

研究生数学系列规划教材

拓扑学

江辉有◎编著

TOPOLOGY



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS



研究生数学系列规划教材

拓 扑 学

江辉有 编著



机械工业出版社

本书是一本拓扑学的基础教材，全书分成三十二讲，内容包括三个部分：点集拓扑学部分、代数拓扑学部分和拓扑群部分，重点放在前两部分。前十三讲属于点集拓扑学部分，主要讲点集拓扑学的基本概念，连续映射与同胚，拓扑空间的几种常见运算（如积空间、商空间等）以及主要的拓扑性质（如分离性、可数性、紧性、连通性等），并简要地介绍了曲面分类、函数空间和网与滤子的基本知识；第十四至二十九讲属于代数拓扑学部分，主要讲基本群、复叠空间、单纯同调群及相关的基本知识及其经典的应用；最后三讲属于拓扑群部分，主要介绍一些基本概念。本书内容丰富（有意识地编入了许多资料性的内容），结构严谨，叙述深入浅出，定理证明详尽明白。为便于理解，还配备了相当数量的图形、大量的例题和书后习题。

本书可作为综合性大学数学系和师范院校高年级本科生的教学用书，也可以作为非拓扑学专业的数学系研究生学位课的教材，对于其他数学工作者而言，也是一本好用的拓扑学参考资料。

图书在版编目（CIP）数据

拓扑学/江辉有编著. —北京：机械工业出版社，2013.2
研究生数学系列规划教材
ISBN 978-7-111-41213-7

I. ①拓… II. ①江… III. ①拓扑—研究生—教材 IV. ①0189

中国版本图书馆CIP数据核字（2013）第011906号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号 邮政编码100037）

策划编辑：韩效杰 责任编辑：韩效杰 汤嘉

版式设计：张薇 责任校对：张媛

封面设计：路恩中 责任印制：乔宇

北京机工印刷厂印刷（三河市南杨庄国丰装订厂装订）

2013年3月第1版第1次印刷

184mm×240mm·27印张·463千字

标准书号：ISBN 978-7-111-41213-7

定价：49.80元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务

网络服务

社服务中心：(010) 88361066 教材网：<http://www.cmpedu.com>

销售一部：(010) 68326294 机工官网：<http://www.cmpbook.com>

销售二部：(010) 88379649 机工官博：<http://weibo.com/cmp1952>

读者购书热线：(010) 88379203 封面防伪标均为盗版

符号说明

$\mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{C}, \mathbb{Q}, \mathbb{N}$	分别为实数集; 整数集 (整数加法群); 复数集; 有理数集
$\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^n$	(有理数域); 自然数集; 实直线; n -维欧氏空间
$\mathbb{R}^+, \mathbb{Z}^+, \mathbb{R}^n_+$	正实数集; 正整数集; 上半空间
\emptyset	空集
$\in (\notin)$	属于 (不属于)
2^X (或 $\mathcal{P}X$)	集合 X 的幂集
$\subset (\supset)$	包含于 (包含)
$\cup (\bigcup_{\lambda \in \Lambda})$	并 (指标集为 Λ 的集族的并)
$\cap (\bigcap_{\lambda \in \Lambda})$	交 (指标集为 Λ 的集族的交)
$A - B$	集合 A 减去集合 B
$ A $	集合 A 的基数
\amalg	(集合或空间的) 不交并
\times	(集合或空间的) 笛卡儿积, (群的) 直积
$\prod_{\lambda \in \Lambda}$	指标集为 Λ 的集族 (空间) 的笛卡儿积
$X/\sim (X/R)$	集合 X 关于等价关系 $\sim (R)$ 的商集, 拓扑空间 X 关于等价关系 $\sim (R)$ 的商空间
X/A	把 X 的子集 A 捏成一点所得的商空间
$A^\circ, \text{Int}A, \bar{A}, \text{Fr}A, A'$	集合 A 的内部; 集合 A 的闭包; 集合 A 的边界; 集合 A 的导集
$N(x)$	点 x 的邻域系
$B(x, \varepsilon)$	x 为中心, ε 为半径的球形邻域
$f _A$	映射 f 在集合 A 上的限制
A_1, A_2 (或 C_1, C_2)	第一可数性, 第二可数性
$AR(\text{normal})$	正规空间的绝对收缩核
$\text{Comp}_x(x)$	拓扑空间 X 的含有点 x 的连通分支
∂	边缘(算子), 边界
S^n	n -球面
D^n	n -球(体)
T^2	环面
$CX, \Sigma X$	X 上的拓扑锥, X 上的双角锥



