高等医药院校教材

（供药学专业用）

高等数学

（上　册）

黄志宏　主编

人民卫生出版社

高 等 医 药 院 校 教 材

（供药学专业用）

高 等 数 学

（上册）

黄志宏　主编

高等数学编审小组

组长　黄志宏（沈阳药学院）
王　珍（上海第一医学院）
姚金华（北京医科大学）
刘定远（四川医学院）
李柏新（南京药学院）

人 民 卫 生 出 版 社

责任编辑　　黄大谦

高　等　数　学

（上册）

黄志宏　　主编

人民卫生出版社出版

（北京市崇文区天坛西里10号）

河北省遵化县印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

787×1092毫米16开本　$28\frac{1}{4}$印张　4插页　658千字

1986年6月第1版　　1988年5月第1版第3次印刷

印数：14,601—17,620

ISBN 7-117-00025-2/R·26 定价：3.85 元

前　言

本书是由卫生部组织的《高等数学》编写小组根据1983年药学专业教材编审工作会议精神和《高等数学教材大纲》(初稿)所编写的教材。其中包括《高等数学》上、下两册和《数理统计方法》一册。可供全国高等医药院校药学专业师生试用及其它有关专业人员的参考。

《高等数学》上册内容为：一元函数微积分、常微分方程、空间解析几何及向量代数、多元函数微积分、无穷级数。这一册的教学时数(包括习题课)需170学时左右。使用时，可根据各院校的具体情况加以取舍。如讲课时数较少，附星号或小字排印的内容可相应地省略不讲。《高等数学》下册内容为：线性代数、计算方法、富里叶级数、积分变换等，可供研究生或本科高年级学生选修之用。

本书为了教学和学习方便，基本上于每节适当之处，配有练习题，每章之末配有习题，书末附答案。上册附简易积分表。

编写时继承了唐子东先生主编《高等数学》(1962年人民卫生出版社第二版出社)和沈阳药学院主编《高等数学》上、下册(1979年上海科学技术出版社出版)的优点和有益之处，根据需要本书在理论上有所加深，内容上略有扩充。

本书在编写和出版过程中得到许多同志的关怀和支持，特此表示衷心的感谢。新由国外访问归来的方积乾同志(本书前一版的编者之一)给《高等数学》全稿审阅一遍提出了宝贵意见，并特邀其参加《数理统计方法》编写。

限于编者水平，书中一定存在许多缺点和错误，恳请广大读者批评指正。

编者　1985年4月

目　录

第一章 函　　数

事物总是不断运动变化的．研究事物变化规律是认识和改造客观世界的需要．函数关系表达了事物间的量的变化规律，因而高等数学把函数作为研究的中心对象．

高等数学对推动自然科学和工业生产有十分重要的作用．例如，现代医药学的研究，由于应用了高等数学的概念和方法，出现了不少新的学科．如药物动力学、定量药理学、定量生理学、生物药剂学和生物控制论等等．这正如马克思指出的“任何一门科学，只有它成功地应用了数学，才能看作是发展得好的．”

函数在中学里已有过接触，为适应高等数学的需要，本章将把中学里的函数知识适当加深并系统化，最后对常用的曲线直线化问题作一简要介绍．

第一节　函数概念

*一、常量与变量

自然科学中会遇到各种不同的量，它们常常有着完全不同的状态．

例如，在自由落体运动过程中，就有下落时间 t 、下落距离 S 和重力加速度 g 等三个量．它们的关系是

$$S=\frac{1}{2}gt^2$$

重力加速度 g 一般取 9.8 米/秒^2， S 和 t 则可以取不同的数值．这种在某一过程中，保持一定数值（取同一数值）的量叫做常量；可以取不同数值的量叫做变量．

