大学公共数学系列

(下册)

高等数学学习指南

■ 湛少锋 桂晓风 王孝礼 黄正华 编著

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

大学公共数学系列

（下册）

高等数学学习指南

■ 湛少锋 桂晓风 王孝礼 黄正华 编著

WUHAN UNIVERSITY PRESS
武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习指南. 下册/湛少锋,桂晓风,王孝礼,黄正华编著. —武汉: 武汉大学出版社,2013. 3
大学公共数学系列
ISBN 978-7-307-10483-9

Ⅰ. 高… Ⅱ. ①湛… ②桂… ③王… ④黄… Ⅲ. 高等数学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 027813 号

责任编辑:顾素萍　　责任校对:王　建　　版式设计:马　佳

出版发行: **武汉大学出版社**　(430072　武昌　珞珈山)
(电子邮件:cbs22@ whu. edu. cn　网址: www. wdp. com. cn)
印刷:武汉中科兴业印务有限公司
开本: 720 × 1000　1/16　印张:27. 75　字数:557 千字　插页:1
版次:2013 年 3 月第 1 版　2013 年 3 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-307-10483-9/O · 488　定价:42. 00 元

前 言

“高等数学”课程是理工科各专业学生必修的一门重要基础理论课，也是硕士研究生入学考试的重点科目，而《高等数学学习指南》则是一本为理工科学生学习“高等数学”课程精心编写的同步学习指导书。

为了帮助理工科学生更好地学习“高等数学”，解决学习过程中可能遇到的困难，加深对基本概念的理解，掌握基本理论、基本方法、基本技巧与规律，把握数学思想，提高数学思维和运用数学知识的能力，我们依据齐民友教授主持，胡新启、湛少锋、黄明、杨丽华、桂晓风编写的《高等数学》（上册、下册）教材，结合数十年来的教学体会与经验以及教材编写的指导思想，编写了《高等数学学习指南》（上册、下册）。本教材既可作为“高等数学”课程的习题课教材，也可作为高等院校师生“高等数学”课程的教学参考书以及准备报考非数学类硕士研究生的学生复习用书。

本教材以章为序，其划分和标题与配套教材一致，每章由“主要内容”（基本概念、基本思想、重要结论、主要方法），“典型例题分析”（主要题型、解题分析、基本技巧），“教材习题全解”，“考研真题解析”四大板块构成。通过这四大板块意在使学生学到探讨理论问题、应用问题的基本数学思想和方法以及运用途径与规律；提高学生计算、推理论证和应变的能力。如果我们所做的这些工作能为广大学生带来有益的帮助，达到预期的效果，那就是我们全体编者最大的心愿。

本教材分上、下两册出版，共 13 章。第 4，5，6，13 章由湛少锋编写；第 3，11，12 章由桂晓风编写；第 2，9，10 章由王孝礼编写；第 1，7，8 章由黄正华编写。全书由湛少锋统稿。

本书的编写自始至终得到武汉大学数学与统计学院和武汉大学出版社的大力支持，武汉大学数学与统计学院樊启斌教授对本书的编写给予了很大的帮助。另外，本书在编写中参阅了大量高等数学教材、辅导教材和研究生考试复习应试教材，这里恕不一一指明出处和作者，在此，我们一并深表感谢。还要特别指出的是，在编写过程中，由湛少锋、胡新启、黄明、桂晓

风、杨丽华老师编写，武汉大学出版社出版的《高等数学学习与提高》（上册、下册），为我们的编写提供了很好的借鉴。

由于编者水平有限，加之时间紧迫，书中难免有不妥甚至错误之处，敬请广大读者和各位同仁批评指正，使本书在教学实践中不断完善起来。

编　者

2012 年 8 月于武汉大学

目　　录

第 8 章 向量代数与空间解析几何

一、主 要 内 容

1. 向量的概念及其代数运算

■ 向量的概念

向量的定义 既有大小又有方向的量称为向量，记为$\overrightarrow{M_1M_2}$(其中 M_1 是起点，M_2 是终点)，或简记为 $\boldsymbol{a}$.

向量的模(长度) 向量的大小称为向量的模，记为$|\overrightarrow{M_1M_2}|$或$|\boldsymbol{a}|$.

