所以该随机试验不是几何概型.

由于所求概率只涉及该数的个位数,所以随机取一个非负整数,若只从个位数考虑,则仅含$0,1,2,\cdots,9$共10种情况,且可看成是等可能的,因此从这个角度可看成古典概型.又$0,1,2,\cdots,9$中,$1^2=1,9^2=81$,平方后个位数为1的只有两种情况,因此所求概率$p=\dfrac{2}{10}=\dfrac{1}{5}$.

例 1.4 随机向矩形区域$D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant 1\}$内投掷一个点$P$,设点$P$落入$D$内的任一位置是等可能的,求点$P$与原点的连线和$x$轴正向夹角小于$\dfrac{\pi}{4}$的概率.

解 由题设可知,本题的随机试验是几何概型.记A="点P与原点的连线和x轴正向夹角小于$\dfrac{\pi}{4}$",则A对应D中的区域S_A为其中的阴影部分,如图 1-1 所示,所以

$$P(A)=\frac{S_A\text{的面积}}{D\text{的面积}}=\frac{\frac{1}{2}\times 1^2+1^2}{2\times 1}=\frac{3}{4}.$$

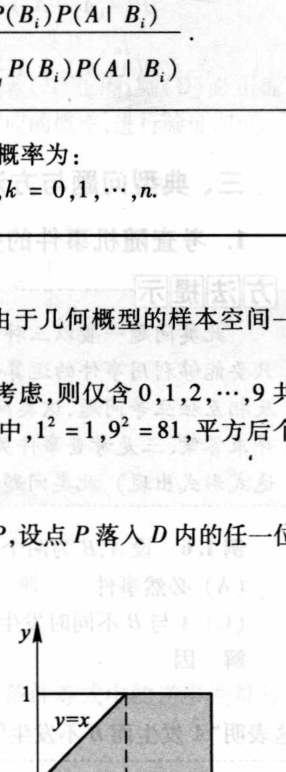

图 1-1

例 1.5 从数 1,2,3,4 中任取一个数记为X,再从$1,2,\cdots,X$中任取一个数记为Y,则概率$P\{Y=2\}=$______,$P\{X=3\mid Y=2\}=$______.

解　本题的随机试验具有明显的两步特征,可利用全概率公式、贝叶斯公式求解.

$$\begin{aligned}P\{Y=2\}&=P\{X=1,Y=2\}+P\{X=2,Y=2\}+P\{X=3,Y=2\}+P\{X=4,Y=2\}\\&=P\{X=1\}P\{Y=2\mid X=1\}+P\{X=2\}P\{Y=2\mid X=2\}+\\&\quad P\{X=3\}P\{Y=2\mid X=3\}+P\{X=4\}P\{Y=2\mid X=4\}\\&=\frac{1}{4}\times 0+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{13}{48},\end{aligned}$$

$$P\{X=3\mid Y=2\}=\frac{P\{X=3,Y=2\}}{P\{Y=2\}}=\frac{P\{X=3\}P\{Y=2\mid X=3\}}{P\{Y=2\}}=\frac{\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}}{\frac{13}{48}}=\frac{4}{13}.$$

二、补充公式与结论

(1) 设 A 为随机事件,则 $A+\varnothing=A,\ A\varnothing=\varnothing,\ A+A=A,\ AA=A$.

(2) 设 A,B 为随机事件,则 $A=AB+A\overline{B}$,从而有 $P(A)=P(AB)+P(A\overline{B})$.

(3) 由德·摩根律 $\overline{A+B}=\overline{A}\,\overline{B},\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$,可得

$$P(\overline{A}\,\overline{B})=P(\overline{A+B})=1-P(A+B),$$
$$P(\overline{A}+\overline{B})=P(\overline{AB})=1-P(AB).$$

(4) 设 A,B 是随机事件,则下列条件等价:

$$A\text{与}B\text{相互独立}\Leftrightarrow P(AB)=P(A)P(B)\Leftrightarrow P(A)=P(A\mid B)\ (P(B)>0)$$
$$\Leftrightarrow P(A)=P(A\mid\overline{B})\ (P(\overline{B})>0)\Leftrightarrow P(A\mid B)=P(A\mid\overline{B})\ (1>P(B)>0).$$