再如，圆的直径 D 变化时，圆周长 c 也随之改变，但是它们的比值 π 却保持不变．因此 D 和 c 是变量，圆周率 π 是常量．

又如，在圆柱形的反应塔内，反应液的容积 V 同反应液面高 h 的关系为

$$V=\pi R^2h$$

这里，对整个反应过程来说，反应塔半径 R 总保持同一数值，是常量， V 和 h 可以取不同的值，它们是变量．

应当注意，常量和变量是对一定的研究过程而言．同一个量在某一过程中是常量，在另一过程中可能就是变量．例如，在同一地点研究物体自由下落，重力加速度 g 是常量；在不同地点研究，则 g 就不能算做常量而应是变量．

常量可以用数轴上的一个定点表示；变量则可用数轴上的动点表示．

二、函数的定义

同一过程中几个变量的变化常常不是孤立的，而是按照一定规律相互联系着。下面先从几个例子来考察两个变量间变化的相依关系．

例 1　对某糖尿病患者作葡萄糖耐糖试验．按每公斤体重口服葡萄糖 1.75 克后，测

定血糖结果如下：

口服葡萄糖后的时间 t（小时）	0	0.5	1	2	3
患者血糖水平 y（毫克%）	115	150	175	165	120

可见，给定一个服药后的时刻 t，患者血糖水平 y 相应地有一个确定的数值．

例 2 从某蒸馏塔顶部的温度自动记录仪上，获得某班工作时间内塔内温度的变化曲线（图 1·1）．

从曲线上可直观地看到塔内各时刻温度的高低．如 $t=9$ 小时，$T=60$℃。因而它形象地表现了温度 T 依时间 t 的变化规律．

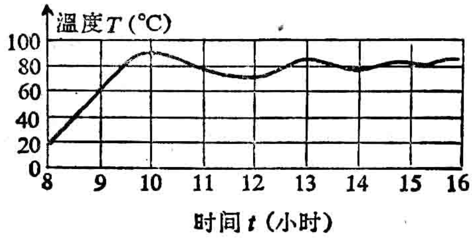

图 1·1

例 3 考察圆面积 A 和半径 R 的相依关系．大家知道，它们的关系由公式

$$A=\pi R^2$$

给出．当半径 R 取某一正数值时，圆面积 A 随之被该式确定了一个正数值．

类似上面的例子还可以举出很多．仅从这三例可以看出，它们所含变量的意义不同，取值大小不同，表示方法也不同．但是，如果抽去其具体内容，只考虑两个量变化的相依关系，就会发现它们的共同点是：当一个变量在某一范围内每取定一个值以后，另一个变量都有确定的值与之对应．两个变量间的这种对应关系就是函数关系的实质．

定义　在某个变化过程中，有两个变量 x 和 y，如果对于 x 取的每一个值，y 都按一定规律有确定的值与之对应，则 x 与 y 间的关系叫做函数关系．x 叫做自变量，y 叫做 x 的函数（也叫**因变量**）．**记作**

$$y=f(x) \qquad \text{或} \qquad y=y(x)$$

对于函数的定义，需要强调两点：

1．函数的记号　函数 $y=f(x)$ 中的 f 表示变量 x 与 y 的对应关系．$f(x)$ 是一个完整的记号，不能误解为 f 与 x 的乘积．在一般性讨论时，$f(x)$ 表示任何符合条件的函数；在具体问题中，则表示该问题的一个确定函数．例如，在 $y=kx$ 中，$f(x)$ 表示函数 y 与 x 成正比关系；在 $y=\dfrac{k}{x}$ 中，$f(x)$ 表示函数 y 与 x 成反比关系．在例 1 中，$f(x)$ 表示由该表所规定的对应关系．