单位向量 模为1的向量称为单位向量. 与$\boldsymbol{a}$同向的单位向量以$\boldsymbol{e}_a$表示. $\boldsymbol{e}_a=\dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$，或$\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\boldsymbol{e}_a$.

负向量 与向量 $\boldsymbol{a}$ 大小相等、方向相反的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的负向量，记为$-\boldsymbol{a}$.

零向量 模为零的向量称为零向量(方向任意)，记为 $\mathbf{0}$.

向量的投影 向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影记为 $\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\,\boldsymbol{a}$，满足

$$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\,\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}).$$

投影是一个数量，可以是正数、负数或零，此时两向量的夹角分别为锐角、钝角、直角.

向量 $\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$ 的坐标即为向量在三个坐标轴上的投影：

$$a_x=\mathrm{Prj}_x\,\boldsymbol{a},\quad a_y=\mathrm{Prj}_y\,\boldsymbol{a},\quad a_z=\mathrm{Prj}_z\,\boldsymbol{a}.$$

■ 向量的运算及运算律

向量的数量积(点积、内积) 向量的数量积是一个数量，记为 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，满足

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}}).$$

向量的向量积(叉积、外积) 向量的向量积是一个向量，记为$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，满足

① $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$的大小：$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$；

② $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$的方向：$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$满足右手规则(即$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$垂直于$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$所在的平面).

设$\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$，则

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z,$$

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}.$$

向量的混合积 设$\boldsymbol{a}=(a_x,a_y,a_z)$，$\boldsymbol{b}=(b_x,b_y,b_z)$，$\boldsymbol{c}=(c_x,c_y,c_z)$，它们的混合积记为$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]$，满足

$$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\\c_x&c_y&c_z\end{vmatrix}.$$

■ 向量的数量积、向量积、混合积在几何上的应用

(1) 数量积在几何上的应用

向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$垂直的充分必要条件是$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，即

$$a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0.$$

向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$的夹角

$$(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\arccos\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\arccos(\boldsymbol{e}_a,\boldsymbol{e}_b),$$

其中$\boldsymbol{e}_a,\boldsymbol{e}_b$分别是与向量$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$同方向的单位向量.

(2) 向量积在几何上的应用

以$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$为邻边的平行四边形的面积为$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|$.

既与$\boldsymbol{a}$垂直又与$\boldsymbol{b}$垂直的向量为$k(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$.

向量$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$共线的充分必要条件是$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，即

$$\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}.$$

当b_x,b_y,b_z中有一个或两个为零时，上式应理解为它对应的分子也为零.

(3) 混合积在几何上的应用

以$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$为棱的平行六面体的体积是$|[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]|$. 以$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$为棱形成的四面体的体积是$\frac{1}{6}|[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]|$.

设$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$都不是零向量，则$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$共面的充分必要条件是$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}]=0$.

2. 空间平面与直线

■ 平面方程的常见形式

类型名称	方　程	说　明
点法式	$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$	(A,B,C) 是法向量，(x_0,y_0,z_0) 是平面上的一个点
一般式	$Ax+By+Cz+D=0$	(A,B,C) 是法向量
三点式	$\begin{vmatrix} x-a_1 & y-b_1 & z-c_1 \\ a_2-a_1 & b_2-b_1 & c_2-c_1 \\ a_3-a_1 & b_3-b_1 & c_3-c_1 \end{vmatrix}=0$	平面过三点(a_i,b_i,c_i)，$i=1,2,3$
截距式	$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$	a,b,c 是平面在三个坐标轴上的截距

■ 空间直线方程的常见形式

类型名称	方　程	说　明
一般式	$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$	直线是两个平面的交线
对称式	$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$	(m,n,p) 为方向向量. 当 m,n,p 有一个或两个为零时，应理解为它对应的分子也为零
参数式	$\begin{cases} x=x_0+mt, \\ y=y_0+nt, \\ z=z_0+pt \end{cases}$	t 为参数
两点式	$\frac{x-a_1}{a_2-a_1}=\frac{y-b_1}{b_2-b_1}=\frac{z-c_1}{c_2-c_1}$	直线过两点(a_i,b_i,c_i)，$i=1,2$

■ 点、线、面间的关系

点(x_0,y_0,z_0)到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离为

$$d=\left|\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|.$$

点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 到直线$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$的距离为

$$d=\frac{|\overrightarrow{P_1P_0}\times \boldsymbol{s}|}{|\boldsymbol{s}|},$$

其中 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 是直线上的点，$\boldsymbol{s}=(m,n,p)$ 为直线的方向向量.

