霍氏高級代數

顧均正譯

'Advenced Algebra'

by H. E. Hawkes

霍氏高級代數

顧均正譯

'Advenced Algebra'

by H. E. Hawkes

開明書店印行

霍氏高級代數

三十六年十一月初版

每册定價國幣三元六角

原著者	H. E. Hawkes
翻譯者	顧均正
發行者	開明書店 代表人范洗人
印刷者	開明書店

(152 P.) Y 霍

序

要把一册切實合用行銷近二十五年的教本加以修訂，不是一樁輕易的工作. 在改訂這册高級代數學的時候，作者曾小心翼翼地保留着原版的優點，同時又根據了新狀況的要求，加以若干變動.

這個教本的一般目的，並沒有什麼修改. 其緒論部分所以供讀者作代數基本知識的適當複習. 關於行列式，排列與組合及分數各章，已有新材料增入. 但對於複數的討論與完全的演繹法的應用，則已略加簡約. 練習題已全部革新，此項習題大概不會像以前所輯那樣的枯燥無味了. 所有課題在數學上的重要性無不隨處揭示，而在許多章中，又加入新鮮的材料，使主題得到圓滿的說明.

本書依大學入學考選會的推薦，把"記數的進位制"一章仍予以保留，而由考選會所擬定的各種題材，則已分別增補.

對於過去二十年來作者所接到的每一個有價值的指示，已無法一一道謝. 然而對於所有替本書收集習題與提出批評的朋友，作者仍不得不在這裏致深深的謝意.

哥倫比亞大學　　H. E. 霍克斯

目　　錄

二次式之部

二次式及其他

高等代數

霍氏高級代數

二次式之部

第一章

基本運算

1. **整數**．本書假定讀者對於代數上的初步運算與尋常符號的意義，都已諳習，不須再加詳述．

人類所熟知的最初的數，不用說都由記數法得來． 此等數稱爲正整數． 下列各節，即指示如何從正整數導出代數上常用的其他諸數，以解較爲簡易的方程式．

本章中所述代數定律的簡明解說，其證明大都從略．

2. **加法**．兩正整數 a 與 b 相加，即求一數 x，使

$$a+b=x.$$

任何兩正整數必有一單獨的和 x，此和亦爲一正整數．

例如，求 3 與 4 之和，即求 $3+4=x$ 中的 x．

3. **減法**．從正整數 a 減去正整數 b，即求一數 x，使

$$b+x=a. \qquad (1)$$

這個數 x 稱爲 a 與 b 的差，可表示之如下：

$$a-b=x,$$

a 稱爲被減數，b 稱爲減數．

欲從 8 減 3，即求 $3+x=8$ 中的 x，故其差 $x=8-3$，即 5．

若 a 大於 b, 且同爲正整數, 則可得一簡單的正整數 x 適合於方程式(1)的條件.

若 a 小於 b, 則 x 不爲正整數.

例如, 若 $a=6$ 而 $b=9$, 則從 $9+x=6$ 中所得 x 之值, 將不爲正整數.

若逢到這樣情形, 要照樣施行減法, 那就得應用負數, 以符號$(-a)$, $(-b)$等表之, 這裏的 a 與 b 都表示正整數. 在 $a-b$ 之差中, 如 a 小於 b, 可定義爲 $a-b=[-(b-a)]$. 涉及負數的加法和減法, 可定義如下:

$$[-(-a)]=a^*.$$

$$(-a)+(-b)=[-(a+b)].$$

$$(-a)+b=[-(a-b)].$$

$$a+(-b)=a-b.$$

$$(-a)-(-b)=[-(a-b)].$$

$$(-a)-b=[-(a+b)].$$

$$a-(-b)=a+b.$$

我人已知, 正整數的加法, 結果總得正整數. 故此法隨處適用, 而無需擴大數系. 但正整數的減法, 則結果不一定得正整數; 因此就不得不將原來的數系擴大而導出所謂負數, 既假定了負數的存在, 使方程式(1)常可有解, 則上面的定義就必需指出如何可使負數與正整數及負數與負數結合而不相捍格.