当自变量 x 取某一定值 a（即 $x=a$）时，函数的对应值叫做函数值．记作 $f(a)$ 或 $y|_{x=a}$．

例 4 设函数 $y=2x+x^2+1$，求 $x=2$ 和 $x=\sqrt{2}$ 的函数值．

解 $y|_{x=2}=2\cdot 2-2^2+1=1$；

$y|_{x=\sqrt{2}}=2\cdot\sqrt{2}-(\sqrt{2})^2+1=2\sqrt{2}-1$

例 5 设函数 $f(x)=3\cos 2x$，求 $f(\dfrac{\pi}{2})$；$f(\omega t+\dfrac{\varphi}{2})$．

解 $f(\frac{\pi}{2}) = 3\cos(2\cdot\frac{\pi}{2}) = 3\cos\pi = -3$;

$$f(\omega t+\frac{\varphi}{2}) = 3\cos[2(\omega t+\frac{\varphi}{2})] = 3\cos(2\omega t+\varphi).$$

2 函数的定义域 在函数的定义中，虽然没有明确指出自变量 x 取哪些值，但是它要求对于 x 取的每一个值，y 都有确定的对应值 $f(x)$．这种对于自变量的某一个已知值 $x=x_0$，函数具有确定的对应值 $f(x_0)$，我们就说函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 有定义．使函数 y 有定义的自变量 x 的值的全体叫做函数的定义域．

在一般性研究中，如果函数是用公式给出而又没有指明它的定义域时，就认为函数的定义域是使表达式有意义的一切 x 值．

例 6 求 $y=\sqrt{4-x^2}$ 的定义域．

解 当 $4-x^2\geqslant 0$ 时，函数 y 都有定义，故所求定义域为 $-2\leqslant x\leqslant 2$．

在实际问题中，函数的定义域是根据所考虑问题的实际意义确定的．例 3 中，面积 A 是半径 R 的函数．A 的定义域不是按使表达式 $A=\pi R^2$ 有意义来确定，而是根据半径的实际意义确定为 $0<R<+\infty$．记号"∞"被读作"无穷大"．

由于量的变化范围常常用不等式表示，为简便起见，我们介绍几种区间概念．

介于数轴上的两个点 a、b（即数 a，b）之间的全部点（数）叫做开区间．记作 (a, b)，即 $a<x<b$．a 与 b 叫做区间的端点．如果把端点也包括在区间内叫做闭区间．记作 $[a, b]$，即 $a\leqslant x\leqslant b$．类似有半开半闭区间 $a\leqslant x<b$，记作 $[a, b)$；$a<x\leqslant b$ 记作 $(a, b]$．有时不需要指明所考虑的区间是否含有端点，我们就简单地说"区间"，而且也使用圆括号．当区间的一个端点或两个端点都趋向无穷远点时，我们称这种区间为无穷区间．例如，当 $a<x<+\infty$ 时，记为 $(a, +\infty)$；当 $-\infty<x\leqslant b$ 时，记为 $(-\infty, b]$；当 $-\infty<x<+\infty$ 时，记为 $(-\infty, +\infty)$．

例 7 求函数 $y=\frac{1}{3-x}\sqrt{x^2-1}$ 的定义域．

解 要使 y 有定义，必须有 $x^2-1\geqslant 0$ 且 $x\neq 3$．由此得 y 的定义域（图 1·2）为

$$-\infty<x\leqslant -1,\ 1\leqslant x<3,\ 3<x<+\infty,$$

记作 $(-\infty, -1]$，$[1, 3)$，$(3, +\infty)$．

图 1·2

此外，邻域也是以后经常用到的一种区间概念．

设 a 和 δ 是实数，$\delta>0$，则开区间

$$a-\delta<x<a+\delta \quad (\text{或} |x-a|<\delta)$$

被称为点 a 的 δ 邻域．如图 1·3，点 a 的 δ 邻域就是以点 a 为中心，长度为 2δ 的开区间．

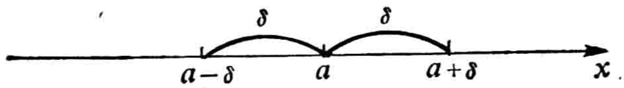

图 1·3

第二节 函数的表示法和函数的特性

* 一、函数的三种表示法

1 列表法 我们把一系列自变量值和对应的函数值列成表格来表示函数的方法叫做列表法．大家熟悉的平方根表、三角函数表、对数表等都是用列表法表示的函数．用列表法表示函数，不仅可以避免麻烦的计算，而且还可以表达不知道解析式（公式）的函数，在医药学中经常使用，如上节的例 1．但是它的缺点是只能查表上列出的函数值，且不直观，也不便于作理论分析．