(5) 若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立,则

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n),$$
$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=1-P(\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i})=1-P(\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i})=1-\prod_{i=1}^{n}P(\overline{A_i})=1-\prod_{i=1}^{n}[1-P(A_i)].$$

三、典型问题与方法技巧

1. 考查随机事件的关系与运算及其逆问题

方法提示

此类问题一般以三种方式出现:一是通过事件的运算律考查事件的关系与运算、事件的含义等问题,这只要能够利用事件的运算性质将事件化简即可.二是结合概率考查事件间的关系,如互不相容、相互对立以及相互独立等问题,这类问题比较综合,要利用概率的运算性质、事件的运算律对题设条件恒等变形,从中寻求答案.三是考查事件关系与运算的逆问题,即已知事件间的某种关系,会得到什么结果(一般以概率表达式形式出现),此类问题的解法与第二类问题的解法相同.

例 1.6　设 A,B 为两个随机事件,则 $(A+B)(\overline{A}+\overline{B})$ 表示

(A) 必然事件.　　(B) 不可能事件.

(C) A 与 B 不同时发生.　　(D) A 与 B 恰有一个发生.

解　因

$$(A+B)(\overline{A}+\overline{B})=A\overline{A}+A\overline{B}+B\overline{A}+B\overline{B}=A\overline{B}+B\overline{A},$$

这表明"A 发生而 B 不发生"与"B 发生而 A 不发生"这两个事件至少发生一个,故应选(D).

注　本题容易错选(C),但 A 与 B 不同时发生的表示式为 $\overline{AB}$,显然 $\overline{AB}\neq A\overline{B}+B\overline{A}$.

例 1.7　设事件 A 与 B 互不相容,则 $A\cup\overline{B}=$ ________,$A-\overline{B}=$ ________,$A\overline{B}=$ ________.

解　因为

$$A\text{与}B\text{互不相容}\Leftrightarrow AB=\varnothing\Leftrightarrow A\subset\overline{B}\Leftrightarrow B\subset\overline{A}\text{(由文氏图不难得到)},$$

所以 $A \cup \overline{B} = \overline{B},\ A - \overline{B} = AB = \varnothing,\ A\overline{B} = A.$

例 1.8 对于任意事件 A 和 B，与 $A \cup B = B$ 不等价的是

(A) $A \subset B$.　　(B) $\overline{B} \subset \overline{A}$.　　(C) $A\overline{B} = \varnothing$.　　(D) $\overline{A}B = \varnothing$.

分析 本题考查事件的关系与运算，根据题目特征，可用图示法(文氏图)或赋值法求解.

解法 1 图示法. 由条件 $A \cup B = B$ 画出相应的文氏图如图 1-2 所示，不难看出，选项(A)、(B)、(C)均与 $A \cup B = B$ 等价. 当 $A \neq B$ 时，由 $A \cup B = B$ 不能推得选项(D)，这表明 $A \cup B = B$ 与 $\overline{A}B = \varnothing$ 不等价，应选(D).

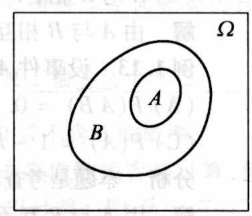

图 1-2

解法 2 赋值法. 取 $A = \varnothing, B = \Omega$，满足题设条件 $A \cup B = B$，此时选项(A)、(B)、(C)都成立，而选项(D)不成立，故选(D).

例 1.9 对于任意事件 A 与 B，

(A) 若 $AB \neq \varnothing$，则 A,B 一定独立.　　(B) 若 $AB \neq \varnothing$，则 A,B 有可能独立.

(C) 若 $AB = \varnothing$，则 A,B 一定独立.　　(D) 若 $AB = \varnothing$，则 A,B 一定不独立.

分析 本题考查事件的独立性与互不相容之间的关系，事实上，独立与互不相容之间没有必然的蕴含关系.

解 因为由 $AB \neq \varnothing$ 不能推得 $P(AB) = P(A)P(B)$，因此推不出 A,B 一定独立，(A)不正确.