$X \cup_f Y$	$X \supset A \xrightarrow{f} Y$ 的贴空间
$X * Y$	拓扑空间 X 和 Y 的统联
Zf, Cf	映射柱, 映射锥
nT^2	亏格为 n 的可定向曲面
P^2	射影平面
nP^2	亏格为 n 的不可定向曲面
Y^X (或 $C(X, Y)$)	从空间 X 到空间 Y 的所有连续函数构成的集合
\approx	同伦, 同伦等价
\approx	定端同伦
$\approx \text{rel}$	相对同伦
$[X, Y]$	从拓扑空间 X 到空间 Y 的映射同伦类的集合
$[X]$	拓扑空间 X 的全体道路类的集合
$\langle a \rangle, \langle c \rangle$	道路 a 的定端同伦类, 链 c 的同调类
$\pi_1(X, x_0), \pi_1(X)$	基本群
$q(a)$	单位圆周 S^1 上闭路 a 的圈数
(\tilde{X}, p)	复叠空间
$T(\tilde{X}, p)$	复叠空间变换群
$L(p, q)$	透镜空间
*	道路的乘积, 群的自由积
f_π	由连续映射 f 诱导的基本群同态
$\bigvee_{i=1}^n$	(可兼)或, 拓扑空间的蒂联(n 个拓扑空间的蒂联)
$\text{Im}f$	映射 f 的象
$\text{ker}f$	同态 f 的核
\tilde{G}	群 G 的交换化
\mathbb{Z}_2	二阶循环群
$\ x\ $	x 的范数
\tilde{f}	f 的提升
$\underline{t} < \underline{s}$	单形 \underline{t} 是单形 \underline{s} 的一个面
$\text{Car}_K(x)$	复形 K 的在 $x \in K $ 处的承载单形
Cl_s	单形 \underline{s} 的闭包复形
Bd_s	单形 \underline{s} 的边缘复形
$[s; t]$	定向单形 s 和 t 的关联系数
K^r	复形 K 的 r 维骨架
∂_q	q -维边缘同态
$C_q(K)$	复形 K 的 q -维链群
$B_q(K)$	复形 K 的 q -维边缘链群
$Z_q(K)$	复形 K 的 q -维闭链群
$H_q(K)$	复形 K 的 q -维同调群



$\tilde{H}_q(K)$	复形 K 的 q -维简约同调群
$\varepsilon(c)$	0-维链 c 的 Kronecker 指数
$C_q(K, G)$	复形 K 的 G 系数 q -维链群
$B_q(K, G)$	复形 K 的 G 系数 q -维边缘链群
$Z_q(K, G)$	复形 K 的 G 系数 q -维闭链群
$H_q(K, G)$	复形 K 的 G 系数 q -维同调群
$\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} (\bigoplus)$	(群的)直和
β_q	q -维 Betti 数
$\chi(K)$	复形 K 的欧拉示性数
φ_{*q}	由单纯映射 φ 诱导的同调群同态
f_{*q}	由连续映射 f 诱导的同调群同态
\hat{s}	单形 s 的重心
$\text{Sd}(K)$	复形 K 的重心重分
$K^{(r)}$	复形 K 的 r 次重心重分
$\text{mesh}(K)$	复形 K 的网距
$\text{St}_K a$	复形 K 在顶点 a 处的星形
$\text{deg}(f)$	映射 f 的映射度
$\text{GL}_n(\mathbb{R})$	一般线性群
$\text{SL}_n(\mathbb{R})$	特殊线性群
$O_n(\mathbb{R}, H) (O_n(\mathbb{R}), O_n)$	正交群
$\text{Sp}_{2n}(\mathbb{R}, H)$	辛群
r_s, l_s	元素 s 的右乘映射, 元素 s 的左乘映射
$\lim_{\leftarrow} A_i$	万有锥(逆极限)