2 图示法 用坐标平面上的图形（一般为曲线）来表示函数的方法叫做图示法．上节例 2 和大家熟悉的指数曲线、对数曲线、正弦曲线等等都是用图示法表示函数的．用图示法表示函数的最大优点就是直观性强，可以启迪思维，但不够精确，也不便于作理论分析．

3 解析法 用包含自变量和函数的数学式子表示函数的方法叫做解析法（公式法）．上节的例 4 至例 7 都是用解析法表示的函数．用解析法表示函数便于作理论分析和数值计算．因此，今后研究变量间关系主要是用解析法来表示函数的．

二、分段函数与反函数

1 分段函数 在用解析法表示函数中，有时对于自变量的一切取值，函数的对应值常常不能用一个解析式表示．例如，在分析仪的示波器上显示的是如图 1·4 所示的一个三角波，其电压 V 与时间 t 的函数关系式为

$$V=\begin{cases}2t & \text{当 } 0\leqslant t\leqslant 1;\\ 4-2t & \text{当 } 1<t\leqslant 2.\end{cases}$$

一般说来，对于自变量在不同范围内的取值，一个函数如果只能采用不同的解析式表示其对应值，这样的函数叫做分段函数．例如

$$y=f(x)=\begin{cases}0 & \text{当 } x\leqslant 0;\\ x & \text{当 } 0<x<1;\\ 1 & \text{当 } x>1.\end{cases}$$

它的定义域为：

$$(-\infty,\ 1)、(1,\ +\infty);$$

它的图形如图 1·5．

2 反函数 在自由落体运动中，通常是根据下落时间 t 确定下落距离 S．即以 t 为

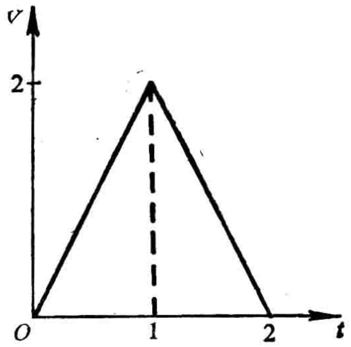

图 1·4

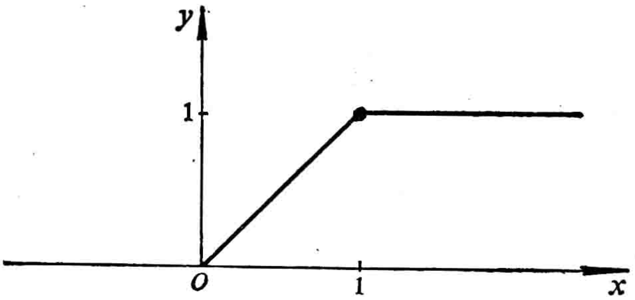

图 1·5

自变量，S 为因变量．它们的关系是

$$S=\frac{1}{2}gt^2$$

但是，有时需要根据距离确定时间．这样，S 为自变量，t 为因变量．它们的关系由上式确定为

$$t=\sqrt{2S/g}\,.$$

对于这种情形，我们称函数 $t=\sqrt{2S/g}$ 为函数 $S=\frac{1}{2}gt^2$ 的反函数；$S=\frac{1}{2}gt^2$ 为直接函数。