* 正整數的符號原可寫作: $(+a)$, $(+b)$等等, 以與負數的符號相一致. 然若並不引起誤會, 則不妨將+號略去. 由於本節及以下各節中所述結合正負數的定律, 在負數記法中已無應用括號的必要, 故在無混淆情形時概將此等括號省去.

口答練習

在下列口答練習中，先求兩數之和，再以後一數爲被減數而求兩數之差：

1. -1, 3.	4. 5, -7.	7. 4, -1.	10. 10, -15.
2. 2, -4.	5. 1, 2.	8. -6, 7.	11. 12, 25.
3. 3, 1.	6. -2, 3.	9. 8, 5.	12. -17, 21.

4. 零. 若在第3節方程式(1)中，$a=b$，則無論正數或負數都不適於這個方程式。爲了要使在這樣的情形中也有一數可以適於這個方程式，我們就導出零這個數，其符號爲"0"而以下列方程式定義之：

$$a+0=a,$$

或

$$a-a=0.$$

關於零這個數的加減法，可定義如下，其中的 k 兼表正數或負數：

$$0+k=k\pm 0=k$$

$$0-k=-k.$$

$$0\pm 0=0.$$

5. 乘法. 以 b 乘 a 的方法，卽求一數 x，使適合於方程式

$$a\cdot b=x.$$

例如，求6與3的積，卽求 $6\cdot 3=x$ 中 x 的值.

若 a 與 b 都爲正整數，則 x 亦爲正整數，可將 a 自身相加至 b 次以求之。若所乘之數爲負數，就有下述定律：

$$(-a)\cdot(-b)=a\cdot b.$$

$$(-a)\cdot b=a\cdot(-b)=-(a\cdot b).$$

$$0\cdot k=k\cdot 0=0, \qquad (1)$$

這裏 k 可為正數，負數或零.

上列符號式的敍述，含有下列意義.

定理. 諸數相乘，必須有一因子或若干因子為零，其積始為零.

這個重要的定理，應用頗多. 設有一諸數相乘之積，如

$$a\cdot b\ c\cdot d=e,$$

由上述定理可知：第一，若 e 等於零，則 a, b, c, d 中必有一數或若干數為零；第二，若 a, b, c, d 中有一數或若干數為零，則 e 亦必為零.

減法的運算，就有導出負整數及零的必要. 然而乘法的運算，其所得的數都屬已經導出，不再生出新數.

6. 除法. 以 l 除 k 的方法，即為求出一數 x 使適合於方程式

$$x\cdot l=k, \tag{1}$$

這裏 k 和 l 是正整數或負整數，或 k 為"0". 至於 $l=0$ 的情形，詳見第7節.

例如，求 21 與 7 之商，即求 $7\cdot x=21$ 中 x 的值.

若 k 為下述敍列中的一數

$$\cdots, -3l, -2l, -l, 0, l, 2l, 3l, \cdots,$$

則 x 為一有限整數或 0；申言之，即此數亦屬已經導出，而為我們以前所討論過的. 故 k 為 l 的倍數. 若 k 不在此系列而在該系列中兩數之間，則欲使除法仍能適合於這種情形，就得導出分數，其符號為 $k\div l$ 或 $\frac{k}{l}$，可用下列方程式定義之：

$$\frac{k}{l}\cdot l=k.$$

分數的加,減,乘,除的演算,可定義如下:

$$\frac{k}{l}\pm\frac{m}{n}=\frac{kn\pm lm}{ln}. \tag{2}$$

$$\frac{k}{l}\cdot\frac{m}{n}=\frac{km}{ln}. \tag{3}$$

$$\frac{k}{l}:\frac{m}{n}=\frac{kn}{lm}. \tag{4}$$

分數更有其他性質如下:

$$1=\frac{k}{k}=\frac{1}{1}.$$

$$\frac{k}{l}=\frac{km}{lm},\ \text{這裏 } m \text{ 爲任何數.*} \tag{5}$$

$$\frac{-k}{l}=\frac{k}{-l}=-\frac{k}{l}. \tag{6}$$

最後兩方程式,可用文字說明如下:

一分數的分子與分母,同時用任何數乘之,其值不變.*

改變一分數的分子或分母的符號,等於改變該分數的符號.

