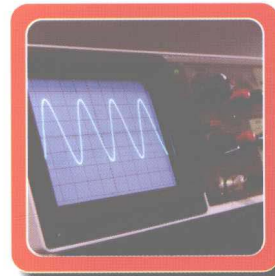
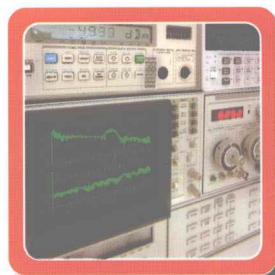




全国高等院校仪器仪表及自动化类“十二五”规划教材

微弱信号 检测与应用

◎ 孙士平 主编



编写特色：开篇案例引导+理论基础推导+典型应用，实用性强、适用面广。

主要内容：微弱信号检测方法及其信噪比与特性分析，对应微弱信号检测技术的数字处理方法。

适用对象：从事医疗仪器仪表工程、产品质量检测与控制、自动化仪器仪表、计量工程、信息工程等有关专业的工程技术人员与科技人员。



电子工业出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY

<http://www.phei.com.cn>

全国高等院校仪器仪表及自动化类“十二五”规划教材

微弱信号检测与应用

	孙士平	主 编	
	罗明璋	副主编	
武洪涛	李 涛	黄小荣	参 编
赵 勇	阮宁君	魏 勇	

电子工业出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京·BEIJING

内 容 简 介

本书以微弱信号检测过程中的引例为起点, 阐述微弱信号检测的应用领域和应用范围, 对常用的微弱信号检测方法和检测仪器进行理论分析和介绍。

全书共分6章, 内容包括噪声、干扰、微弱信号检测、信噪比、信噪改善比等的基本概念, 低噪声前置放大与屏蔽、接地技术, 同步积分器、旋转电容滤波器、相关器、数字式相关器等周期性微弱信号检测的基本方法, 取样积分器、多点信号平均器、锁定放大器的基本检测原理及其应用, 随机性微弱信号的最佳滤波检测, 离散性微弱光信号的检测方法。

本书可作为测控技术与仪器、地球物理、地球勘探、测录井、自动化、电子信息工程、通信工程、物理、光学、化学、生物医学工程、医学仪器等专业的高年级本科生和研究生教材, 也可以作为有关专业工程技术人员与科技人员的参考书。

未经许可, 不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有, 侵权必究。

图书在版编目(CIP)数据

微弱信号检测与应用/孙士平主编. —北京: 电子工业出版社, 2013. 2

全国高等院校仪器仪表及自动化类“十二五”规划教材

ISBN 978-7-121-19545-7

I. ①微… II. ①孙… III. ①信号检测—高等学校—教材 IV. ①TN911.23

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第025518号

策划编辑: 郭穗娟

责任编辑: 韩玉宏

印 刷: 涿州市京南印刷厂

装 订: 涿州市京南印刷厂

出版发行: 电子工业出版社

北京市海淀区万寿路173信箱 邮编 100036

开 本: 787×1092 1/16 印张: 15.5 字数: 397千字

印 次: 2013年2月第1次印刷

定 价: 39.80元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题, 请向购买书店调换。若书店售缺, 请与本社发行部联系, 联系及邮购电话: (010) 88254888。

质量投诉请发邮件至 zltts@phei.com.cn, 盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线: (010) 88258888。

前 言

随着现代科学技术的发展，人类为揭示大自然的奥秘总是在寻求新的检测理论和检测方法，也推动了新的检测技术和复杂的自动控制系统及信息处理理论技术的提高。多年来科学家们在研究宏观和微观世界的过程中，不断开发能把淹没在噪声中的大量有用信息检测出来的理论和方法，通过不断系统化、模块化的完善，形成了一个新的微弱信号检测的学科分支。现如今，微弱信号检测技术已广泛地应用于石油工业、地球勘探、太空探索、工业、农业、卫生、国防、科研等各领域。在这些应用领域中，几乎都涉及微弱信号检测问题。因此，微弱信号检测技术是人们了解世界的重要组成部分。微弱信号检测技术是一种将信号与强噪声分离的高新技术，它以参考信号、计算机和现代数字处理器件为基础，通过对信号的噪声进行抑制、以提高信噪比为目的的检测手段进行检测，即通过微弱信号检测得到高信噪比的电信号，由输入电路、放大电路等检测电路提取有用信息，再经模数转换接口输入微型计算机运算、处理，最后显示或打印输出所需检测物体的几何量或物理量等参数。因此，微弱信号检测技术是现代检测技术最重要的手段和方法之一，是现代检测技术的一个重要的发展方向。