编者序言

本书是在福州大学研究生院的支持下，依据编者在数学与计算机科学学院讲授“拓扑学”课程的讲义整理而成。

拓扑学是数学系一门很重要的基础课程，特别对数学系的研究生而言，更是如此。它的许多概念、方法甚至成了数学的基础语言，在数学许多分支的重要理论的表述中，都有着不可替代的重要应用。因此许多学校都把“拓扑学”作为数学系研究生的一门重要的学位课程。自研究生扩招以来，学生生源的变化以及研究方向的极大扩展，对这门课的教学有了新的要求。

由于扩招等原因，我校数学系的许多研究生在本科阶段并没有学过“点集拓扑学”，甚至没有学过“实变函数与泛函分析”这样的课程，因此总体基础相对较为薄弱。编者从2005年开始接手我系研究生“拓扑学”课程的教学工作以来，感觉到研究生的这种特点越来越明显。据我了解，本科阶段开设“拓扑学”课程的学校越来越少，这种现象在国内高校中有着相当的普遍性。因此，如何选择一本合适的教材就成了首要问题。

根据多年来的教学实践以及各相关专业方向的具体要求，本书在体系结构上，把课程内容分为点集拓扑学、代数拓扑学和拓扑群基础等三个部分。点集拓扑学部分主要讲拓扑学的一些基本概念、研究拓扑空间之间关系的连续映射、主要的拓扑性质以及生成新拓扑空间的方法等；代数拓扑学部分主要讲基本群、复叠空间和单纯同调群以及它们的典型应用；拓扑群部分则只介绍一些基本概念和基本知识。我们把这些内容写成了三十二讲，大部分可以一次课（即两节课）一讲地来讲，少数几讲要用到三到四节课。之所以这样来写，主要原因是编者讲课时用的是电子版教材，可以节省许多书写时间；同时因为受众是研究生，不必每个定理和命题都在课堂上详细讲解。当然，使用本书的同行也可根据自己的实际情况有所取舍，有些部分可以让学生自学。为此，在编写本书时，除了课程本身固有的内在逻辑结构而外，考虑到授课对象的具体情况，课文中的主要定理和命题都尽可能给出详细的证明，并且配备了足够丰富的例子帮助学生理解相关的概念和方法。同时在课文中我们尽可能对一些重要概念注明其最早定义的数学家和年代，以作为补充。学习这门课程，足够的习题是必要的。本书中收集了大量的习题（特别是点集拓扑学部分），有些习题可以看作内容的补充，读者可以当作资料来使用。作为学位课，我系研究生“拓扑学”课程最初是80学时，本书内容基本上可以讲完。后来课时压缩成72学时，只好删去拓扑群部分不讲，也可删去复叠空间部分不讲。



本书可以作为综合性大学高年级本科生或者类似于我校性质的数学系研究生的“拓扑学”课程的教材。若是本科生使用，讲第一部分和第二部分的基本群应该就可以了。如果研究生使用，则可根据课时及专业分布有所取舍，不必全部讲完。第一讲可以让学生自己学习整理，不必在课堂上讲授。

使用本讲义的读者，一般要求熟悉集合论的基本知识(比如集合、映射、关系、笛卡儿积、可数性等)，具有比较好的分析学的基础，同时对于抽象代数的基础知识(比如群、Abel群、自由循环群、同态、同构等等)也要有基本的了解。

在教学过程以及本书的编写过程中，我们参考过许多国内外的教材，点集拓扑学部分主要有 R. Engelking 的《General Topology》，James Dugundji 的《Topology》，蒲保明、蒋继光等的《拓扑学》等；代数拓扑学部分主要有尤承业的《基础拓扑学讲义》，James R. Munkres 的《Elements of Algebraic Topology》等；拓扑群部分主要参考黎景辉，冯绪宁的《拓扑群引论》，L. S. Pontryagin 的《Topological Groups》。此外还参阅了一些其他的参考书，我们把它们列在书后的参考书目中。讲义中引用了许多相关的表述或者证明方法，我们在这里一并向有关作者表示谢意！此外，由于水平所限，书中或有错误之处，欢迎读者批评指正。