第 5 節乘法的符號定律,至此可假定其對於代表分數的文字與代表整數的文字一樣適用.

例如, $\left[-\left(\frac{a}{b}\right)\right]\cdot\left[-\left(\frac{c}{d}\right)\right]=\frac{ac}{bd}.$

正數或負數 k 可以寫成分數的形式

$$\frac{k}{1}.$$

口 答 練 習

在下列口答練習中,求以後數除前數所得之商:

1. 5, 20.	4. 5, −4.	7. −1, −3.	10. −21, 6.
2. −3, 15.	5. −3, −6.	8. −4, −9.	11. 17, −2.
3. 2, −7.	6. 2, 5.	9. 15, −10.	12. −12, 5.

* 譯註: 這任何數指除零以外的任何數.

7. 以零爲除數. 若第 6 節方程式(1)中 $l=0$,則 x 無論爲正整數或負整數或分數,都不能適合此方程式,因由第 5 節方程式(1),x 無論爲何值,其與零之積恆爲零.

所以除數爲零,完全越出了代數的方法. 故在運算除法以前,必須假定其除數不爲零. 在方程式

$$4\cdot 0=2\cdot 0$$

中,若將方程式的兩邊各除以零,就會演出不合理的結果 $4=2$.

8. 基本運算. 加減乘除的運算叫做**四基法**. 凡能由 1 以四基法導出的任何數都叫做**有理數**. 有理數包括正整數及負整數以及分子分母爲整數或可化爲整數的分數. 正整數或負整數都叫做**整數**.

9. 負數和分數的實際需要. 由前討論,可知負數與分數之所以導出,係由於數學的需要. 有了牠們,才能使四基法常可運算無礙.

這種數學上的需要, 相當於試用四基法於實際事件上所立即發生的實際需要. 例如,某日的氣溫爲 $+20°$,次日水銀柱降 $25°$, 要表出次日的溫度,就須從 20 中減去 25. 又如,若要表出分 7 隻蘋果爲同樣的兩份,就需要分數. 若是我們不導出負數與分數,這種應用題就無法解決,而我們的數學就不能應用於這種情形,以及無數其他的日常問題.

代數上所用唯一的其他運算,爲開方與乘方. 以後當知,開方須擴大數系,始常可得出一數. 然將一數乘方,卻並不需要導出新數.

10. 運算的定律. 代數上所用的數,都遵從下列定律,而假定其可無需討論者:

I. **加法的交換律.** 兩數之和,其值與相加的次序無關.

以符號表之, $a+b=b+a$,

這裏 a 與 b 代表已導出的及此後將導出的任何數.

II. **加法的結合律.** 三數之和,其值與相加時分羣的方法無關.

以符號表之,

$$a+(b+c)=(a+b)+c=a+b+c.$$

III. **乘法的交換律.** 兩數之積,其值與相乘的次序無關.

以符號表之, $a\cdot b=b\cdot a$.

IV. **乘法的結合律.** 三數之積,其值與相乘時分羣的方法無關.

以符號表之, $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)=a\cdot b\cdot c$.

V. **分配律.** 一單數與兩數之和的積與以此單數分別乘兩數所得之積的和相等.

以符號表之, $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$.

上述定律,顯然可適用於三數以上.

11. 整式與有理式. 由連續的文字項表出的多項式,若各項之分母中無有含文字者,稱為**整式**.

例如 $4x^5-x^3-2x^2-\frac{3}{4}x+1$ 是整式.

兩整式之商稱為**有理式**.

例如 $\frac{x^2-2x+3}{x-7}$ 是有理式.

12. 關於多項式的運算．這裏假定，第 2 至 6 節所述四基法的定律以及第 10 節所述的諸定律，對於符號敍述中的文字，無論代表數字或多項式，都同樣適用。

事實上，我們所用的文字式，在本質上與數字式無異，因爲文字亦無非是數字的符號而已．當式中的文字爲數字所替代時，文字式卽一變而爲數字式，而前述諸定律，顯然就是根據這些數字式而得來的．