若 $AB = \varnothing$，则 $P(AB) = 0$，但 $P(A)P(B)$ 是否为零不能确定，因此选项(C)、(D)也不正确，应选(B).

> **注** 当 $P(A) \neq 0, P(B) \neq 0$ 时，若 A,B 相互独立，则必有 $P(AB) = P(A)P(B) \neq 0$，从而有 $AB \neq \varnothing$. 可见，当 A,B 为非零概率事件且相互独立时，A,B 不会互不相容. 反之，若 A,B 为非零概率事件且互不相容，则 A,B 不独立.

例 1.10 将一枚硬币独立地掷两次，记 A_1 = "掷第一次出现正面"，A_2 = "掷第二次出现正面"，A_3 = "正、反面各出现一次"，A_4 = "正面出现两次"，则

(A) A_1, A_2, A_3 相互独立.　　(B) A_2, A_3, A_4 相互独立.

(C) A_1, A_2, A_3 两两独立.　　(D) A_2, A_3, A_4 两两独立.

分析 由三个事件相互独立与两两独立的关系可知，若(A)正确，则(C)必正确；若(B)正确，则(D)必正确，从而作为单项选择题，排除选项(A)、(B). 接下来按照两个事件独立性的定义，计算相应的概率，进行验证即可.

解 显然 $P(A_1) = P(A_2) = \dfrac{1}{2}$，且 A_1 与 A_2 相互独立.

由于 $A_3 = A_1\overline{A_2} \cup \overline{A_1}A_2,\ A_4 = A_1A_2$，所以

$$P(A_3) = P(A_1\overline{A_2}) + P(\overline{A_1}A_2) = P(A_1)P(\overline{A_2}) + P(\overline{A_1})P(A_2) = \frac{1}{2},$$

$$P(A_4) = P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2) = \frac{1}{4},$$

从而
$$P(A_1A_2) = \frac{1}{4},\quad P(A_1A_3) = P(A_1\overline{A_2}) = \frac{1}{4},$$

$$P(A_2A_3) = P(\overline{A_1}A_2) = \frac{1}{4},\quad P(A_2A_4) = P(A_1A_2) = \frac{1}{4},\ P(A_3A_4) = 0,$$

可见选项(C)正确.

例 1.11 设 $0 < P(A) < 1, 0 < P(B) < 1$，且满足 $P(A \mid B) + P(\overline{A} \mid \overline{B}) = 1$，则

(A) A 与 B 互不相容.　　(B) A 与 B 互相对立.

(C) A 与 B 相互独立.　　(D) A 与 B 不独立.

分析 本题是以概率条件设置的事件间的关系问题，利用概率的运算性质去掉条件等式中的逆事件符号，即可看出正确选项.

解 由 $P(A \mid B) + P(\overline{A} \mid \overline{B}) = 1$，得

$$P(A \mid B) = 1 - P(\overline{A} \mid \overline{B}) = P(A \mid \overline{B}),$$

再由乘法公式，有

$$\frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{P(A)P(\overline{B} \mid A)}{1 - P(B)}$$

$$= \frac{P(A)[1-P(B\mid A)]}{1-P(B)} = \frac{P(A)-P(AB)}{1-P(B)},$$

由上式解得 $P(AB)=P(A)P(B)$，故应选(C).

例 1.12 设事件 A,B 相互独立，且 $P(A)\neq 0, P(B)\neq 0$，则必有

(A) A 与 B 互不相容. (B) $P(A-B)=P(A)$.

(C) A 与 B 相容. (D) $P(A\cup B)=P(A)P(B)$.

解 由 A 与 B 相互独立知，$P(AB)=P(A)P(B)\neq 0$，故 $AB\neq\varnothing$，应选(C).

例 1.13 设事件 A 与 B 互不相容，则

(A) $P(\overline{A}\,\overline{B})=0$. (B) $P(AB)=P(A)P(B)$.

(C) $P(A)=1-P(B)$. (D) $P(\overline{A}\cup\overline{B})=1$.

分析 本题是考查事件关系与运算的逆问题，由事件互不相容的定义、德·摩根律及概率的性质可求得结果.

解 因 A 与 B 互不相容，故 $AB=\varnothing, P(AB)=0$，从而

$$P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{AB})=1-P(AB)=1,$$

应选(D).