目 录

符号说明

编者序言

引言 1

第一部分 点集拓扑学

第一讲 预备知识 10	第五讲 分离性公理与可数性公理 61
1.1 集合代数与关系 10	5.1 分离性公理 61
1.2 函数与等价关系 12	5.2 可数性公理 69
1.3 序关系与选择公理 14	5.3 拓扑性质的可遗传性与可乘性 72
1.4 集合的可数性 18	习题 5 73
1.5* 基数简介 20	第六讲 Uryshon 引理及其应用 76
习题 1 22	6.1 Uryshon 引理 76
第二讲 拓扑空间的基本概念 25	6.2 Tietze 扩张引理 79
2.1 拓扑空间的定义 25	6.3 Uryshon 度量化定理 82
2.2 度量拓扑 27	习题 6 84
2.3 拓扑空间的几个基本概念 28	第七讲 拓扑空间的紧致性与列紧性 87
2.4 子空间 33	7.1 紧致与列紧的定义 88
习题 2 34	7.2 列紧空间的性质 89
第三讲 拓扑空间之间的连续映射与同胚 37	7.3 紧致空间的性质 91
3.1 连续映射的定义 37	习题 7 96
3.2 连续映射的性质 39	第八讲 局部紧性与仿紧性 99
3.3 同胚映射 42	8.1 局部紧性 99
3.4 嵌入与嵌入映射 44	8.2 仿紧性 103
习题 3 44	习题 8 110
第四讲 拓扑基与 Tychonoff 积空间 47	第九讲 连通性与道路连通性 112
4.1 拓扑基与子基 47	9.1 连通性的定义及例子 112
4.2 乘积空间 51	9.2 连通空间的性质 113
习题 4 57	9.3 连通分支 116



9.4 局部连通性	117	11.2 闭曲面	141
9.5 道路及其运算	118	11.3 两类闭曲面	142
9.6 道路连通空间	119	11.4 闭曲面分类定理	144
9.7 道路连通分支	121	习题 11	149
9.8 局部道路连通	122	第十二讲 点网、滤子与收敛性概	
习题 9	125	念的扩张	151
第十讲 商空间与商映射	127	12.1 点网	151
10.1 商空间	127	12.2 滤子	157
10.2 拓扑锥	130	习题 12	160
10.3 贴空间	130	第十三讲 函数空间	162
10.4 映射柱与映射锥	132	13.1 点态收敛拓扑	162
10.5 商映射	133	13.2 \mathbb{R}^x 上的一致收敛拓扑	163
10.6 几个例子	137	13.3 紧开拓扑	166
习题 10	138	13.4 k -空间与 Ascoli 定理	169
第十一讲 闭曲面及其分类	141	习题 13	172
11.1 拓扑流形的概念	141		
第二部分 代数拓扑学			
第十四讲 映射的同伦与基本群		群的同态之间的关系	198
的定义	176	16.2 拓扑空间的同伦等价	200
14.1 映射的同伦	176	16.3 形变收缩核	201
14.2 道路类的逆与乘积	181	16.4 可缩空间	208
14.3 道路类的运算性质	183	习题 16	209
14.4 空间的基本群定义	185	第十七讲 基本群的计算	212
14.5 连续映射诱导的基本群		17.1 Seifert-Van Kampen 定理	212
同态	185	17.2 Seifert-Van Kampen 定理	
14.6 基本群与基点的关系	186	应用举例	216
习题 14	187	17.3 轨道空间与基本群	220
第十五讲 球面 S^n 的基本群	190	习题 17	222
15.1 S^1 的基本群	190	第十八讲 基本群的若干应用	224
15.2 $n \geq 2$ 时 S^n 是单连通的	194	18.1 闭曲面分类定理证明的	
15.3 T^2 的基本群	195	完成	224
习题 15	196	18.2 Brouwer 不动点定理 2 维	
第十六讲 基本群的同伦不变性	198	情形的证明	226
16.1 同伦的映射所诱导的基本		18.3 代数基本定理的证明	227