13. 多項式的加法．運算多項式的加法，有下述

法則．把同文字部分的項，寫在同一縱列中．

求各縱列中的項的代數和，連續把結果寫出，加上適當的符號．

若多項式化成了獨項式，此法則亦同樣適用．

14. 多項式的減法．運算多項式的減法，有下述

法則．把減式寫在被減式的下面，使同文字部分的項，寫在同一縱列中．

被減式中的項，加入減式中相應的項，而預先改變減式的符號．

一般寧可把減式的符號當作已變，而不將此改變了的符號如實寫出．

習　題

1．加 $2a^2b^2+a^2b-15ab+3b$，$a^2b^2+2ab^2-5b$，$3b+10a^2b^2+4ab$．及 a^2b-3ab^2+4b．

解：

$$
\begin{array}{rrrrr}
2a^2b^2 & +\,a^2b & -15ab & & +3b \\
a^2b^2 & & & +2ab^2 & -5b \\
10a^2b^2 & & +\,4ab & & +3b \\
 & +\,a^2b & & -3ab^2 & +4b \\
\hline
13a^2b^2 & +2a^2b & -11ab & -\,ab^2 & +5b
\end{array}
$$

2．從 $2a^2b^3+3a^2b+15ab-4a$ 中減去 $a^2b^3-4a^2b+25ab-3b+5a$．

解:

$$\begin{array}{r} 2a^2b^3+3a^2b+15ab-4a \\ \underline{a^2b^3-4a^2b+25ab+5a-3b} \\ a^2b^3+7a^2b-10ab-9a+3b \end{array}$$

3．加 $2x^3+3x^2y+15y^3$，$3x^2y+4xy^2-8y^3$，$3y^3-14x^3-10x^2y$，及 $25xy^2+15x^2y-4y^3$．

4．加 $m^2+3mn+xn$，$2n^2+15mn-25m^2$，$13xn-2m^2+5n^2$，及 $4mn-2xn+3m^2$．

5．從 $2r+5s-15rs$ 中減去 $2rs-8r+3s$．

6．從 $3x^2+5xy+2y^2-21x^2y$ 中減去 $2x^2+15y^2-3xy$．

7．加 $3a^3+5a^2b+15ab^2-10b^3$，$2a^2b-3ab^2+3b^3$，$19ab^2+3a^3-2b^3$，及 $3a^2b+ab^2-a^3$．

8．從 $21y^3+15y-30x^2$ 中減去 $3x^2+15x+2y^3$．

9．加 $21a^2+5a-3b+21ab+2b^2-3$，$a^2-b^2+2-a^2b+5ab$，$19a-ab+a^2-5b^2+3a^2b$，$a+b-a^2+3b^2$，及 $2-10a^2+15a^2b-12b^2$．

10．從 $m^2+mn-3ml$，$mn-15ml$，$21ml+2m^2+3$ 及 $2ml-m^2+15$ 之和減去 $25m^2-14ml+21-5mn$．

11．從 $a^2+25ab+b^2$ 及 $15ab-a^2$ 之和減去 $15a^2+10b^2+8ab-10$．

12．從 $25x^2+19xy-9y^2+13$ 中減去 $2x^2-15xy$，$2xy-y^2-2x^2+10$，及 x^2+y^2+xy-5 之和．

13．從 $a+b+c$ 中減去 $2a+3c-10b$，$5a-13b+2c$，$8a-c$，及 $2a-3c+25b$ 之和．

14．從 $2r-5s+2q$，$25s+15q-2r$，$25s-15r+2q$ 及 $r+s+10q$ 之和減去 $25q-5s+9r$．

15．從 $108c^2+15ab-2ac+13a+21b-36$ 中減去 $5a+2b-10c^2+3$，$a+c^2-15b$，$21c^2+5ab-2ac$ 及 $2ac+5c^2-3ab+a-10$ 之和．

16．從 $\frac{2}{3}a+\frac{9}{5}b+\frac{10}{4}c$，$2a+\frac{1}{2}c-5b$ 及 $\frac{4}{5}a-\frac{9}{2}b$ 之和減去 $\frac{5}{8}a-\frac{2}{3}b+8c$．

17．從 $\frac{15}{7}x^2+\frac{25}{3}xy+\frac{15}{2}y^2+\frac{21}{4}$ 及 $\frac{2}{5}y^2-\frac{10}{3}x^2+\frac{4}{5}xy$ 之和減去 $\frac{25}{24}x^2+\frac{15}{6}xy-\frac{11}{7}y^2$．

15. 括號. 若欲把包含若干數或若干代表數的符號之式,視爲一單獨的符號,可用括號括於式外,此括號內之式在演算時即可當作一單獨的數或符號,事實上亦確係如此,只是括號內的演算也許尚未了結而其結果尚未化簡而已.

