大学数学试题解析系列

线性代数试题分析与解答

上海交通大学数学系 编

XIANXING DAISHU SHITI FENXI YU JIEDA

上海交通大學出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

大学数学试题解析系列

线性代数试题分析与解答

上海交通大学数学系　编

上海交通大学出版社

内 容 提 要

上海交通大学数学系是全国工科数学教学基地，数学教学成绩一直以优秀闻名全国. 本书选编了该校近年的12份本科生线性代数试卷，对每一道试题均作详解，并有题前分析和题后点评，指明解题思路和方法以及学生在解题过程中常犯的错误，有的题还给出多种解法.

本书可作为高等院校《线性代数》课程师生的教学辅导用书，也可供考研者参考.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数试题分析与解答 / 上海交通大学数学系编.
—上海：上海交通大学出版社，2012
ISBN 978-7-313-08843-7

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①上… Ⅲ. ①线性代数—高等学校—解题 Ⅳ. ①O151.2-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 172429 号

线性代数试题分析与解答
上海交通大学数学系 编
上海交通大学出版社出版发行
(上海市番禺路 951 号 邮政编码 200030)
电话：64071208 出版人：韩建民
昆山业荣升印刷有限公司印刷 全国新华书店经销
开本：787 mm×960 mm 1/16 印张：12.25 字数：227 千字
2012 年 8 月第 1 版 2012 年 8 月第 1 次印刷
印数：1～3 030
ISBN 978-7-313-08843-7/O 定价：26.00 元

前　　言

上海交通大学数学系是全国工科数学教学基地之一，其数学教学一贯坚持“起点高、基础厚、要求严、重实践、求创新”的传统，使理、工、农、生、医、管理等各科学生都具有扎实的数学基础. 历年来，上海交通大学的学生在国内外高校的数学竞赛中屡屡获奖；在历届硕士研究生入学考试中，考生的数学平均成绩总是名列榜首. 这些成绩的取得，是因为上海交通大学有一个行之有效的教学及考核体系，有一套先进且成熟的优秀教材和辅导材料，有一支充满活力的教学梯队，特别是有一个教学核心，几十年来始终坚持在教学第一线，不断地总结教学经验、收集教学资料. 今天的成绩，是长期积累的成果，是历史的沉淀和升华.

学好一门基础理论课程与顺利地通过这门课程的考试，两者的要求是不同的. 前者要求掌握课程的总体概貌，不但要掌握这门课程的基本概念、基本内容以及基本方法，还要了解它们的来龙去脉，知道所学的内容何处来、用在何处、如何应用. 后者是检验所学内容的掌握情况，注重课程内各概念和内容之间的联系，强调基本概念和基本方法，适当顾及应用问题. 这两者之间没有包含关系，所以顺利地通过考试也是一门学问，本书的编写，就是希望在这方面对读者有所帮助.

线性代数是大学数学中一门主要的基础理论课程，不仅各高等院校非数学专业的本科学生因后继课程所需而必修，而且是硕士研究生入学考试的主考课程之一. 上海交通大学经过多年的教学实践，在线性代数课程的教学和考核等方面都积累了许多经验. 本书收入的 12 份试卷，是上海交通大学的历年线性代数课程试卷的一部分，我们对原来试卷之间的重复题目重新作了选编，因此本书中的每一份试题都具有以下特点：

1. 涵盖课程所含的知识点，突出课程的重点.

2. 涉及基本内容之间的联系，既有检验基本概念掌握情况的客观题，又有了解基本方法掌握情况的基本计算题和应用题，还有考查学生综合能力的综合题.

3. 能较好地区分学生学习情况的差异性.

通过本书的学习，读者不难发现该课程的考试重点和对学生的要求. 作者在书中对试卷的每一题都从分析、解答、点评三个方面进行阐述. 其中，分析部分主要说明试题的类型或解题的基本方法；解答部分给出解题的主要过程；点评部分包含解题过程中的常见错误、该题在本课程的地位、考题的其他解法、题目涉及的相关知识、考题的延拓等. 编者希望本书对学生顺利地通过考试和教师较好地组织试卷有

所帮助.

本书可作为高等院校线性代数课程学生的教学辅导用书，也可作为教师的教学参考用书. 书中试卷 1 至试卷 5 的剖析由王纪林执笔，试卷 6 至试卷 12 的剖析由蒋启芬执笔，最后由蒋启芬统稿完成. 本书的编写和出版得到了上海交通大学数学系和上海交通大学出版社的大力支持和帮助，编者在此一并表示感谢. 最后还要感谢课程组的同仁们对历年命题付出的艰辛劳动.