本书是根据教育部相关专业教学大纲而编写的，同时本书的编写参照了长江大学石油仪器重点专业建设课程微弱信号检测技术的教学大纲，并经电子工业出版社“十二五”规划教材编委会及编委会成员中多位专家和教授多次讨论定稿而成。

本书共分为6章，每章以案例为引导进行理论推导，再进行实践举例。主要内容包括噪声、干扰、微弱信号检测、信噪比、信噪改善比等的基本概念；低噪声前置放大与屏蔽、接地技术；同步积分器、旋转电容滤波器、相关器、数字式相关器等周期性微弱信号检测的基本方法；取样积分器、多点信号平均器、锁定放大器的基本检测原理及其应用；随机性微弱信号的最佳滤波检测；离散性微弱光信号的检测方法。

本书每章内容编排包含6个部分：（1）开篇案例引导；（2）理论基础推导；（3）微弱信号检测方法；（4）微弱信号检测方法的信噪比及特性分析；（5）对应微弱信号检测技术的数字处理方法；（6）典型应用。

本书由孙士平担任主编，罗明璋担任副主编，其他参编人员为武洪涛、李涛、黄小荣、赵勇、阮宁君和魏勇。

本书实用性强、适用面广，可作为测控技术与仪器、地球物理、地球勘探、测录井、自动化、电子信息工程、通信工程、物理、光学、化学、生物医学工程、医学仪器等专业的高年级本科生和研究生教材，也可作为医疗仪器仪表工程、产品质量检测与控制、自动化仪器仪表、计量工程、信息工程等有关专业工程技术人员与科技人员的参考书。

在本书编写过程中受到旅居加拿大的熊晓东教授的悉心指导和极大关心，在此表示真诚的谢意！

尽管编者为本书付出了许多的心血和努力，但书中难免存在疏漏，恳请广大读者批评指正。

孙士平

2012年10月于长江大学

目 录

第 1 章 绪论	1
1.1 干扰、噪声的概念	2
1.1.1 干扰和噪声	2
1.1.2 随机噪声的功率谱密度及噪声分类	4
1.1.3 相关函数及随机噪声的相关函数	5
1.1.4 等效噪声带宽	8
1.2 微弱信号检测	10
1.2.1 微弱信号检测的概念	10
1.2.2 微弱信号检测的意义和目的	10
1.2.3 微弱信号检测的内容	11
1.2.4 常规小信号检测方法与微弱信号检测的基本方法	12
1.3 信噪比、信噪改善比、噪声系数和噪声因数	22
1.3.1 信噪比和信噪改善比	22
1.3.2 噪声系数和噪声因数	23
思考和练习	24
第 2 章 低噪声前置放大与屏蔽、接地技术	25
2.1 电子元器件的噪声	26
2.1.1 电阻的噪声	26
2.1.2 电容器的噪声	28
2.1.3 变压器的噪声	30
2.1.4 双极型晶体管的噪声	30
2.1.5 场效应管的噪声	34
2.2 低噪声前置放大技术	35
2.2.1 低噪声前置放大器的等效噪声模型	36
2.2.2 低噪声前置放大器的设计	37
2.3 微弱信号检测系统屏蔽与接地技术	46
2.3.1 干扰噪声源	46
2.3.2 电容性耦合与屏蔽	52
2.3.3 电感性耦合与屏蔽	53
2.3.4 接地方式	55
2.3.5 系统的地回路电流	59
2.3.6 切断或减小地回路电流的几种方法	60
思考和练习	67

