研究生数学系列规划教材

拓扑学

TOPOLOGY

江辉有◎编著

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

研究生数学系列规划教材

拓 扑 学

江辉有 编著

机 械 工 业 出 版 社

本书是一本拓扑学的基础教材，全书分成三十二讲，内容包括三个部分：点集拓扑学部分、代数拓扑学部分和拓扑群部分，重点放在前两部分．前十三讲属于点集拓扑学部分，主要讲点集拓扑学的基本概念，连续映射与同胚，拓扑空间的几种常见运算（如积空间、商空间等）以及主要的拓扑性质（如分离性、可数性、紧性、连通性等），并简要地介绍了曲面分类、函数空间和网与滤子的基本知识；第十四至二十九讲属于代数拓扑学部分，主要讲基本群、复叠空间、单纯同调群及相关的基本知识及其经典的应用；最后三讲属于拓扑群部分，主要介绍一些基本概念．本书内容丰富（有意识地编入了许多资料性的内容），结构严谨，叙述深入浅出，定理证明详尽明白．为便于理解，还配备了相当数量的图形、大量的例题和书后习题．

本书可作为综合性大学数学系和师范院校高年级本科生的教学用书，也可以作为非拓扑学专业的数学系研究生学位课的教材，对于其他数学工作者而言，也是一本好用的拓扑学参考资料．

图书在版编目（CIP）数据

拓扑学/江辉有编著．—北京：机械工业出版社，2013.2
研究生数学系列规划教材
ISBN 978-7-111-41213-7

Ⅰ.①拓…　Ⅱ.①江…　Ⅲ.①拓扑－研究生－教材　Ⅳ.①O189

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 011906 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037）
策划编辑：韩效杰　责任编辑：韩效杰　汤　嘉
版式设计：张　薇　责任校对：张　媛
封面设计：路恩中　责任印制：乔　宇
北京机工印刷厂印刷（三河市南杨庄国丰装订厂装订）
2013 年 3 月第 1 版第 1 次印刷
184mm×240mm · 27 印张 · 463 千字
标准书号：ISBN 978-7-111-41213-7
定价：49.80 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务	网络服务
社服务中心：(010) 88361066	教材网：http://www.cmpedu.com
销售一部：(010) 68326294	机工官网：http://www.cmpbook.com
销售二部：(010) 88379649	机工官博：http://weibo.com/cmp1952
读者购书热线：(010) 88379203	封面无防伪标均为盗版

符 号 说 明

$\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^n$	分别为实数集；整数集（整数加法群）；复数集；有理数集（有理数域）；自然数集；实直线；n－维欧氏空间
$\mathbb{R}^+$, $\mathbb{Z}^+$, $\mathbb{R}^n_+$	正实数集；正整数集；上半空间
$\varnothing$	空集
$\in$ （$\notin$）	属于（不属于）
2^X （或 $\mathscr{P}X$）	集合 X 的幂集
$\subset$ （$\supset$）	包含于（包含）
$\cup$ （$\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}$）	并（指标集为 Λ 的集族的并）
$\cap$ （$\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}$）	交（指标集为 Λ 的集族的交）
$A-B$	集合 A 减去集合 B
$\|A\|$	集合 A 的基数
$\amalg$	（集合或空间的）不交并
$\times$	（集合或空间的）笛卡儿积，（群的）直积
$\prod\limits_{\lambda\in\Lambda}$	指标集为 Λ 的集族（空间）的笛卡儿积
$X/\sim(X/R)$	集合 X 关于等价关系 $\sim(R)$ 的商集，拓扑空间 X 关于等价关系 $\sim(R)$ 的商空间
X/A	把 X 的子集 A 捏成一点所得的商空间
$A^\circ(\mathring{A},\mathrm{Int}A),\bar{A},\mathrm{Fr}A,A'$	集合 A 的内部；集合 A 的闭包；集合 A 的边界；集合 A 的导集
$N(x)$	点 x 的邻域系
$B(x,\ \varepsilon)$	x 为中心，ε 为半径的球形邻域
$f\|_A$	映射 f 在集合 A 上的限制
A_1, A_2（或 C_1, C_2）	第一可数性，第二可数性
AR(normal)	正规空间的绝对收缩核
$\mathrm{Comp}_X(x)$	拓扑空间 X 的含有点 x 的连通分支
∂	边缘（算子），边界
S^n	n－球面
D^n	n－球（体）
T^2	环面
CX, ΣX	X 上的拓扑锥，X 上的双角锥