由于时间紧迫，书中错误或不妥之处诚恳希望读者提出宝贵意见.

编　者

2012 年 5 月于上海交通大学

目　　录

试　卷　1

一、单项选择题(每题 3 分,共 18 分)

1. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s (s \geqslant 2)$ 线性无关,向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 能线性表示向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$,则以下结论中不能成立的是(　　).

(A) 向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 线性无关;

(B) 对任一个 $\boldsymbol{\alpha}_j (0 \leqslant j \leqslant s)$,向量组 $\boldsymbol{\alpha}_j, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 线性相关;

(C) 存在一个 $\boldsymbol{\alpha}_j (0 \leqslant j \leqslant s)$,使得向量组 $\boldsymbol{\alpha}_j, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 线性无关;

(D) 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 与向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 等价.

2. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为 n 阶可逆矩阵,$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B} \end{bmatrix}$,则 $\boldsymbol{C}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{C}^* =$(　　).

(A) $\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}^* \end{bmatrix}$;　　(B) $\begin{bmatrix} |\boldsymbol{B}|^{-1}\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & |\boldsymbol{A}|^{-1}\boldsymbol{B}^* \end{bmatrix}$;

(C) $\begin{bmatrix} |\boldsymbol{B}|\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{B}^* \end{bmatrix}$;　　(D) $\begin{bmatrix} |\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^* & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & |\boldsymbol{B}|\boldsymbol{B}^* \end{bmatrix}$.

3. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 是三维线性空间 V 的基,则(　　)也是 V 的基.

(A) $\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_3 = 2\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3$;

(B) $\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_1 - 2\boldsymbol{\alpha}_2$;

(C) $\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1 + 2\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_1 + 3\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3$;

(D) $\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3$.

4. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 实矩阵,$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = n$,则(　　).

(A) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 必合同于 n 阶单位矩阵;　(B) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 必等价于 m 阶单位矩阵;

(C) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 必相似于 n 阶单位矩阵;　(D) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是 m 阶单位矩阵.

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵,$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}) = m$,$\boldsymbol{b} \neq 0$,则线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = b$(　　).

(A) 可能无解;　　(B) 一定无解;

(C) 可能有解;　　(D) 一定有解.

6. 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 可由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$ 线性表示,则(　　).

(A) 当 $s > t$ 时,向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 必线性相关;

(B) 当 $s > t$ 时,向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$ 必线性相关;

(C) 当 $s<t$ 时,向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 必线性相关;

(D) 当 $s<t$ 时,向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$ 必线性相关.

二、填空题(每题 3 分,共 18 分)

1. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为三阶方阵,行列式 $|\boldsymbol{A}|=2$, $|\boldsymbol{B}|=-1$,矩阵 $\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & 2\boldsymbol{A} \\ -\boldsymbol{B} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}$,则行列式 $|\boldsymbol{C}|=$________.

2. 已知 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵,$\lambda=\pm 1$ 不是 $\boldsymbol{B}$ 的特征值,且 $\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$,则 $\boldsymbol{A}^{-1}=$________.

3. 若实二次型 $f(x_1, x_2, x_3)=2x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+ax_2x_3$ 是正定二次型,则常数 a 的取值范围为________.

4. 若三阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 1, 1, 2,则行列式 $|\boldsymbol{A}^{-1}+2\boldsymbol{A}^*|=$________.

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶方阵,$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2$, $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 是线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}\ (\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0})$ 的解,已知

$$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\3\\1\end{bmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},$$

则线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解 $\boldsymbol{\alpha}=$________.

6. 已知 b 为一常数,设集合

$$V=\left\{\boldsymbol{\alpha}\,\middle|\,\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_1+a_2+b\end{bmatrix}, a_1, a_2, b\in\mathbb{R}\right\},$$

若 V 是向量空间 $\mathbb{R}^3$ 的子空间,则 $b=$________.

三、计算题(每题 8 分,共 48 分)

1. 设矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&2\\0&2&2\\1&0&3\end{bmatrix},$$

已知多项式 $g(x)=x^3-2x^2-1$,求行列式 $|g(\boldsymbol{A})|$.

2. 已知线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 - x_3 = 1, \\ x_1 + ax_2 + x_3 = b. \end{cases}$$

(1) 试问常数 a, b 取何值时,方程组有无穷多解、有唯一解、无解?

(2) 当方程组有无穷多解时,求出其通解.

3. 设矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(1) 若矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{AB}$, 试求矩阵 $\boldsymbol{B}$;

(2) 若列向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 满足 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}$, 试求 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$.