2. 利用四种概型求概率问题

方法提示

此类问题主要是针对求概率的应用题，处理的一般原则如下.

解题定式 见到求概率的应用题，首先判断它属于哪一种概型，然后用字母恰当地表示其中的随机事件，再选用相关的公式求解.

(1) 古典概型：抓住两个特征——样本空间有限、基本事件等可能性，找所求事件 A 与样本空间 Ω 包含的样本点作商，可得所求概率

$$P(A)=\frac{A\text{包含的基本事件数}}{\Omega\text{包含的基本事件数}}.$$

(2) 几何概型：抓住两个特征——样本空间无限、基本事件等可能性，找所求事件 A 与样本空间 Ω 的度量作商，可得所求概率

$$P(A)=\frac{A\text{的度量(长度、面积、体积)}}{\Omega\text{的度量(长度、面积、体积)}}.$$

(3) 全概率模型：抓住试验的两步特征，找准完备事件组，用全概率公式和贝叶斯公式计算.

(4) n 重伯努利概型：抓住 n 次独立重复试验，且每次试验只有两个可能结果 A 与 $\overline{A}$ 的特征，用二项概率公式计算.

例 1.14 箱中有 a 个白球，b 个黑球.

(1) 现从中任取 $m+n$ 个球，则其中恰有 m 个白球($m\leqslant a$)、n 个黑球($n\leqslant b$)的概率为______；

(2) 现将球一个一个都取出，一次取 1 个，则第 k 次取到白球的概率为______；

(3) 现从箱中每次取 1 个球，取后不放回，则第 k 次才取到白球的概率为______.

分析 本题的三个问题都是古典概型，但所做的随机试验是不同的，只要求得所求事件及样本空间包含的样本点即可. 这一般需要利用排列、组合等知识解决.

解 (1) 随机试验是从 $a+b$ 个球中任取 $m+n$ 个球，故样本空间包含的基本事件数为 C_{a+b}^{m+n}. 又事件 $A=$“恰有 m 个白球、n 个黑球”包含的基本事件数为 $C_a^m C_b^n$，从而

$$P(A)=\frac{C_a^m C_b^n}{C_{a+b}^{m+n}}.$$

(2) 随机试验是把 $a+b$ 个球一次取 1 个都取出来，所以样本空间包含的基本事件数为

$$(a+b)(a+b-1)(a+b-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1=(a+b)!.$$

根据乘法原理，事件 $A=$“第 k 次取到白球”可分为两步：第 k 次取到白球共有 C_a^1 种取法，剩下的 $a+b-1$ 次取球共有 $(a+b-1)(a+b-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1=(a+b-1)!$ 种取法，从而

$$P(A)=\frac{C_a^1(a+b-1)!}{(a+b)!}=\frac{a}{a+b}.$$

(3) 随机试验是一次取 1 个球，不放回，共取 k 次，故样本空间包含的基本事件数为

$$(a+b)(a+b-1)\cdots(a+b-k+1).$$

事件 A = “第 k 次才取到白球”包含的基本事件数为

$$b(b-1)\cdots(b-k+2)a,$$

因此
$$P(A)=\frac{b(b-1)\cdots(b-k+2)a}{(a+b)(a+b-1)\cdots(a+b-k+1)}.$$

注 1)求解古典概型问题一定要看清所做的随机试验，根据随机试验去找所求事件与样本空间包含的样本点数.

2) 本题第(2)问的结果与 k 无关，是一个常数，此即现实生活中的抽签模型，它反映了抽签的公平性.

例 1.15 从 0,1,2,…,9 这 10 个数字中任取 3 个不同的数字，求此 3 个数中不含 0 或不含 5 的概率.

分析 本题是古典概型. 随机试验是从 10 个数字中任取 3 个，样本空间包含的基本事件数很容易计算，但是事件“3 个数中不含 0 或不含 5”包含的基本事件数不容易计算. 所以，见到样本点难以计算，或“至少……”、“至多……”类随机事件的概率问题，就要想到用其逆事件处理，即 $P(A)=1-P(\overline{A})$.