法則. 若在單括號前有一"+"號,可逕將括號除去而不變括號內各項的符號.

若在單括號前有一"−"號,則括號除去時須將括號內各項的符號一律變換

一式中有若干括號時,可依據下述

法則. 除去最內層的括號,若該括號前之符號爲負,則括號內各項的符號須一律變換.

如果可能,將新的最內層的括號以內之式化簡.

照上法逐步演算,至所有括號去盡爲止.

學者有時將某種階段憑心算演出,以期簡捷,實屬失策. 蓋所省時間決不能抵償此種嘗試中所生錯誤的損失.

習　　題

除去下列各式中的括號:

1. $x-(2y+x)-[3x+5y-(7y+5x)-3y]$.

解:
$$\begin{aligned}&x-(2y+x)-[3x+5y-(7y+5x)-3y]\\&=x-2y-x-[3x+5y-(7y+5x)-3y]\\&=x-2y-x-[3x+5y-7y-5x-3y]\\&=-2y-3x-5y+7y+5x+3y\\&=3y+2x.\end{aligned}$$

2. $a-\{-b-[-(-a)]\}$

3. $-2m+n-[n+5m+(2m+3n)]$.

4. $x^2-2xy+[-5y^2+10xy+(2x^2-3xy+3y^2)-x^2]$.

5. $\frac{1}{2}-\left[\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{5}-\left(\frac{5}{10}\cdot\frac{1}{5}-\frac{2}{3}\right)\right]$.

6. $5x\{3y-2x[5xy+10x-2(3x+y)]\}+10x^2$.

7. 求 $a-10b+2a+[5a-3c(21b-2c)+10z]$ 的值,若 $a=2, b=3$ 及 $c=1$.

8. 求 $m^2+2mn\{3n-7m[4m-10n(2m+n)]\}$ 的值,若 $m=1$ 及 $n=5$.

9. 求 $-p\{r+5t-[2p+5t(21r-15t)+\frac{1}{2}t]\}$ 之值,若 $p=\frac{1}{2}$, $r=2$ 及 $t=\frac{7}{2}$.

10. 求 $x^2\{-5m+2x[5x-2(3m+b)]\}$ 之值,若 $x=2$, $m=5$ 及 $b=1$.

16. 乘法. 習慣上寫 $a\cdot a=a^2$, $a\cdot a\cdot a=a^3$, $\underbrace{a\cdot a\cdots a}_{n\text{ 次}}=a^n$. 由第10節乘法的結合律, $a^2\cdot a^3=(a\cdot a)(a\cdot a\cdot a)=a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a=a^5$,

或照一般情形,
$$a^m a^n=a^{m+n}, \tag{I}$$
這裏 m 和 n 是正整數.

還有
$$(a^n)^m=\underbrace{a^n\cdot a^n\cdots a^n}_{m\text{ 次}}=a^{n\cdot m}. \tag{II}$$

及
$$a^n\cdot b^n=(a\cdot b)^n. \tag{III}$$

$(a^n)^m$ 與 a^{n^m} 的區別須特別注意. 例如 $(2^3)^2=8^2=64$, 而 $2^{3^2}=2^9=512$. 卽在式 a^{n^m} 中, 假定 m 爲 n 的指數, 而非 a^n 的指數.

方程式(I)確定兩個同文字乘冪之積的指數,等於各因數的指數之和. 故獨項式的乘法如下:

法則. 先寫下數係數之積, 次寫乘式與被乘式中所有的文字於其後,各文字的指數爲乘式與被乘式中該文字的指數之和.

例題

$$-3m^5n^7p^2r^3\cdot(2mn^7p^4)=-6m^6n^{14}p^6r^3.$$

深究. 上例應用第 10 節中何種定律?