18.4	曲面的边界问题	227	22.5	以交换群 G 为系数群的同调群	285
18.5	扭结群的 Wirtinger 表示	228	习题 22		286
18.6	平面的分离问题	233	第二十三讲	同调群的基本计算	288
习题 18		235	习题 23		296
第十九讲	复叠空间及其基本性质	236	第二十四讲	单纯映射与单纯逼近	298
19.1	复叠映射与复叠空间	236	24.1	单纯映射	298
19.2	映射的提升问题	240	24.2	单纯映射诱导的同调群的同态	300
19.3	复叠空间的基本群	244	24.3	单纯逼近	303
19.4	复叠空间的分类	249	24.4	重心重分	306
习题 19		250	24.5	单纯逼近存在定理	308
第二十讲	复叠变换与正则复叠空间	253	习题 24		310
20.1	复叠变换	253	第二十五讲	连续映射诱导的同调群同态	313
20.2	正则复叠空间	255	25.1	链复形、链映射和链同伦	313
20.3	泛复叠空间	258	25.2	同调群的重分不变性	317
20.4	四元数简介	261	25.3	诱导同调 $f_{*,q}$ 的定义	320
习题 20		262	25.4	多面体与可剖分空间的同调群	321
第二十一讲	单纯复形的同调群	263	习题 25		324
21.1	单纯形	263	第二十六讲	同调群的同伦不变性	326
21.2	单纯复(合)形	265	26.1	同调群的同伦不变性	326
21.3	多面体与可剖分空间	267	26.2	同调群计算再举例	327
21.4	承载单形	269	习题 26		333
21.5	单形的定向	270	第二十七讲	Mayer-Vietoris 同调序列	334
21.6	链群	270	27.1	简约同调群	334
21.7	边缘同态	271	27.2	相对同调群	335
21.8	同调群	274	27.3	同调代数的基本知识, 正合同调序列	337
习题 21		277	27.4	Mayer-Vietoris 同调序列	342
第二十二讲	同调群的简单性质、 G 系数同调群	280	习题 27		347
22.1	同调群的简单性质	280			
22.2	0-维同调群	281			
22.3	1-维同调群与基本群的关系	282			
22.4	Euler-Poincare 公式	284			



第二十八讲 球面自映射的映射度 及其应用	349	习题 28	361
28.1 球面自映射的映射度的 定义和性质	349	第二十九讲 Lefschetz 不动点定 理	363
28.2 对径映射的映射度及其 应用	352	29.1 代数准备	363
28.3 保径映射的映射度	356	29.2 有限复形 K 的迹数	365
28.4 Borsuk-Ulam 定理	359	29.3 可剖分空间的 Lefschetz 数	367
		习题 29	370
第三部分 拓扑群基础			
第三十讲 拓扑群的基本概念与 基本性质	372	第三十二讲 拓扑群的可乘性、分 离性、连通性与逆极 限	396
30.1 拓扑群的概念	372	32.1 拓扑群的积	396
30.2 拓扑群的性质	374	32.2 拓扑群的分离性	397
习题 30	380	32.3 拓扑群的连通性	401
第三十一讲 拓扑群的子群、商 群与拓扑变换群	382	32.4 逆极限	404
31.1 拓扑群的子群	382	习题 32	407
31.2 拓扑群的商群	385	索引	409
31.3 拓扑变换群	390	参考文献	418
习题 31	394		

引 言

拓扑学以前被人们称作位置分析(拉丁文 *analysis situs*)。拓扑学一词是由英语单词 *topology* 或者德语单词 *topologie* 中文音译而来的,它是 19 世纪中叶德国人 J. B. Listing 提出的,源自希腊文 *τοπος*(位置,或形势)与 *λογος*(学问)。但是它被普遍采纳则是 20 世纪 30 年代以后的事。现在拓扑学一词已经为全世界所通用。

拓扑学实际上是一种几何学,它是研究几何图形的。但是它研究的并不是像欧几里得几何那样的“刚性”的几何性质,而是一种我们称之为拓扑性质的“柔性”的几何性质,粗略地说,就是在做“弹性”变形时不变的性质。我们先看下面几个对拓扑学的发展有着深远影响的早期的例子,以便对拓扑学的研究对象有一个初步的认识。

一笔画问题和哥尼斯堡七桥问题

所谓一笔画问题,是图论中的一个基本问题,是指:平面上由曲线段构成的一个连通图能否一笔画成,使得在每条线上不重复?这相当于这样一个现实问题:地面上的一张路网,每条路只准走一遍,能否走完整张路网?