解 记 A = “3 个数字中不含 0 或不含 5”，B = “3 个数字中不含 0”，C = “3 个数字中不含 5”，则 $A=B+C$，于是

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-P(\overline{B+C})=1-P(\overline{B}\,\overline{C})$$
$$=1-\frac{C_1^1C_1^1C_8^1}{C_{10}^3}=\frac{14}{15},$$

其中 $\overline{B}\,\overline{C}$ 表示取出的 3 个数字中含 0 且含 5，包含的基本事件数为 $C_1^1C_1^1C_8^1$.

例 1.16 从区间 (0,1) 内随机取两个数 x 和 y，试求这两个数之和小于 $\frac{5}{4}$，且其积大于 $\frac{1}{4}$ 的概率.

解 从区间 (0,1) 内随机取两个数 x 和 y，可看成从图 1-3 所示的正方形区域中任取一点，符合几何概型的两个特征，而满足 $x+y<\frac{5}{4}$，且 $xy>\frac{1}{4}$ 的点集为图中阴影部分，故

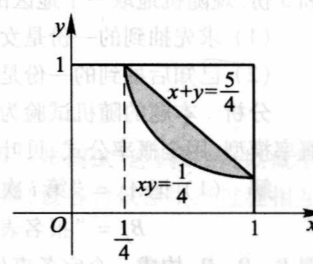

图 1-3

$$\Omega=\{(x,y)\mid 0<x<1,0<y<1\},$$
$$A=\left\{(x,y)\mid x+y<\frac{5}{4},xy>\frac{1}{4},(x,y)\in\Omega\right\}.$$

又 Ω 与 A 所占区域的面积为

$$S_\Omega=1\times1=1,$$
$$S_A=\int_{\frac{1}{4}}^{1}\left(\frac{5}{4}-x-\frac{1}{4x}\right)dx=\left(\frac{5}{4}x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}\ln x\right)\Big|_{\frac{1}{4}}^{1}=\frac{15}{32}-\frac{1}{2}\ln 2,$$

因此所求概率
$$P(A)=\frac{S_A}{S_\Omega}=\frac{15}{32}-\frac{1}{2}\ln 2.$$

例 1.17 将一根长为 a 的铁丝任意分成三段，求恰好能构成一个三角形的概率.

解 设三段长度分别为 x,y 和 $a-x-y$，且满足 $0<x<a,0<y<a,0<x+y<a$，所以将长为 a 的铁丝任意分成三段，可看成从图 1-4 所示的 x 轴、y 轴及直线 $x+y=a$ 围成的三角形区域内任意取一点，符合几何概型的两个特征. 事件 A = “三段能构成三角形”，由两边之和大于第三边，可得

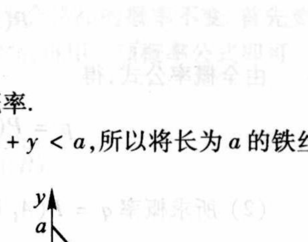

图 1-4

$$\begin{cases}a-x-y<x+y,\\ x<a-x-y+y,\\ y<a-x-y+x,\end{cases}$$

即
$$A=\left\{(x,y)\mid 0<x<\frac{a}{2},0<y<\frac{a}{2},\frac{a}{2}<x+y<a\right\},$$

于是
$$P(A)=\frac{A\text{的面积}}{\Omega\text{的面积}}=\frac{\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}a\right)^2}{\frac{1}{2}a^2}=\frac{1}{4}.$$

例 1.18 盒中装有 5 个红球和 3 个白球，另一袋中装有 4 个红球和 3 个白球. 现从盒中任取 3 个球放入袋

中,然后从袋中任取 1 个球.

(1) 求此球是红球的概率;

(2) 若已知从袋中任取 1 个球为红球,问从盒中取出的 3 个球中没有红球的概率.

分析　本题的随机试验具有明显的先后两步特征,属于全概率模型,用全概率公式、贝叶斯公式求解.