$X\cup_f Y$	$X\supset A\xrightarrow{f}Y$ 的贴空间
$X*Y$	拓扑空间 X 和 Y 的统联
Zf，Cf	映射柱，映射锥
nT^2	亏格为 n 的可定向曲面
P^2	射影平面
nP^2	亏格为 n 的不可定向曲面
Y^X(或 $C(X, Y)$)	从空间 X 到空间 Y 的所有连续函数构成的集合
$\simeq$	同伦，同伦等价
$\overset{\cdot}{\simeq}$	定端同伦
$\simeq \mathrm{rel}$	相对同伦
$[X, Y]$	从拓扑空间 X 到空间 Y 的映射同伦类的集合
$[X]$	拓扑空间 X 的全体道路类的集合
$\langle a\rangle$，$\langle c\rangle$	道路 a 的定端同伦类，链 c 的同调类
$\pi_1(X, x_0)$，$\pi_1(X)$	基本群
$q(a)$	单位圆周 S^1 上闭路 a 的圈数
$(\tilde{X}, p)$	复叠空间
$T(\tilde{X}, p)$	复叠空间变换群
$L(p, q)$	透镜空间
$*$	道路的乘积，群的自由积
f_π	由连续映射 f 诱导的基本群同态
$\vee$ $(\bigvee_{i=1}^{n})$	(可兼)或，拓扑空间的蒂联(n 个拓扑空间的蒂联)
$\mathrm{Im}f$	映射 f 的象
$\ker f$	同态 f 的核
$\tilde{G}$	群 G 的交换化
$\mathbb{Z}_2$	二阶循环群
$\lVert x\rVert$	x 的范数
$\tilde{f}$	f 的提升
$\underline{t}<\underline{s}$	单形$\underline{t}$是单形$\underline{s}$的一个面
$\mathrm{Car}_K(x)$	复形 K 的在 $x\in\lvert K\rvert$处的承载单形
$\mathrm{Cl}_{\underline{s}}$	单形$\underline{s}$的闭包复形
$\mathrm{Bd}_{\underline{s}}$	单形$\underline{s}$的边缘复形
$[s; t]$	定向单形 s 和 t 的关联系数
K^r	复形 K 的 r 维骨架
∂_q	q－维边缘同态
$C_q(K)$	复形 K 的 q－维链群
$B_q(K)$	复形 K 的 q－维边缘链群
$Z_q(K)$	复形 K 的 q－维闭链群
$H_q(K)$	复形 K 的 q－维同调群

$\tilde{H}_q(K)$	复形 K 的 q-维简约同调群
$\varepsilon(c)$	0-维链 c 的 Kronecker 指数
$C_q(K, G)$	复形 K 的 G 系数 q-维链群
$B_q(K, G)$	复形 K 的 G 系数 q-维边缘链群
$Z_q(K, G)$	复形 K 的 G 系数 q-维闭链群
$H_q(K, G)$	复形 K 的 G 系数 q-维同调群
$\oplus(\bigoplus_{\lambda\in\Lambda})$	(群的)直和
β_q	q-维 Betti 数
$\chi(K)$	复形 K 的欧拉示性数
φ_{*q}	由单纯映射 φ 诱导的同调群同态
f_{*q}	由连续映射 f 诱导的同调群同态
$\underline{\mathring{s}}$	单形 $\underline{s}$ 的重心
$\mathrm{Sd}(K)$	复形 K 的重心重分
$K^{(r)}$	复形 K 的 r 次重心重分
$\mathrm{mesh}(K)$	复形 K 的网距
$\mathrm{St}_K a$	复形 K 在顶点 a 处的星形
$\deg(f)$	映射 f 的映射度
$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$	一般线性群
$\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$	特殊线性群
$O_n(\mathbb{R}, H)(O_n(\mathbb{R}), O_n)$	正交群
$\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{R}, H)$	辛群
r_s, l_s	元素 s 的右乘映射，元素 s 的左乘映射
$\varprojlim A_i$	万有锥(逆极限)

编者序言

本书是在福州大学研究生院的支持下，依据编者在数学与计算机科学学院讲授“拓扑学”课程的讲义整理而成.