一笔画问题可以说是由著名的哥尼斯堡七桥问题引出的。

所谓哥尼斯堡七桥问题是这样的:在东普鲁士的哥尼斯堡镇(就是现在俄罗斯的加里宁格勒)的普雷格河上有两个小岛,这两个小岛与河岸由七座桥相互连接(如图 0-1 所示),人们经常在这里散步,有人就提出这样一个问题:能否在一次散步中恰好通过每座桥一次呢?这就是哥尼斯堡七桥问题。

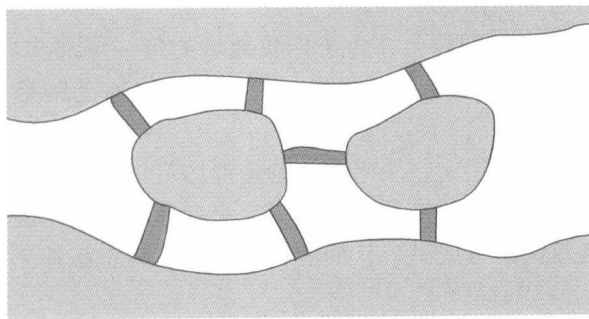


图 0-1



这是一个民间性的有趣的问题，许多人试图去解决它，但是经过很长时间，仍然没有人能够做到。1730 年代中期，欧拉(Euler)知道了这个问题。起初他没有把它当成一个数学问题，而只是当成单独的一个问题进行讨论。最终他解决了这样一条道路存在的一般性问题，不论地域数和桥的数目是多少。

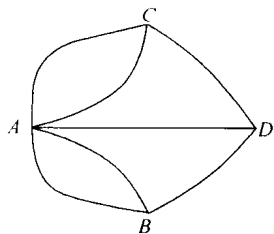


图 0-2

他在 1736 年发表的一篇论文中，他首先提出，如果用字母 A, B, C, D, \dots 来表示这些由桥相互连接的地域(如图 0-2 所示)，那么可以用一串连续的字母来表示一条道路，而不必考虑所走过的具体的桥。比如，字母序列 $ABDA$ 就表示从地域 A 出发，走过地域 B ，再走过地域 D ，最后又回到地域 A 的一条道路。这样立即可以导出：符合要求的一条道路必须含有比桥的数目多 1 的字母数。在哥尼斯堡问题上，这个数必须是 8。其次，欧拉注意到，如果可进入某地域的桥的数目是奇数 k ，则在符合要求的道路中表示代表该地域的字母必须出现 $\frac{k+1}{2}$ 次，此时道路究竟是从哪个地域出发其实是无关紧要的。而如果可进入某地域的桥的数目是偶数 k ，那么当符合要求的道路是从另一地域出发时，其表示式中代表该地域的字母将出现 $\frac{k}{2}$ 次；当符合要求的道路是从该地域出发时，

其表示式中代表该地域的字母将出现 $\frac{k}{2} + 1$ 次。总而言之，欧拉证明：如果有多于两个地域有奇数座桥与之相连，那么符合要求的道路肯定是不存在的；如果恰好有两个地域有奇数座桥与之相连，那么只要从这两个地域的某一个出发，总有一条符合要求的道路存在；如果所有地域都有偶数座桥与之相连，那么这样的道路肯定是存在的。由于欧拉相信，一旦人们知道这种道路是否存在，道路的设计是简单直白的，因此他并没有给出这种道路的具体设计方法。

在哥尼斯堡七桥问题上，由于四块地域的每一块都有奇数座桥(即分别为 5, 3, 3, 3 座桥)与之相连，因此所希望的道路是不可能存在的。

欧拉实际上证明了，一个平面上的连通图可以一笔画成的充分必要条件是最多有两个顶点的度数是奇数。这里度数是指图中经过该顶点的边的总数。这篇论文也成了公认的能找到的真正属于拓扑学的第一篇发表的作品。