解　(1) 记 A =“从袋中任取 1 个球为红球”,

B_i =“从盒中任取 3 个球中有 i 个红球”, $i=0,1,2,3$,

则 B_0,B_1,B_2,B_3 构成一个完备事件组,且

$$P(B_0)=\frac{C_5^0C_3^3}{C_8^3}=\frac{1}{56},\ P(B_1)=\frac{C_5^1C_3^2}{C_8^3}=\frac{15}{56},\ P(B_2)=\frac{C_5^2C_3^1}{C_8^3}=\frac{30}{56},\ P(B_3)=\frac{C_5^3C_3^0}{C_8^3}=\frac{10}{56};$$

$$P(A\mid B_0)=\frac{4}{10},\ P(A\mid B_1)=\frac{5}{10},\ P(A\mid B_2)=\frac{6}{10},\ P(A\mid B_3)=\frac{7}{10}.$$

由全概率公式,得

$$P(A)=\sum_{i=0}^{3}P(B_i)P(A\mid B_i)=\frac{329}{560}=\frac{47}{80}.$$

(2) 由贝叶斯公式,得

$$P(B_0\mid A)=\frac{P(AB_0)}{P(A)}=\frac{P(B_0)P(A\mid B_0)}{P(A)}=\frac{4}{329}.$$

注　由随机试验的先后两步特征识别全概率模型并正确找出和表示完备事件组(第一步所有可能的结果)是求解此类问题的关键所在.

例 1.19　设有分别来自三个地区的 10 名、15 名和 25 名考生的报名表,其中女生的报名表分别为 3 份、7 份和 5 份. 现随机地取一个地区的报名表,从中先后抽出两份.

(1) 求先抽到的一份是女生表的概率 p;

(2) 已知后抽到的一份是男生表,求先抽到的一份是女生表的概率 q.

分析　本题的随机试验为“先随机取一个地区的报名表,再从中先后抽出两份”,两步特征非常明显,属全概率模型,用全概率公式、贝叶斯公式求解.

解　(1) 记 A_i = “第 i 次抽到的是女生表”, $i=1,2$;

B_j = “报名表是第 j 个地区的”, $j=1,2,3$,

则 B_1,B_2,B_3 构成一个完备事件组,且

$$P(B_j)=\frac{1}{3},\ j=1,2,3;$$

$$P(A_1\mid B_1)=\frac{3}{10},\ P(A_1\mid B_2)=\frac{7}{15},\ P(A_1\mid B_3)=\frac{5}{25}.$$

由全概率公式,得

$$p=P(A_1)=\sum_{j=1}^{3}P(B_j)P(A_1\mid B_j)=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{10}+\frac{7}{15}+\frac{5}{25}\right)=\frac{29}{90}.$$

(2) 所求概率 $q=P(A_1\mid\overline{A_2})=\dfrac{P(A_1\overline{A_2})}{P(\overline{A_2})}$,显然需要计算概率 $P(A_1\overline{A_2})$ 与 $P(\overline{A_2})$. 仍由全概率公式,得

$$\begin{aligned}P(A_1\overline{A_2})&=\sum_{j=1}^{3}P(B_j)P(A_1\overline{A_2}\mid B_j)\\&=\frac{1}{3}\left(\frac{3}{10}\cdot\frac{7}{9}+\frac{7}{15}\cdot\frac{8}{14}+\frac{5}{25}\cdot\frac{20}{24}\right)=\frac{20}{90},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(\overline{A_1}\,\overline{A_2})&=\sum_{j=1}^{3}P(B_j)P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\mid B_j)\\&=\frac{1}{3}\left(\frac{7}{10}\cdot\frac{6}{9}+\frac{8}{15}\cdot\frac{7}{14}+\frac{20}{25}\cdot\frac{19}{24}\right)=\frac{41}{90},\end{aligned}$$

$$P(\overline{A_2})=P(A_1\overline{A_2})+P(\overline{A_1}\,\overline{A_2})=\frac{61}{90},$$

因此
$$q = P(A_1 \mid \overline{A_2}) = \frac{P(A_1 \overline{A_2})}{P(\overline{A_2})} = \frac{20}{61}.$$

注 1) 概率 $P(\overline{A_2})$ 可通过逆事件求得，即 $P(\overline{A_2}) = 1 - P(A_2)$，而 $P(A_2) = P(A_1) = \frac{29}{90}$，这样可不必计算 $P(\overline{A_1}\,\overline{A_2})$.