拓扑学是数学系一门很重要的基础课程，特别对数学系的研究生而言，更是如此.它的许多概念、方法甚至成了数学的基础语言，在数学许多分支的重要理论的表述中，都有着不可替代的重要应用.因此许多学校都把“拓扑学”作为数学系研究生的一门重要的学位课程.自研究生扩招以来，学生生源的变化以及研究方向的极大扩展，对这门课的教学有了新的要求.

由于扩招等原因，我校数学系的许多研究生在本科阶段并没有学过“点集拓扑学”，甚至没有学过“实变函数与泛函分析”这样的课程，因此总体基础相对较为薄弱.编者从2005年开始接手我系研究生“拓扑学”课程的教学工作以来，感觉到研究生的这种特点越来越明显.据我了解，本科阶段开设“拓扑学”课程的学校越来越少，这种现象在国内高校中有着相当的普遍性.因此，如何选择一本合适的教材就成了首要问题.

根据多年来的教学实践以及各相关专业方向的具体要求，本书在体系结构上，把课程内容分为点集拓扑学、代数拓扑学和拓扑群基础等三个部分.点集拓扑学部分主要讲拓扑学的一些基本概念、研究拓扑空间之间关系的连续映射、主要的拓扑性质以及生成新拓扑空间的方法等；代数拓扑学部分主要讲基本群、复叠空间和单纯同调群以及它们的典型应用；拓扑群部分则只介绍一些基本概念和基本知识.我们把这些内容写成了三十二讲，大部分可以一次课(即两节课)一讲地来讲，少数几讲要用到三到四节课.之所以这样来写，主要原因是编者讲课时用的是电子版教材，可以节省许多书写时间；同时因为受众是研究生，不必每个定理和命题都在课堂上详细讲解.当然，使用本书的同行也可根据自己的实际情况有所取舍，有些部分可以让学生自学.为此，在编写本书时，除了课程本身固有的内在逻辑结构而外，考虑到授课对象的具体情况，课文中的主要定理和命题都尽可能给出详细的证明，并且配备了足够丰富的例子帮助学生理解相关的概念和方法.同时在课文中我们尽可能对一些重要概念注明其最早定义的数学家和年代，以作为补充.学习这门课程，足够的习题是必要的.本书中收集了大量的习题(特别是点集拓扑学部分)，有些习题可以看作内容的补充，读者可以当作资料来使用.作为学位课，我系研究生“拓扑学”课程最初是80学时，本书内容基本上可以讲完.后来课时压缩成72学时，只好删去拓扑群部分不讲，也可删去复叠空间部分不讲.

本书可以作为综合性大学高年级本科生或者类似于我校性质的数学系研究生的“拓扑学”课程的教材．若是本科生使用，讲第一部分和第二部分的基本群应该就可以了．如果研究生使用，则可根据课时及专业分布有所取舍，不必全部讲完．第一讲可以让学生自己学习整理，不必在课堂上讲授．

使用本讲义的读者，一般要求熟悉集合论的基本知识(比如集合、映射、关系、笛卡儿积、可数性等)，具有比较好的分析学的基础，同时对于抽象代数的基础知识(比如群、Abel 群、自由循环群、同态、同构等等)也要有基本的了解．

在教学过程以及本书的编写过程中，我们参考过许多国内外的教材，点集拓扑学部分主要有 R. Engelking 的《General Topology》，James Dugundji 的《Topology》，蒲保明、蒋继光等的《拓扑学》等；代数拓扑学部分主要有尤承业的《基础拓扑学讲义》，James R. Munkres 的《Elements of Algebraic Topology》等；拓扑群部分主要参考黎景辉，冯绪宁的《拓扑群引论》，L. S. Pontryagin 的《Topological Groups》. 此外还参阅了一些其他的参考书，我们把它们列在书后的参考书目中．讲义中引用了许多相关的表述或者证明方法，我们在这里一并向有关作者表示谢意！此外，由于水平所限，书中或有错误之处，欢迎读者批评指正．

目　录

第二部分 代数拓扑学

第三部分　拓扑群基础

引　言

拓扑学以前被人们称作位置分析(拉丁文 analysis situs). 拓扑学一词是由英语单词 topology 或者德语单词 topologie 中文音译而来的，它是 19 世纪中叶德国人 J. B. Listing 提出的，源自希腊文 *τοπος*(位置，或形势)与 *λογος*(学问). 但是它被普遍采纳则是 20 世纪 30 年代以后的事. 现在拓扑学一词已经为全世界所通用.