两平面的夹角 平面的夹角体现为两个法向量的夹角.

两直线的夹角 直线的夹角体现为两个方向向量的夹角.

直线与平面的夹角 设直线 l 的方向向量为 $\boldsymbol{s}=(m,n,p)$，平面 π 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(A,B,C)$，则两者的夹角 $\varphi=\left|\frac{\pi}{2}-(\widehat{\boldsymbol{s},\boldsymbol{n}})\right|$，且

$$\sin\varphi=|\cos(\widehat{\boldsymbol{n},\boldsymbol{s}})|=\left|\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{s}}{|\boldsymbol{n}|\,|\boldsymbol{s}|}\right|\frac{|mA+nB+pC|}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

平面束方程 过直线

$$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$$

的平面束方程为

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0.$$

3. 空间曲线与曲面

■ 空间曲面方程

一般方程：$F(x,y,z)=0$.

参数方程：$\begin{cases}x=x(u,v),\\y=y(u,v),\\z=z(u,v),\end{cases}$ 其中 u,v 是独立的参变量.

■ 空间曲线方程

一般方程：$\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\G(x,y,z)=0.\end{cases}$

参数方程：$\begin{cases}x=x(t),\\y=y(t),\\z=z(t),\end{cases}$ t 是参变量.

■ 旋转曲面

曲线 l：$\begin{cases}f(x,y)=0,\\z=0\end{cases}$ 绕 x 轴旋转所生成的旋转曲面方程为

$$f(x, \pm\sqrt{y^2+z^2}) = 0,$$

绕 y 轴旋转所生成的旋转曲面方程为

$$f(\pm\sqrt{x^2+z^2}, y) = 0.$$

其他的情形有类似的结果.

■ 空间曲线在坐标面上的投影曲线的方程

空间曲线 l: $\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$ 从方程组中消去 z 得关于 xOy 平面的投影柱面 $H(x,y)=0$，l 在 xOy 平面上的投影曲线为

$$\begin{cases} H(x,y)=0, \\ z=0. \end{cases}$$

类似地可以得到曲线 l 在其他坐标面上的投影方程.

二、典型例题分析

【例 1】 判断下列命题是否正确，并说明理由：

(1) 若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 或者 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$;

(2) 若 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 或者 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$;

(3) 若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$，且 $\boldsymbol{c}\neq\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$;

(4) 若 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$，且 $\boldsymbol{c}\neq\boldsymbol{0}$，则 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$;

(5) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}$;

(6) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})$.

解 (1) 此命题错误. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ 成立的充要条件是 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$. 两个非零向量的数量积可能等于零. 例如：对 $\boldsymbol{a}=(1,0,0)$，$\boldsymbol{b}=(0,1,0)$，有 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

(2) 此命题错误. $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ 成立的充要条件是 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$.

(3) 此命题错误. $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$ 等价于 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=0$，如第(1)题的原因，不能得到 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ 即 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

(4) 此命题错误. $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$ 等价于 $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}$，如第(2)题的原因，不能得到 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ 即 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

(5) 此命题错误. 事实上，

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b},$$

或进一步等于 $-2\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$. 注意 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

(6) 此命题错误. 错误原因同上：向量积不满足交换律.

【例 2】 已知向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 两两垂直，且 $|\boldsymbol{a}|=1$, $|\boldsymbol{b}|=2$, $|\boldsymbol{c}|=3$. 设 $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$，求 $\boldsymbol{s}$ 的长度以及 $\boldsymbol{s}$ 与 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的夹角.

解 由于

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{s}|^2=\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{s}&=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\\&=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c},\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2=1$, $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|^2=4$, $\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{c}|^2=9$，又 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 两两垂直，有 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}=0$，所以 $|\boldsymbol{s}|^2=1+4+9=14$，得 $|\boldsymbol{s}|=\sqrt{14}$.