类似的问题使当时的一些数学家意识到，存在着某种与欧几里得几



何所研究的性质很不相同的几何性质，它只取决于位置，而与大小等传统的几何性质无关。这在一定程度上催生了拓扑学这一新的数学学科。

欧拉 (Euler) 示性数

1750 年欧拉在一封给克里斯第安·哥德巴赫 (Christian Goldbach 1690—1764) 的信中写道：“我还无法给出下面这个命题的一个完整的、令人满意的证明：在每个多面体中，面数和立体角的总数比边数多 2。”换句话说，给定一个有 v 个顶点， e 条边和 f 个面的多面体，则有 $v + f = e + 2$ 。用更为熟悉的形式表示，就是 $v - e + f = 2$ 。同时欧拉还在信中写道，“让我惊讶的是，据我所知，立体几何的这些一般性质还没有任何其他注意到。”这封信中提到的结果就是熟知的关于凸多面体的欧拉定理，这是关于组合拓扑学的最早成果之一。欧拉在 1751 年向匹茨堡科学院提出了一个证明：通过从多面体中不断切除四面体形的块，可最终使多面体转化为一个四面体，而在每一步的切除时， $v - e + f$ 保持不变。当最后成一个四面体时，可得 $v = f = 4$ ， $e = 6$ ，从而 $v - e + f = 2$ 。这个证明确实有瑕疵，因为这种分析方法是否对任意一个多面体都可行根本不清楚。1794 年法国数学家 A. M. Legendre 给出了一个非常巧妙的证明：在凸多面体的内部取一个点，再作一个以该点为球心的单位球面，并将多面体的表面投影到这个球面上，使得多面体的每个面变成一个球面多边形。由于第 i 个球面多边形的面积有如下公式

$$A_i = \sum_{j=1}^{n_i} \alpha_{ij} - \pi(n_i - 2),$$

其中 α_{ij} 表示该球面多边形的第 j 个角， n_i 表示该球面多边形的边数。由于原多面体的凸性，各球面多边形的面积之和恰好等于球面的面积，从而得到

$$4\pi = \sum_{i=1}^f A_i = \sum_{i=1}^f \left[\sum_{j=1}^{n_i} \alpha_{ij} - \pi(n_i - 2) \right] = 2\pi v - 2\pi e + 2\pi f,$$

由此即可得到欧拉公式。1811 年法国数学家 A. L. Cauchy 还给出过另一个很有意思的证明，同时还推广了欧拉定理。

当多面体的表面有些凹凸弯曲时，平面变成曲面，棱变成曲线，顶点仍然是点，而且上述关系并不会发生改变。这个 $f - e + v$ 称为该多面体表面的 Euler 示性数。

一般来说，设 F 是一个连通曲面，如果用一些线段把它分割成若干个(曲边)三角形面块(称对该曲面作三角剖分)，同样地记面数 f ，线段数 e 和顶点数 v ，又设 $g(F)$ 表示其亏格， $\chi(F)$ 表示其 Euler 示性数， $|\partial F|$ 表示其边界的连通分支数，则有关系式



$$2g(F) + |\partial F| + \chi(F) = 2.$$

例如, 对于球面而言, $g(F) = 0$, $|\partial F| = 0$, 从而 $\chi(F) = 2$. 而凸多面体放到球内部, 通过中心投影, 其表面恰好对应于球面.

对于连通曲面 F 上的图, 指的是由有限个点 (称为顶点) 和有限条曲线 (称为边) 所构成的图, 它必须满足下面三个条件:

- (1) 每条边的端点是两个不同的顶点;
- (2) 不同的边不交叉;
- (3) 每条边不自交.

对于经过三角剖分的连通曲面 F , 设其三角形面数为 f , 边数为 e , 顶点数为 v , 那么同时有如下两个公式成立:

$$\begin{cases} \chi(F) = f - e + v, \\ 2g(F) = 2 - \chi(F) - |\partial F|. \end{cases}$$

比如, 对环面 T 而言, $g(T) = 1$, $|\partial T| = 0$, 从而 $\chi(T) = 0$. 故环面上一个连通图若分割环面成一些简单面块, 则面块数 f , 图的边数 e 和顶点数 v 应满足

$$f - e + v = 0.$$

这和球面情形是不一样的. 这从一个方面也表明了球面与环面在拓扑意义上的不同之处.