拓扑学实际上是一种几何学，它是研究几何图形的. 但是它研究的并不是像欧几里得几何那样的"刚性"的几何性质，而是一种我们称之为拓扑性质的"柔性"的几何性质，粗略地说，就是在做"弹性"变形时不变的性质. 我们先看下面几个对拓扑学的发展有着深远影响的早期的例子，以便对拓扑学的研究对象有一个初步的认识.

一笔画问题和哥尼斯堡七桥问题

所谓一笔画问题，是图论中的一个基本问题，是指：平面上由曲线段构成的一个连通图能否一笔画成，使得在每条线上不重复? 这相当于这样一个现实问题：地面上的一张路网，每条路只准走一遍，能否走完整张路网?

一笔画问题可以说是由著名的哥尼斯堡七桥问题引出的.

所谓**哥尼斯堡七桥问题**是这样的：在东普鲁士的哥尼斯堡镇(就是现在俄罗斯的加里宁格勒)的普雷格河上有两个小岛，这两个小岛与河岸由七座桥相互连接(如图 0-1 所示)，人们经常在这里散步，有人就提出这样一个问题：能否在一次散步中恰好通过每座桥一次呢? 这就是哥尼斯堡七桥问题.

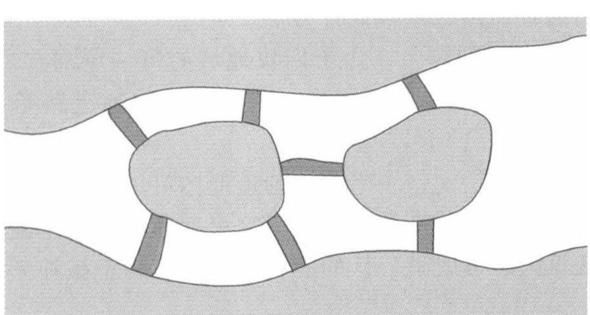

图　0-1

这是一个民间性的有趣的问题，许多人试图去解决它，但是经过很长时间，仍然没有人能够做到．1730年代中期，欧拉(Euler)知道了这个问题．起初他没有把它当成一个数学问题，而只是当成单独的一个问题进行讨论．最终他解决了这样一条道路存在的一般性问题，不论地域数和桥的数目是多少．

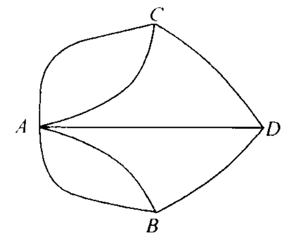

图 0-2

他在1736年发表的一篇论文中，他首先提出，如果用字母 A，B，C，D，…来表示这些由桥相互连接的地域(如图0-2所示)，那么可以用一串连续的字母来表示一条道路，而不必考虑所走过的具体的桥．比如，字母序列 $ABDA$ 就表示从地域 A 出发，走过地域 B，再走过地域 D，最后又回到地域 A 的一条道路．这样立即可以导出：满足要求的一条道路必须含有比桥的数目多1的字母数．在哥尼斯堡问题上，这个数必须是8．其次，欧拉注意到，如果可进入某地域的桥的数目是奇数 k，则在符合要求的道路的表示中代表该地域的字母必须出现$\frac{k+1}{2}$次，此时道路究竟是从哪个地域出发其实是无关紧要的．而如果可进入某地域的桥的数目是偶数 k，那么当符合要求的道路是从另一地域出发时，其表示式中代表该地域的字母将出现$\frac{k}{2}$次；当符合要求的道路是从该地域出发时，其表示式中代表该地域的字母将出现$\frac{k}{2}+1$次．总而言之，欧拉证明：如果有多于两个地域有奇数座桥与之相连，那么符合要求的道路肯定是不存在的；如果恰好有两个地域有奇数座桥与之相连，那么只要从这两个地域的某一个出发，总有一条符合要求的道路存在；如果所有地域都有偶数座桥与之相连，那么这样的道路肯定是存在的．由于欧拉相信，一旦人们知道这种道路是否可能存在，道路的设计是简单直白的，因此他并没有给出这种道路的具体设计方法．

在哥尼斯堡七桥问题上，由于四块地域的每一块都有奇数座桥(即分别为5，3，3，3座桥)与之相连，因此所希望的道路是不可能存在的．

欧拉实际上证明了，一个平面上的连通图可以一笔画成的充分必要条件是最多有两个顶点的度数是奇数．这里度数是指图中经过该顶点的边的总数．这篇论文也成了公认的能找到的真正属于拓扑学的第一篇发表了的作品．