2) 全概率公式 $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A \mid B_i)$ 中的事件 A 可以是一个单一的事件(如例 1.18 及本例第(1)问)，也可是一些事件的运算结果(如本例的第(2)问). 后者有一定难度，但只要能正确分析所讨论的事件，明确随机试验进行过程，找准完备事件组，此类问题亦能顺利求解.

例 1.20 设在3次独立试验中，事件A发生的概率都相等，且至少发生一次的概率为$\frac{19}{27}$，则在一次试验中A发生的概率为 $p =$ ______.

分析 本题的随机试验是伯努利概型——见到3次或3次以上独立重复试验，就要想到用二项概率公式(二项分布)求解；见到"至少"、"至多"类随机事件的概率问题，就要想到求其对立事件的概率是否简单. 想到这两点，问题便迎刃而解.

解 由 $1 - C_3^0 p^0 (1-p)^3 = \frac{19}{27}$，得 $1 - (1-p)^3 = \frac{19}{27}$，故 $p = \frac{1}{3}$.

例 1.21 某人向同一目标独立重复射击，每次击中目标的概率为 p，则此人第 5 次射击恰好是第 3 次命中目标的概率为________.

分析 本题是伯努利概型，但要将所求事件进行适当的分解，以利用二项概率公式求解.

解 $P\{$第 5 次射击恰好是第 3 次命中$\}$

$= P\{$第 5 次击中目标且前 4 次恰好击中 2 次$\}$

$= P\{$第 5 次击中目标$\}P\{$前 4 次恰好击中 2 次$\}$

$= p \cdot C_4^2 p^2 (1-p)^2 = 6p^3(1-p)^2$.

例 1.22 设一厂家生产的每台仪器以概率 0.7 可直接出厂，以概率 0.3 需进一步调试. 经调试后，以概率 0.8 可以出厂，以概率 0.2 定为不合格品不能出厂. 现该厂生产了 $n\ (n \geqslant 2)$ 台仪器(设各台仪器生产过程相互独立)，求：

(1) 全部仪器都能出厂的概率 α；

(2) 恰有 2 台不能出厂的概率 β；

(3) 至少有 2 台不能出厂的概率 γ.

分析 本题仍是伯努利概型——独立重复生产了 n 台仪器，且每台仪器最终为合格品的概率不变. 首先要求出生产1台仪器能出厂的概率，这显然又包含两步特征，需用全概率公式求解；然后再用二项概率公式即可.

解 先求生产 1 台仪器最终能出厂的概率.

记 A = "仪器可出厂"，B = "仪器需进一步调试"，则

$$P(A) = P(AB) + P(AB) = P(B)P(A \mid B) + P(\overline{B})P(A \mid \overline{B})$$
$$= 0.3 \times 0.8 + 0.7 \times 1 = 0.94.$$

用 X 表示 n 台仪器中能出厂的台数，则 $X \sim B(n, 0.94)$，因此：

(1) $\alpha = P\{X = n\} = 0.94^n$.

(2) $\beta = P\{X = n-2\} = C_n^{n-2} 0.94^{n-2}(1-0.94)^2 = C_n^{n-2} 0.94^{n-2} \cdot 0.06^2$.

(3) $\gamma = P\{X \leqslant n-2\} = 1 - P\{X = n-1\} - P\{X = n\}$

$= 1 - C_n^{n-1} 0.94^{n-1} \cdot 0.06 - 0.94^n = 1 - n \cdot 0.94^{n-1} \cdot 0.06 - 0.94^n$.

3. 利用概率的公式、性质求概率问题

方法提示

此类问题是指利用概率的加法公式、减法公式、乘法公式以及条件概率和概率的性质求概率的问题，其一般特点是已知一些随机事件的概率，求其他随机事件的概率. 求解这类问题只要选用相关公式正确推导即可. 以下情形在解题中会经常遇到.

解题定式 见到“一对”独立,就要想到其他“三对”也独立,即事件 A 与 B,A 与 $\overline{B}$,$\overline{A}$ 与 B,$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 中,只要有一对相互独立,则其他三对也相互独立.见到“草帽就先摘帽”,即把逆事件处理掉(A 与 B 不独立时,如此处理),常见情形如下:

$$P(A\overline{B}) = P(A) - P(AB),$$
$$P(\overline{A}\,\overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B),$$
$$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{AB}) = 1 - P(AB).$$

例 1.23 设 A,B 是随机事件,且 $P(A) = 0.7$,$P(A - B) = 0.3$,则 $P(\overline{A} \cup \overline{B}) =$ ________.