一般说来，如果已知 y 是 x 的函数 $y=f(x)$，则可由它确定一个以 y 为自变量，x 为因变量的函数

$$x=f^{-1}(y).$$

这个函数显然是 $y=f(x)$ 的相反的函数．例如，函数 $y=\dfrac{x+2}{x-1}$，$y=x^2$ 和 $y=x^3$ 的相反的函数分别为 $x=\dfrac{y+2}{y-1}$，$x=\pm\sqrt{y}$ 和 $x=\sqrt[3]{y}$．

若按习惯把 $x=f^{-1}(y)$ 中的自变量仍用 x 表示，因变量用 y 表示，则函数 $y=f^{-1}(x)$ 称为函数 $y=f(x)$ 的反函数，$y=f(x)$ 称为直接函数．

反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形是关于直线 $y=x$ 为轴的对称图形（图 1·6）．利用这种对称关系很容易从直接函数 $y=f(x)$ 的图形获得其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形．例如，作抛物线 $y=x^2$（图 1·7 的实曲线）关于 $y=x$ 的对称图形（图 1·7 的虚曲线），就得到它的反函数 $y=\pm\sqrt{x}$ 的图形．

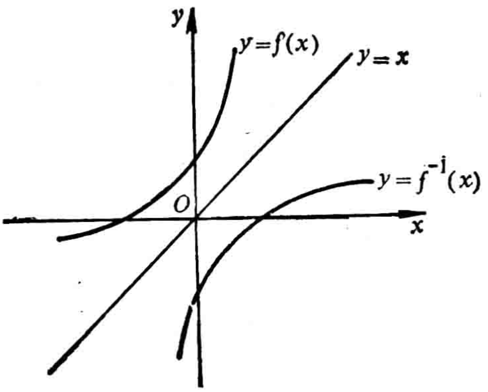

图 1·6

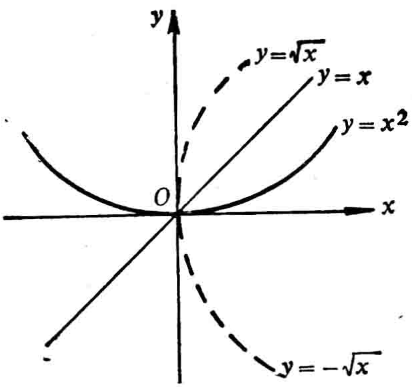

图 1·7

三、函数的几种特性

1 单值性与多值性 对于自变量 x 的每一个取值，函数 y 仅有一个确定的值与之对应，这样的函数叫做单值函数；否则叫做多值函数．例如二次函数 $y=x^2$ 是单值函数，它的反函数 $y=\pm\sqrt{x}$ 是多值函数（图 1·7）．

几何上看，过定义域内任一点作 y 轴的平行直线，如果它与该函数图形的交点不多于一点，则函数是单值函数；否则是多值函数．以后凡是没有特别说明，所研究的函数都是单值函数．

2 单调性 函数 $f(x)$ 对于区间（a，b）内任意两点 x_1 与 x_2（$x_1<x_2$），如果有

$$f(x_1)<f(x_2)$$

成立，则称函数 $f(x)$ 在区间（a，b）内是单调增加的（递增）；如果有

$$f(x_1)>f(x_2)$$

成立，则称函数 $f(x)$ 在区间（a，b）内是单调减少的（递减）；单调增加的函数和单调减少的函数统称为单调函数，区间（a，b）叫做单调区间．

单调增加的函数在区间内随 x 的增大而增大；单调减少的函数在区间内随 x 的增大而减小．例如函数 $y=x^2$ 在区间 $[0,+\infty)$ 内是单调增加的；在区间 $(-\infty,0]$ 内是单调减少的（图 1·7）．