图的可平面化问题

对于由顶点和线构成的图 (当然它应该满足前面提到的三个条件), 如果每两个顶点之间都有线相连, 这样的图称为**完全图**. 上面图 0-3 显示的是两个最著名的图. 其中 K_5 有五个顶点, 每两个顶点之间都有线相连, 因此是完全图; 而 $K_{3,3}$ 有六个顶点, 分成两组, 每组三个, 不同组的每对点之间都有线相连, 同组的点之间没有线相连, 因此不是完全图. 这两个图之所以重要, 是因为下面的 Kuratowsky 定理.

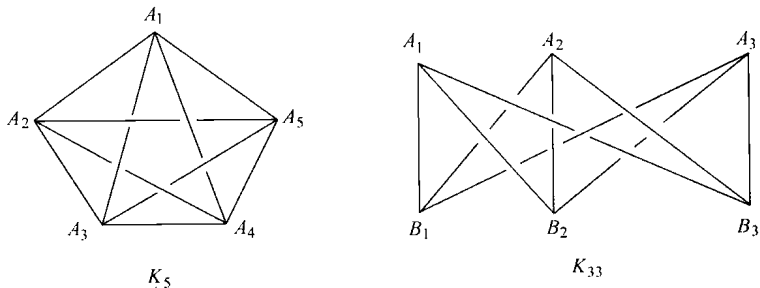


图 0-3

所谓图的可平面化问题就是: 一个图应满足什么条件, 才可以在平面上不自交地被画出来? 这也就是通常说的可嵌入平面的问题. 这里所

谓不自交是指不同的线不会相交，至于线如何回环转曲我们不加限制！我们上面提到的 K_5 和 $K_{3,3}$ 就是典型的不可以平面化的图（我们在本讲的最后部分，附有一个 $K_{3,3}$ 不可以平面化的证明）。图的可平面化方面的一个主要成果如下

Kuratowsky 定理 一个图 G 可以嵌入平面当且仅当 G 不含有与 K_5 或 $K_{3,3}$ 同构的子图。

有意思的是， $K_{3,3}$ 虽然不能嵌入平面，却可以很容易地嵌入 Möbius 带，如图 0-4 所示，就给出了一个具体的嵌入。这也表明了 Möbius 带与平面有着某种意义上的不同！

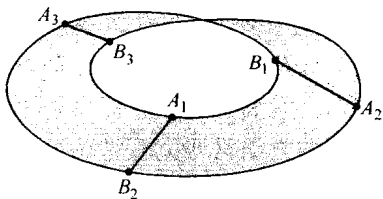


图 0-4

扭结论 (Knot theory) 研究

20 世纪初，随着组合拓扑学的建立，扭结便作为拓扑学的一个分支而发展成为一门数学。传统扭结论主要研究圆周在三维空间 \mathbb{R}^3 中的存在方式以及相关的一些问题。下面的图 0-5 中显示的是三个简单而重要的扭结：

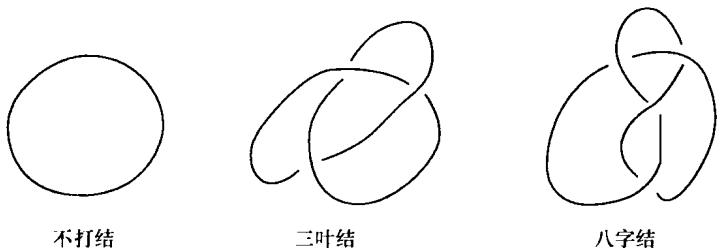


图 0-5

扭结论研究的基本问题主要有：一个扭结 K 是否不打结？两个扭结 K_1 与 K_2 是否环绕同痕（也就是如何区分两个扭结）？扭结 K 与其镜像 K^* 是否环绕同痕等？这里所谓的打结，就是无法不自交地嵌入平面的一种状态。所谓的环绕同痕，粗略地说，就是在不扯断，也不粘连的情况下，两者之间的一种变换。我们已经知道，三叶结与八字结都是打结的，但它们并不相互环绕同痕；八字结与其镜像是环绕同痕的，但是三叶结与其镜像却不环绕同痕。

一个扭结的投影图就是我们通常画立体图那样画出来的扭结图，在每个交叉处，从视线方向看过去位于后方的线要用断线（称为底越），而位于前方的线则用连线（称为跨越）来画。上面的图 0-5 就是这样画出来的投影图。

德国数学家瑞德梅斯特 (Reidemeister) 于 20 世纪 20 年代开始研究