由于

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{s},\boldsymbol{a}})=\frac{\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{s}|\,|\boldsymbol{a}|}=\frac{(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot\boldsymbol{a}}{\sqrt{14}}=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}}{\sqrt{14}}=\frac{1}{\sqrt{14}},$$

故 $(\widehat{\boldsymbol{s},\boldsymbol{a}})=\arccos\dfrac{1}{\sqrt{14}}$. 同理得 $(\widehat{\boldsymbol{s},\boldsymbol{b}})=\arccos\dfrac{2}{\sqrt{14}}$，$(\widehat{\boldsymbol{s},\boldsymbol{c}})=\arccos\dfrac{3}{\sqrt{14}}$.

【例 3】 已知向量 $\overrightarrow{AB}=(-3,0,4)$，$\overrightarrow{AC}=(5,-2,-14)$，求 $\angle BAC$ 角平分线上的单位向量.

解 由于 $\boldsymbol{e}_{\overrightarrow{AB}}=\dfrac{1}{5}(-3,0,4)$，$\boldsymbol{e}_{\overrightarrow{AC}}=\dfrac{1}{15}(5,-2,-14)$，且

$$\boldsymbol{e}_{\overrightarrow{AB}}+\boldsymbol{e}_{\overrightarrow{AC}}=-\frac{2}{15}(2,1,1),$$

故向量 $\boldsymbol{a}=(2,1,1)$ 为 $\angle BAC$ 角平分线方向的向量，所求单位向量为

$$\pm\boldsymbol{e}_a=\pm\frac{1}{\sqrt{6}}(2,1,1).$$

【例 4】 证明直线 l_1: $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-2}{8}=\dfrac{z-3}{1}$ 和 l_2: $\dfrac{x-1}{4}=\dfrac{y-2}{7}=\dfrac{z-3}{3}$ 相交，并求它们夹角的平分线 l 的方程.

解 两直线都经过点 $P(1,2,3)$，方向向量分别为 $\boldsymbol{s}_1=(3,8,1)$，$\boldsymbol{s}_2=(4,7,3)$，$\boldsymbol{s}_1$ 与 $\boldsymbol{s}_2$ 不平行，故两直线相交.

由于 $|\boldsymbol{s}_1|=|\boldsymbol{s}_2|=\sqrt{74}$，于是角平分线所在的方向向量可能为

$$\boldsymbol{s}_1+\boldsymbol{s}_2=(7,15,4)\quad 或\quad \boldsymbol{s}_1-\boldsymbol{s}_2=(-1,1,-2).$$

注意到 $\boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{s}_2=12+56+3>0$，知 $\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2$ 的夹角为锐角，故两直线的夹角取

为$(\widehat{s_1,s_2})$，从而 s_1+s_2 是所求角分线 l 的方向向量，得 l 的方程为

$$\frac{x-1}{7}=\frac{y-2}{15}=\frac{z-3}{4}.$$

【例 5】　确定常数 a，使直线 l_1：$\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{a}$ 垂直于平面 π_1：$3x+6y+3z+25=0$，并求此时直线 l_1 在平面 π_2：$x-y+z-2=0$ 上的投影直线 l_2 的方程.

解　直线 l_1 的方向向量为 $\boldsymbol{s}=(1,2,a)$，平面 π_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}_1=(3,6,3)$. 由已知条件得 $\boldsymbol{s}\parallel\boldsymbol{n}_1$，即$\frac{1}{3}=\frac{2}{6}=\frac{a}{3}$，故 $a=1$.

投影直线 l_2 的求法这里给出以下三种.

方法 1　先求过直线 l_1 且与平面 π_2 垂直的平面 π 的方程，平面 π 与 π_2 的交线即为所求曲线. 记平面 π_2，π 的法向量分别为 $\boldsymbol{n}_2$，$\boldsymbol{n}$，则 $\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{s}$，$\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{n}_2$. 由于

$$\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{n}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=3\boldsymbol{i}-3\boldsymbol{k},$$

可取 $\boldsymbol{n}=(1,0,-1)$. 又直线 l_1 过点 $P(1,-2,1)$，则点 P 也在平面 π 上，从而得平面 π 的点法式方程：

$$1\cdot(x-1)+0\cdot(y+2)+(-1)\cdot(z-1)=0,$$

即 $x-z=0$. 故所求投影直线 l_2 的方程为

$$\begin{cases}x-z=0,\\ x-y+z-2=0.\end{cases}$$

方法 2　直线 l_1 的一般方程为

$$\begin{cases}\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{2},\\[2mm] \dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-1}{1},\end{cases}\text{即}\begin{cases}2x-y-4=0,\\ y-2z+4=0.\end{cases}$$