4. 求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Qy}$, 将二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 3x_2^2 - 4x_1x_2 + x_3^2$$

化为标准形.

5. 设三维列向量 $\boldsymbol{\alpha}=(1, 2, 1)^{\mathrm{T}}$.

(1) 求三维列向量 $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$,使 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$ 为正交向量组;

(2) 证明: $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的基,并求向量 $\boldsymbol{\eta}=(1, 1, 1)^{\mathrm{T}}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$ 下的坐标.

6. 设向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{\beta}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\beta}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\beta}_3 = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(1) 问: a 取何值时,向量组 $\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2$, $\boldsymbol{\beta}_3$ 是向量空间 $\mathbb{R}^3$ 的基,为什么?

(2) 求 $\mathbb{R}^3$ 中基 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2$, $\boldsymbol{\beta}_3$ 的过渡矩阵.

四、证明题(每题 8 分,共 16 分)

1. 设 $f=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}$ 是 n 元实二次型,存在 n 维实列向量 $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$,使 $\boldsymbol{x}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}_1>0$, $\boldsymbol{x}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}_2<0$. 证明: 存在 n 维实列向量 $\boldsymbol{x}_0 \neq \boldsymbol{0}$, 使 $\boldsymbol{x}_0^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Ax}_0=0$.

2. 设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 既是正交矩阵又是正定矩阵,证明: $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶单位矩阵.

试　卷　2

一、单项选择题(每题 3 分,共 15 分)

1. 若矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & a & -1 & 2\\ 0 & -1 & a & 2\\ 1 & 0 & -1 & 2\end{bmatrix}$ 的秩 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2$,则 a 的值为(　　).

(A) 0;　　(B) 0 或-1;

(C) -1;　　(D) -1 或者 1.

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 为正交矩阵,且 $|\boldsymbol{A}|=-1$,则伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*=$(　　).

(A) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$;　　(B) $-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$;

(C) $\boldsymbol{A}$;　　(D) $-\boldsymbol{A}$.

3. 设 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 是 n 维列向量,$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}\neq 0$,$n$ 阶方阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}(n\geqslant 3)$,则在 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个特征值中,必然(　　).

(A) 有 n 个特征值等于 1;　　(B) 有 $n-1$ 个特征值等于 1;

(C) 有 1 个特征值等于 1;　　(D) 没有 1 个特征值等于 1.

4. 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为 n 阶方阵,且秩相等,即 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$,则(　　).

(A) $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=0$;　　(B) $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=2\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$;

(C) $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})=2\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$;　　(D) $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})\leqslant \mathrm{r}(\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$.

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵,且 $\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}+2\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}$,则矩阵 $2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$(　　).

(A) 同时为可逆矩阵;　　(B) 同时为不可逆矩阵;

(C) 至少有一个为零矩阵;　　(D) 最多有一个为可逆矩阵.

二、填空题(每题 3 分,共 15 分)

1. 设 $\boldsymbol{A}^*$ 是 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵,行列式 $|\boldsymbol{A}|=2$,则 $|2\boldsymbol{A}^*|=$________.

2. 行列式 D 中第 2 行元素的代数余子式的和 $\sum_{j=1}^{4}A_{2j}=$________,其中

$$D=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & -1\end{vmatrix}.$$

3. 已知实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 + 2ax_1x_2 + 2x_2x_3$ 为正定二次型，则实常数 a 的取值范围为________.

4. $2n$ 阶行列式 $D_{2n} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A} \end{vmatrix} =$ ________，其中 n 阶矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & b \\ 0 & \cdots & b & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ b & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

5. 设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，$n \geqslant 2$ 为正整数，则 $\boldsymbol{A}^n - 2\boldsymbol{A}^{n-1} =$ ________.

三、计算题（每题 9 分，共 54 分）

1. 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} x_1 - m & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 - m & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n - m \end{vmatrix}.$$

2. 求矩阵 $\boldsymbol{X}$，使 $\boldsymbol{AX} + \boldsymbol{BA}^{-1} - \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{BX} = \boldsymbol{0}$，其中矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. 设非齐次线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = d_1, \\ x_1 - 2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 = d_2, \\ c_1x_1 + c_2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = d_3 \end{cases}$$

有 3 个解向量

$$\boldsymbol{\eta}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\eta}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\eta}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

求此线性方程组的系数矩阵的秩，并求其通解，其中 a_{i-2}，b_{i+2}，c_i，d_j 为常数($i=1, 2$；$j=1, 2, 3$).

4. 已知实二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + 2\lambda x_2 x_3 \quad (\lambda > 0),$$

经过正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$，化为标准形 $y_1^2 + 2y_2^2 + 5y_3^2$. 求实参数 λ 以及正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$.