可以证明：单调函数一定有反函数．

3 有界性 对于函数 $y=f(x)$ 的定义域（或定义域的一部分）内的一切 x 值，若存在一个正数 M，使函数的对应值 $f(x)$ 满足不等式．

$$|f(x)|\leqslant M$$

则称 $f(x)$ 在定义域（或定义域的一部分）内有界，否则叫做无界．例如，$y=\dfrac{1}{x}$ 在区间（1，2）内有界，而在区间（0，1）内无界．

4 奇偶性 在定义域内，若函数 $y=f(x)$ 的自变量 x 改变符号时，函数值也只改变符号，即 $f(-x)=-f(x)$，则称此函数为奇函数；若 x 改变符号，函数值不变，即 $f(-x)=f(x)$，则称此函数为偶函数．例如，函数 $y=x^3$ 及 $y=\sin x$ 都是奇函数；函数 $y=x^2$ 及 $y=\cos x$ 都是偶函数；函数 $y=1+\sin x$ 既不是奇函数也不是偶函数．

根据奇函数与偶函数的定义，不难得出，奇函数的图形一定对称于原点；偶函数的图形一定对称于 y 轴．

5 周期性 在定义域内，若函数 $y=f(x)$ 满足

$$f(x+T)=f(x),\quad (T\neq 0)$$

则称此函数为周期函数．使上述关系式成立的最小正数 T 叫做周期．

例如，正弦函数 $y=\sin x$ 是周期函数，它的周期是 2π，正切函数 $y=\operatorname{tg}x$ 也是周期函数，它的周期是 π．

练　习 1·1

1．什么叫做常量？什么叫做变量？举例说明之．

2．求下列各函数的值：

(1) 设 $f(x)=2x^3-1$，求 $f(0)$，$f(\frac{1}{2})$，$f(-3)$，$f(a+b)$，$f(a^2)$，$f(2x)$；

(2) 设 $g(x)=\lg x$，求 $g(10)-g(1)$，$g(10^3)-g(\frac{1}{10^2})$；

(3) 设 $h(x)=5$，求 $h(-1)$，$h(2)$，$h(3)-h(-3)$．

3．求下列函数的定义域：

(1) $y=10^{x+1}$；　　(2) $y=\dfrac{1}{\sqrt{2x^2-5x-3}}$；

(3) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}+2\lg(b-x)$；

(4) $y=\sin\sqrt{x}+\sqrt{\lg(x-4)}$．

4．建立下列函数的反函数：

(1) $y=3\sqrt{x^2+1}$；　　(2) $y=1+\lg(x+2)$．

5．什么是有界函数？举例说明函数的单调性．

6．指出下列函数中哪些是奇函数，哪些是偶函数，哪些是非奇非偶函数：

(1) $y=x^4-2x^2$；　　(2) $y=e^x$；

(3) $y=\dfrac{a^x-a^{-x}}{2}$，$(a>1)$；　　(4) $y=\dfrac{a^x-a^{-x}}{2}$，$(a>1)$．

7．下列函数中哪些是周期函数？对周期函数指出其周期：

(1) $y=\sin^2 x$；　　(2) $y=\cos 2x$；

(3) $y=\sin\dfrac{1}{x}$；　　(4) $y=\sin(x-2)$．

*第三节　基本初等函数及其图形

函数关系是复杂而多样的，但常见的函数是由下面五种函数构成的．这五种函数被称为基本初等函数．因此，要研究函数，首先应该熟悉基本初等函数的性质．由于基本初等函数的性质在中学里已作过详细讲述，这里仅把它们的主要结果叙述如下．

一、幂　函　数

形如

$$y=x^a,\quad (a\ 为实数)$$

的函数叫做幂函数．

幂函数的性质与 a 有密切的关系．当 $a>0$ 时，幂函数是单调增加的，它们的图形都通过原点和点 (1，1)．图 1·8 表示的就是 $a=\frac{1}{2}$，1，2 的幂函数在第一象限的情形．当 $a<0$ 时，幂函数是单调减少的，它们的图形都以两个坐标轴为渐近线，且都过点 (1，1)．图 1·9 表示的就是 $a=-\frac{1}{2}$，-1，-2 的幂函数在第一象限的情形．