类似的问题使当时的一些数学家意识到，存在着某种与欧几里得几

何所研究的性质很不相同的几何性质，它只取决于位置，而与大小等传统的几何性质无关．这在一定程度上催生了拓扑学这一新的数学学科．

欧拉(Euler)示性数

1750 年欧拉在一封给克里斯第安·哥德巴赫(Christian Goldbach 1690—1764)的信中写道："我还无法给出下面这个命题的一个完整的、令人满意的证明：在每个多面体中，面数和立体角的总数比边数多 2．"换句话说，给定一个有 v 个顶点，e 条边和 f 个面的多面体，则有 $v+f=e+2$. 用更为熟悉的形式表示，就是 $v-e+f=2$. 同时欧拉还在信中写道，"让我惊讶的是，据我所知，立体几何的这些一般性质还没有任何其他人注意到．"这封信中提到的结果就是熟知的关于凸多面体的欧拉定理，这是关于组合拓扑学的最早成果之一．欧拉在 1751 年向匹茨堡科学院提出了一个证明：通过从多面体中不断切除四面体形的块，可最终使多面体转化为一个四面体，而在每一步的切除时，$v-e+f$ 保持不变．当最后成一个四面体时，可得 $v=f=4$，$e=6$，从而 $v-e+f=2$. 这个证明确实有瑕疵，因为这种分析方法是否对任意一个多面体都可行根本不清楚．1794 年法国数学家 A. M. Legendre 给出了一个非常巧妙的证明：在凸多面体的内部取一个点，再作一个以该点为球心的单位球面，并将多面体的表面投影到这个球面上，使得多面体的每个面变成一个球面多边形．由于第 i 个球面多边形的面积有如下公式

$$A_i = \sum_{j=1}^{n_i} \alpha_{ij} - \pi(n_i - 2),$$

其中 α_{ij} 表示该球面多边形的第 j 个角，n_i 表示该球面多边形的边数．由于原多面体的凸性，各球面多边形的面积之和恰好等于球面的面积，从而得到

$$4\pi = \sum_{i=1}^{f} A_i = \sum_{i=1}^{f}\left[\sum_{j=1}^{n_i} \alpha_{ij} - \pi(n_i - 2)\right] = 2\pi v - 2\pi e + 2\pi f,$$

由此即可得到欧拉公式．1811 年法国数学家 A. L. Cauchy 还给出过另一个很有意思的证明，同时还推广了欧拉定理．

当多面体的表面有些凹凸弯曲时，平面变成曲面，棱变成曲线，顶点仍然是点，而且上述关系并不会发生改变．这个 $f-e+v$ 称为该多面体表面的 Euler 示性数．

一般来说，设 F 是一个连通曲面，如果用一些线段把它分割成若干个(曲边)三角形面块(称对该曲面作三角剖分)，同样地记面数 f，线段数 e 和顶点数 v，又设 $g(F)$ 表示其亏格，$\chi(F)$ 表示其 Euler 示性数，$|\partial F|$ 表示其边界的连通分支数，则有关系式

$$2g(F)+|\partial F|+\chi(F)=2.$$

例如，对于球面而言，$g(F)=0$，$|\partial F|=0$，从而 $\chi(F)=2$. 而凸多面体放到球内部，通过中心投影，其表面恰好对应于球面.

对于连通曲面 F 上的图，指的是由有限个点（称为顶点）和有限条曲线（称为边）所构成的图，它必须满足下面三个条件：

（1）每条边的端点是两个不同的顶点；

（2）不同的边不交叉；

（3）每条边不自交.

对于经过三角剖分的连通曲面 F，设其三角形面数为 f，边数为 e，顶点数为 v，那么同时有如下两个公式成立：

$$\begin{cases}\chi(F)=f-e+v,\\ 2g(F)=2-\chi(F)-|\partial F|.\end{cases}$$

比如，对环面 T 而言，$g(T)=1$，$|\partial T|=0$，从而 $\chi(T)=0$. 故环面上一个连通图若分割环面成一些简单面块，则面块数 f，图的边数 e 和顶点数 v 应满足

$$f-e+v=0.$$

这和球面情形是不一样的. 这从一个方面也表明了球面与环面在拓扑意义上的不同之处.