过 l_1 的平面束为 $2x-y-4+\lambda(y-2z+4)=0$，即

$$2x+(\lambda-1)y-2\lambda z+(4\lambda-4)=0.$$

要使平面束中的平面 π 与平面 π_2 垂直，则 λ 须满足 $2\cdot1-(\lambda-1)-2\lambda=0$，即 $\lambda=1$. 于是得投影直线 l_2 的方程为

$$\begin{cases}x-z=0,\\ x-y+z-2=0.\end{cases}$$

方法 3　在直线 l_1 上取一点 $M(2,0,2)$，求其在平面 π_2 上的投影点 N.

过点 M 且垂直于平面 π_2 的直线方程为 $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-2}{1}$，由

$$\begin{cases}\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-2}{1},\\ x-y+z-2=0,\end{cases}$$

得交点 $N\left(\dfrac{4}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{4}{3}\right)$. 再联立直线 l_1 与平面 π_2 的方程，得直线 l_1 与平面 π_2 的交点为 $Q\left(\dfrac{1}{3},-\dfrac{4}{3},\dfrac{1}{3}\right)$. 于是过点 Q,N 的直线即为所求投影直线 l_2：

$$\frac{x-\frac{4}{3}}{1}=\frac{y-\frac{2}{3}}{2}=\frac{z-\frac{4}{3}}{1}.$$

【例6】 求直线 l_1：$\dfrac{x-9}{4}=\dfrac{y+2}{-3}=\dfrac{z}{1}$ 与直线 l_2：$\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y+7}{9}=\dfrac{z-2}{2}$ 的公垂线 l 的方程.

解法 1（一般式） 记所求公垂线为 l. 过直线 l_1 和 l 作平面 π_1，过直线 l_2 和 l 作平面 π_2，平面 π_1 与 π_2 的交线即为公垂线 l.

直线 l_1 和 l_2 的方向向量分别为 $\boldsymbol{s}_1=(4,-3,1)$，$\boldsymbol{s}_2=(-2,9,2)$. 由于

$$\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 4 & -3 & 1\\ -2 & 9 & 2\end{vmatrix}=-15\boldsymbol{i}-10\boldsymbol{j}+30\boldsymbol{k},$$

可取公垂线 l 的方向向量为 $\boldsymbol{s}=(3,2,-6)$.

平面 π_1 过直线 l_1 和 l，则其法向量为

$$\boldsymbol{n}_1=\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 4 & -3 & 1\\ 3 & 2 & -6\end{vmatrix}=16\boldsymbol{i}+27\boldsymbol{j}+17\boldsymbol{k}.$$

直线 l_1 过点 $P(9,-2,0)$，则 π_1 也过该点. 得 π_1 的点法式方程为

$$16(x-9)+27(y+2)+17(z-0)=0,$$

即 $16x+27y+17z-90=0$.

同理可得过直线 l_2 和 l 的平面 π_2 的方程：

$$58x+6y+31z-20=0.$$

于是平面 π_1 与 π_2 的交线即为所求公垂线 l，其方程为

$$\begin{cases}16x+27y+17z-90=0,\\ 58x+6y+31z-20=0.\end{cases}$$

解法 2（点向式） 沿用解法 1 中的结果，求出直线 l_2 与平面 π_1 的交点，

即直线 l 与 l_2 的垂足. 由

$$\begin{cases}\dfrac{x}{-2}=\dfrac{y+7}{9}=\dfrac{z-2}{2},\\ 16x+27y+17z-90=0,\end{cases}$$

解得交点为$(-2,2,4)$，得公垂线 l 的点向式方程：

$$\frac{x+2}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-4}{-6}.$$

解法 3（两点式）　设公垂线 l 与直线 l_1,l_2 的交点分别为 $M(x_1,y_1,z_1)$，$N(x_2,y_2,z_2)$，则 M,N 分别满足 l_1,l_2 的(参数) 方程，故

$$\begin{cases}x_1=9+4t,\quad y_1=-2-3t,\quad z_1=t,\\ x_2=-2\lambda,\quad y_2=-7+9\lambda,\quad z_2=2+2\lambda.\end{cases}$$