5. 设线性方程组为

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + ax_3 + 7x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = b. \end{cases}$$

(1) 问：a，b 取何值时，线性方程组无解、有唯一解、有无穷多解？

(2) 当线性方程组有无穷多解时，求出其通解.

6. 已知四维实向量空间$\mathbb{R}^4$中的向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{\beta}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ a \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\beta}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2-a \\ 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\beta}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\beta}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

试求：(1) 常数 a 的值，使 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$，$\boldsymbol{\beta}_4$ 为$\mathbb{R}^4$的基；

(2) 由$\mathbb{R}^4$的基 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\alpha}_4$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3$，$\boldsymbol{\beta}_4$ 的过渡矩阵 $\boldsymbol{P}$.

四、证明题(每题 8 分，共 16 分)

1. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_3$ 是欧氏空间 V 的标准正交基，证明：

$$\boldsymbol{\beta}_1 = \frac{1}{3}(2\boldsymbol{\alpha}_1 + 2\boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_3), \boldsymbol{\beta}_2 = \frac{1}{3}(2\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2 + 2\boldsymbol{\alpha}_3),$$

$$\boldsymbol{\beta}_3 = \frac{1}{3}(\boldsymbol{\alpha}_1 - 2\boldsymbol{\alpha}_2 - 2\boldsymbol{\alpha}_3)$$

也是 V 的标准正交基.

2. 设向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表示,且 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 线性无关. 证明:向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 等价.

试　卷　3

一、单项选择题(每题 3 分,共 15 分)

1. 设 n 阶行列式 $D=|a_{ij}|_n$, A_{ij} 是 D 中元素 a_{ij} 的代数余子式,则下列各式中正确的是(　　).

(A) $\sum\limits_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ij}=0$;　　(B) $\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}=0$;

(C) $\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}=D$;　　(D) $\sum\limits_{i=1}^{n}a_{i1}A_{i2}=D$.

2. 设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 为 n 阶实对称矩阵,则存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$,使 $\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{B}$,即 $\boldsymbol{A}$ 正交相似于 $\boldsymbol{B}$ 的充分必要条件为(　　).

(A) $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都有 n 个线性无关的特征向量;

(B) $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{B})$;

(C) $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的主对角线上的元素的和相等;

(D) $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值.

3. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系,则下列向量组中不再是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系的为(　　).

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$;

(B) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1$;

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_1$;

(D) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_1$.

4. 设线性方程组 $\begin{cases}x_1+3x_2+x_3=1,\\ x_1-5x_2-x_3=b,\\ 2x_1+2x_2+x_3=2\end{cases}$ 有无穷多组解,则必有(　　).

(A) $b=1$;　　(B) $b=-1$;　　(C) $b=2$;　　(D) $b=-2$.

5. 设向量组(Ⅰ)是向量组(Ⅱ)的线性无关的部分向量组,则(　　).

(A) 向量组(Ⅰ)是向量组(Ⅱ)的极大线性无关组;

(B) 向量组(Ⅰ)与向量组(Ⅱ)的秩相等;

(C) 当向量组(Ⅰ)可由向量组(Ⅱ)线性表示时,向量组(Ⅰ)与向量组(Ⅱ)等价;

(D)当向量组(Ⅱ)可由向量组(Ⅰ)线性表示时,向量组(Ⅰ)与向量组(Ⅱ)等价.

二、填空题(每题 3 分,共 15 分)

1. 设$-1,5,\lambda$是矩阵$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3&-2&0\\-2&2&-2\\0&-2&1\end{bmatrix}$的特征值,则$\lambda=$________,$\boldsymbol{A}$对应3个特征值的特征向量是________的,且是________的.

(选填:线性无关,线性相关;相互正交,相互不正交.)

2. 设$\boldsymbol{A}$为n阶可相似对角化的矩阵,且$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=r<n$,则$\boldsymbol{A}$必有特征值$\lambda=$________,且其重数为________,其对应的线性无关的特征向量有________个.

3. 已知n阶方阵$\boldsymbol{A}=(\alpha_{ij})_{n\times n}$,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$是$\boldsymbol{A}$的列向量组,行列式$|\boldsymbol{A}|=0$,伴随矩阵$\boldsymbol{A}^*\neq\boldsymbol{0}$,则齐次线性方程组$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的通解为________.

4. 设$\boldsymbol{A}$为2×3非零矩阵,已知$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{bmatrix}-1\\2\\0\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{\xi}_2=\begin{bmatrix}3\\0\\1\end{bmatrix}$都是齐次线性方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$的解,则矩阵$\boldsymbol{A}=$________(答案不唯一).