图的可平面化问题

对于由顶点和线构成的图（当然它应该满足前面提到的三个条件），如果每两个顶点之间都有线相连，这样的图称为**完全图**. 上面图 0-3 显示的是两个最著名的图. 其中 K_5 有五个顶点，每两个顶点之间都有线相连，因此是完全图；而 K_{33} 有六个顶点，分成两组，每组三个，不同组的每对点之间都有线相连，同组的点之间没有线相连，因此不是完全图. 这两个图之所以重要，是因为下面的 Kuratowsky 定理.

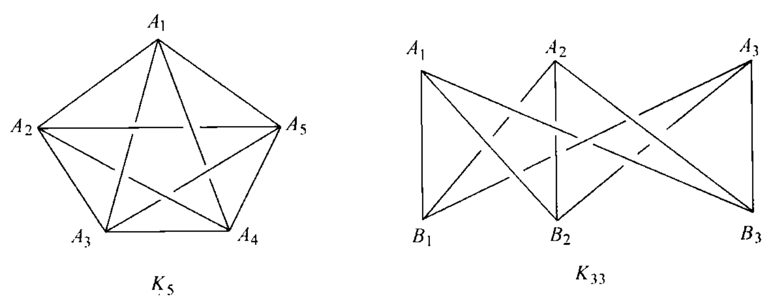

图 0-3

所谓图的可平面化问题就是：一个图应满足什么条件，才可以在平面上不自交地被画出来？这也就是通常说的可嵌入平面的问题. 这里所

谓不自交是指不同的线不会相交，至于线如何回环转曲我们不加限制！我们上面提到的 K_5 和 K_{33} 就是典型的不可以平面化的图（我们在本讲的最后部分，附有一个 K_{33} 不可以平面化的证明）. 图的可平面化方面的一个主要成果如下

Kuratowsky 定理　一个图 G 可以嵌入平面当且仅当 G 不含有与 K_5 或 K_{33} 同构的子图.

有意思的是，K_{33} 虽然不能嵌入平面，却可以很容易地嵌入 Möbius 带，如图 0-4 所示，就给出了一个具体的嵌入. 这也表明了 Möbius 带与平面有着某种意义上的不同！

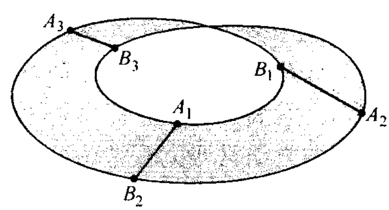

图　0-4

扭结论（Knot theory）研究

20 世纪初，随着组合拓扑学的建立，扭结便作为拓扑学的一个分支而发展成为一门数学. 传统扭结论主要研究圆周在三维空间 $\mathbb{R}^3$ 中的存在方式以及相关的一些问题. 下面的图 0-5 中显示的是三个简单而重要的扭结：

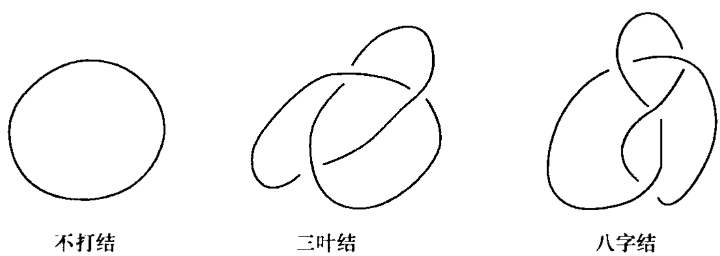

图　0-5

扭结论研究的基本问题主要有：一个扭结 K 是否不打结？两个扭结 K_1 与 K_2 是否环绕同痕（也就是如何区分两个扭结）？扭结 K 与其镜像 K^* 是否环绕同痕等？这里所谓的打结，就是无法不自交地嵌入平面的一种状态. 所谓的环绕同痕，粗略地说，就是在不扯断，也不粘连的情况下，两者之间的一种变换. 我们已经知道，三叶结与八字结都是打结的，但它们并不相互环绕同痕；八字结与其镜像是环绕同痕的，但是三叶结与其镜像却不环绕同痕.

一个扭结的投影图就是我们通常画立体图那样画出来的扭结图，在每个交叉处，从视线方向看过去位于后方的线要用断线（称为底越），而位于前方的线则用连线（称为跨越）来画. 上面的图 0-5 就是这样画出来的投影图.

德国数学家瑞德梅斯特（Reidemeister）于 20 世纪 20 年代开始研究