从而$\overrightarrow{MN}=(-2\lambda-4t-9,9\lambda+3t-5,2\lambda-t+2)$. 又$\overrightarrow{MN}\perp l_1$，$\overrightarrow{MN}\perp l_2$，所以

$$\begin{cases}4(-2\lambda-4t-9)-3(9\lambda+3t-5)+(2\lambda-t+2)=0,\\ -2(-2\lambda-4t-9)+9(9\lambda+3t-5)+2(2\lambda-t+2)=0,\end{cases}$$

即$\begin{cases}33\lambda+26t+19=0,\\ 89\lambda+33t-23=0,\end{cases}$ 解得$t=2$，$\lambda=1$. 从而M,N的坐标分别为$(1,4,-2)$，$(-2,2,4)$，且$\overrightarrow{MN}=(-3,-2,6)$. 得公垂线 l 的方程为

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y-4}{2}=\frac{z+2}{-6}.$$

【例 7】　考查两直线 l_1：$\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{-3}$ 和 l_2：$\begin{cases}x=4t+2,\\ y=-t+3,\\ z=2t-4\end{cases}$ 是否相交. 如相交，求其交点；如不相交，求其距离 d.

解　直线 l_1 过点 $P(-1,1,0)$，方向向量为 $\boldsymbol{s}_1=(2,1,-3)$；直线 l_2 过点 $Q(2,3,-4)$，方向向量为 $\boldsymbol{s}_2=(4,-1,2)$. 因为

$$[\overrightarrow{PQ},\boldsymbol{s}_1,\boldsymbol{s}_2]=\begin{vmatrix}3&2&-4\\2&1&-3\\4&-1&2\end{vmatrix}=-11\neq0,$$

所以 l_1,l_2 是异面直线. 下面求距离 d.

方法 1　过直线 l_1 作平面 π 与直线 l_2 平行，则 l_2 上任意一点到 π 的距离都等于所求距离 d. 由于

$$s_1\times s_2=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix}=-i-16j-6k,$$

取平面 π 的法向量为 $n=(1,16,6)$. 又平面 π 经过直线 l_1 上的点 $P(-1,1,0)$，故平面 π 的方程为

$$1\cdot(x+1)+16\cdot(y-1)+6\cdot(z-0)=0,$$

即 $x+16y+6z-15=0$. 直线 l_2 上的一点 $Q(2,3,-4)$ 到平面 π 的距离即为所求：

$$d=\frac{|2+16\times 3+6\times(-4)-15|}{\sqrt{1^2+16^2+6^2}}=\frac{11}{\sqrt{293}}.$$

方法 2　设公垂线的方向向量为 s，则 l_1,l_2 上任意两点构成的向量在 s 上投影的绝对值即为所求异面直线距离. 由于

$$s_1\times s_2=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix}=-i-16j-6k,$$

取 $s=(1,16,6)$. 又点 P,Q 分别是直线 l_1,l_2 上的点，$\overrightarrow{PQ}=(3,2,-4)$，故

$$d=|\mathrm{Prj}_s\overrightarrow{PQ}|=\left|\frac{\overrightarrow{PQ}\times s}{|s|}\right|=\left|\frac{3\times 1+2\times 16-4\times 6}{\sqrt{1^2+16^2+6^2}}\right|=\frac{11}{\sqrt{293}}.$$

【例 8】　求过点 $P(-1,2,-3)$ 且平行于平面 π: $6x-2y-3z+10=0$，又与直线 l_1: $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-3}{-5}$ 相交的直线 l_2 的方程.

解法 1（直线的一般方程）　过点 P 作与平面 π 平行的平面 π_1，则 π_1 的方程为

$$6(x+1)-2(y-2)-3(z+3)=0,$$

即 $6x-2y-3z+1=0$.

直线 l_1 过点 $Q(1,-1,3)$，方向向量为 $s=(3,2,-5)$. 由于

$$\overrightarrow{PQ}\times s=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -3 & 6 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix}=3i+28j+13k,$$

则过点 P 及直线 l_1 的平面 π_2 的方程为

$$3(x+1)+28(y-2)+13(z+3)=0,$$

即 $3x+28y+13z-14=0$.

所求直线 l_2 即在平面 π_1 内，也在平面 π_2 内，得直线 l_2 的一般方程为