解 因 $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = P(\overline{AB}) = 1 - P(AB)$,故只要由已知条件求出 $P(AB)$ 即可.

由 $P(A - B) = P(A) - P(AB) = 0.3$ 及 $P(A) = 0.7$,得 $P(AB) = 0.4$,所以 $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1 - 0.4 = 0.6$.

例 1.24 已知事件 A,B 相互独立,且 $P(\overline{A}\,\overline{B}) = \dfrac{1}{9}$,$P(A\overline{B}) = P(\overline{A}B)$,则 $P(A) =$ ________.

解 由 A,B 相互独立可知,$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$,A 与 $\overline{B}$,$\overline{A}$ 与 B 也相互独立,故有

$$\begin{cases} P(\overline{A}\,\overline{B}) = P(\overline{A})P(\overline{B}) = \dfrac{1}{9}, \\ P(A)P(\overline{B}) = P(\overline{A})P(B), \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} [1 - P(A)][1 - P(B)] = \dfrac{1}{9}, & ① \\ P(A)[1 - P(B)] = [1 - P(A)]P(B). & ② \end{cases}$$

由②得 $P(A) = P(B)$,代入①中得 $P(A) = \dfrac{2}{3}$.

例 1.25 设事件 A,B 恰有一个发生的概率为 0.3,且 $P(A) + P(B) = 0.5$,则 A 与 B 至少有一个发生的概率为________.

解 由事件 A,B 恰有一个发生的概率为 0.3 可知 $P(A\overline{B} \cup \overline{A}B) = 0.3$,即

$$P(A) - P(AB) + P(B) - P(AB) = 0.3.$$

又由 $P(A) + P(B) = 0.5$,可得 $P(AB) = 0.1$,从而

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0.4,$$

即 A 与 B 至少有一个发生的概率为 0.4.

例 1.26 已知 $0 < P(B) < 1$,且 $P((A_1 + A_2) \mid B) = P(A_1 \mid B) + P(A_2 \mid B)$,则下列选项成立的是

(A) $P((A_1 + A_2) \mid \overline{B}) = P(A_1 \mid \overline{B}) + P(A_2 \mid \overline{B})$.

(B) $P(A_1B + A_2B) = P(A_1B) + P(A_2B)$.

(C) $P(A_1 + A_2) = P(A_1 \mid B) + P(A_2 \mid B)$.

(D) $P(B) = P(A_1)P(B \mid A_1) + P(A_2)P(B \mid A_2)$.

分析 本题与前面的三个例题特征类似,虽不是表现为已知一些随机事件的概率,求其他随机事件的概率,但考查的是在已知某概率等式的条件下,可推得哪一个选项中的结果.本题要利用条件概率的定义及乘法公式求解.由于题设条件中的等式两边均含有分母 $P(B)$(条件概率定义),故可考虑将条件等式两边同时乘以 $P(B)$.

解 将题设等式条件两边乘以 $P(B)$,得

$$P((A_1 + A_2) \mid B)P(B) = P(A_1 \mid B)P(B) + P(A_1 \mid B)P(B),$$

由乘法公式得

$$P((A_1 + A_2)B) = P(A_1B) + P(A_2B),$$

此即选项(B),故应选(B).

注 将选项(A)两边同乘以 $P(\overline{B})$ 会得到什么结果?选项(D)不正确是因为 A_1,A_2 未必是完备事件组.

例 1.27 设 A,B 为任意两个事件,且 $A \subset B$,$P(B) > 0$,则必有

(A) $P(A) < P(A \mid B)$. (B) $P(A) \leqslant P(A \mid B)$.

(C) $P(A) > P(A \mid B)$. (D) $P(A) \geqslant P(A \mid B)$.

分析 本题的特征与例 1.26 相同,主要考查乘法公式,其关键是由 $A \subset B$ 得出 $A = AB$.