5. 设$\boldsymbol{A}$为n阶可逆阵,且$\boldsymbol{A}^2=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}$,则伴随矩阵$\boldsymbol{A}^*=$________.

三、计算题(每题 9 分,共 54 分)

1. 试求行列式$|\boldsymbol{A}|$,$|\boldsymbol{B}|$,$|\boldsymbol{C}|$,其中$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$分别为$n,m,n+m$阶方阵:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1+x&1&\cdots&1\\1&1+x&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\cdots&1+x\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0&\cdots&0&1\\0&\cdots&2&0\\\vdots&&\vdots&\vdots\\m&\cdots&0&0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}&\boldsymbol{0}\end{bmatrix}.$$

2. 已知线性方程组$\begin{cases}x_1+ax_2+x_3=3,\\x_1+2ax_2+x_3=4,\\bx_1+x_2+x_3=4.\end{cases}$

(1) 试问:常数a,b取何值时,方程组有无穷多解、有唯一解、无解?

(2) 当方程组有无穷多解时,求出其通解.

3. 设四阶方阵 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{X}$ 满足方程 $\boldsymbol{AXA}^{-1}=\boldsymbol{XA}^{-1}+3\boldsymbol{E}$, 已知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵

$$\boldsymbol{A}^*=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&-3&0&8\end{bmatrix},$$

求矩阵 $\boldsymbol{X}$.

4. 求正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$, 用此正交变换将以下实二次型化为标准形:

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3.$$

5. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 3×4 矩阵, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=2$, 且已知非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的 3 个解为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\-1\\0\\2\end{bmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}2\\1\\-1\\4\end{bmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}4\\5\\-3\\11\end{bmatrix}.$$

试求:(1) 齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解;

(2) 非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解.

6. 已知线性空间 $\mathbb{R}^3$ 中的向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\-2\\-2\end{bmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}-1\\3\\0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}1\\0\\-6\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\alpha}_4=\begin{bmatrix}-3\\8\\2\end{bmatrix},\ \boldsymbol{\beta}_1=\begin{bmatrix}0\\1\\-2\end{bmatrix},\ \boldsymbol{\beta}_2=\begin{bmatrix}-2\\5\\-6\end{bmatrix}.$$

(1) 求由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 生成的子空间 $L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$ 的维数与一个基;

(2) 从 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 中选出属于 $L(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$ 的向量,并求出它们在题(1)中所选的基下的坐标.

四、证明题(每题 8 分,共 16 分)

1. 已知 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 实矩阵,证明:矩阵 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵的充分必要条件为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=n$.

2. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k\,(k\geqslant2)$ 是齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系,向量 $\boldsymbol{\beta}$ 满足 $\boldsymbol{A\beta}\neq\boldsymbol{0}$. 证明:向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\beta},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k+\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\beta}$ 线性无关.

试 卷 4

一、单项选择题(每题 3 分,共 15 分)

1. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{4\times4}$, $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{4\times4}$,且 $a_{ij}=-2b_{ij}$,则行列式 $|\boldsymbol{B}|=$(　　).

(A) $2^{-4}|\boldsymbol{A}|$;　(B) $2^{4}|\boldsymbol{A}|$;　(C) $-2^{-4}|\boldsymbol{A}|$;　(D) $-2^{4}|\boldsymbol{A}|$.

2. 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{bmatrix}$,已知 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 的秩为 1,则必有(　　).

(A) $a\neq b$ 且 $a+2b\neq 0$;　(B) $a\neq b$ 且 $a+2b=0$;

(C) $a=b$ 或 $a+2b\neq 0$;　(D) $a=b$ 或 $a+2b=0$.

3. 设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 为非零矩阵,且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$,则必有(　　).

(A) $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关,且 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性相关;

(B) $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性相关,且 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组线性相关;

(C) $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性相关,且 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组线性相关;

(D) $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性相关,且 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组线性相关.

4. 设 $\boldsymbol{A}$ 是三阶方阵,将 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行与第 2 行交换,再把第 2 行的 1 倍加到第 3 行,得矩阵 $\boldsymbol{B}$. 记 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{PA}$,则可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 为(　　).

(A) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;　(B) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$;

(C) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$;　(D) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

5. 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\alpha}_4$ 是线性空间 V 的基,则以下向量组中,也是 V 的基的是(　　).

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$, $\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_1$;

(B) $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4$, $\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1$;

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$, $\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1$;

(D) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4$, $\boldsymbol{\alpha}_4-\boldsymbol{\alpha}_1$.