第 3 章 周期性微弱信号检测方法	68
3.1 同步积分器	69
3.1.1 同步积分器的原理	69
3.1.2 同步积分器的性能	73
3.1.3 同步积分器的两节串联	76
3.1.4 同步积分器的等效噪声带宽	77
3.1.5 实用同步积分器电路	78
3.2 旋转电容滤波器	80
3.2.1 旋转电容滤波器的原理	81
3.2.2 旋转电容滤波器的性能	83
3.2.3 旋转电容滤波器的等效噪声带宽	84
3.2.4 实用旋转电容滤波器电路	84
3.3 相关器	85
3.3.1 相关器的原理	86
3.3.2 相关器的性能	87
3.3.3 相关器的等效噪声带宽	90
3.4 数字式相关器	91
3.4.1 相关器的种类及数字式相关器的系统组成	91
3.4.2 数字式相关函数的实际运算	92
3.4.3 数字式相关函数的实现	94
3.4.4 数字式相关函数的误差分析	101
3.5 应用实例——编码地震提高地震探测能力	101
3.5.1 编码地震基本原理	101
3.5.2 编码地震实验系统实现方法	102
3.5.3 信号和噪声特征分析	103
3.5.4 数据相关分析结果	104
3.5.5 结论	106
思考和练习	106
第 4 章 取样积分器、多点信号平均器、锁定放大器的基本检测原理及其应用	107
4.1 门积分电路	108
4.1.1 门积分电路的传输函数	108
4.1.2 门积分电路的性能	110
4.1.3 门积分电路的等效噪声带宽	112
4.1.4 信噪比的改善	114
4.2 取样积分器	116
4.2.1 取样概述	116
4.2.2 取样积分器的取样方式	119
4.2.3 取样积分器的原理和工作方式	122
4.3 多点信号平均器	128
4.3.1 多点信号平均器的工作原理	128
4.3.2 数字式多点信号平均器的结构组成	130

4.3.3	数字式平均的信噪改善比	131
4.3.4	数字式平均的传输函数特性	133
4.3.5	数字式平均的实现算法	136
4.4	锁定放大器	138
4.4.1	锁定放大器的基本原理	138
4.4.2	锁定放大器的主要技术指标	141
4.4.3	锁定放大器的过载能力、动态范围与动态协调	145
4.4.4	几种典型的锁定放大器	152
4.4.5	正交矢量锁定放大器	157
4.5	应用实例——物质含水量检测系统设计与分析	159
4.5.1	检测系统设计及工作原理	159
4.5.2	数据分析和处理	160
4.5.3	结论分析	161
	思考和练习	161
第 5 章	随机性微弱信号的最佳滤波检测	163
5.1	随机性微弱信号的基本特征	164
5.2	随机性微弱信号的匹配滤波器	165
5.2.1	匹配滤波器理论	165
5.2.2	白噪声背景下的匹配滤波器对微弱信号的检测	167
5.2.3	有色噪声背景下的匹配滤波器对微弱信号的检测	170
5.3	随机性微弱信号的维纳滤波	172
5.3.1	维纳滤波器必须满足的基本方程	172
5.3.2	维纳滤波器的非因果解	174
5.3.3	维纳滤波器的因果解	176
5.3.4	维纳滤波器的正交性	180
5.3.5	维纳滤波器的离散检测	181
5.4	随机性微弱信号的卡尔曼滤波	183
5.4.1	非递推算法和递推算法	183
5.4.2	一维(或标量)卡尔曼滤波方程	184
5.4.3	一维卡尔曼滤波算法及模型	185
5.4.4	一维卡尔曼滤波检测	190
	思考和练习	193
第 6 章	离散性微弱光信号的检测方法	194
6.1	概述	195
6.2	光子计数技术	195
6.2.1	光子计数技术原理概述	195
6.2.2	光电倍增管的结构、种类及应用	196
6.2.3	甄别器	200
6.2.4	计数器的工作方式	202
6.2.5	光子计数系统的检测误差及其处理方法	203
6.3	光学多通道分析仪	207

6.3.1	概述	207
6.3.2	多色仪	208
6.3.3	多通道检测器中的光电检测器	209
6.3.4	像增强器	225
6.3.5	光学多通道分析仪的工作原理	227
6.4	光子计数器与光学多通道分析仪的应用	228
6.4.1	用单光子计数法检测稀土荧光材料的激发光谱	228
6.4.2	利用光学多通道分析仪检测人体血液荧光光谱及其在生物医学领域中的应用 ...	232
6.4.3	光学多通道分析仪在癌症诊断中的应用	234
	思考和练习	236
	参考文献	237

第 1 章

绪 论

教学目的

通过对本章的学习，了解什么是微弱信号检测技术、微弱信号检测技术的发展历程和发展方向、微弱信号检测的应用领域和应用范围、微弱信号检测的意义和目的、微弱信号检测的内容，掌握噪声、干扰、微弱信号、信噪比、信噪改善比等的基本概念，初步理解微弱信号检测的一些基本方法。

引例 1

我的信号哪里去了？是谁偷走了我的信号？我该怎样得到我的信号？

请看现场抓拍的一组信号图片，图 1-1 是原信号，图 1-2 是接收到的信号，图 1-3 是输入端短路时的信号。

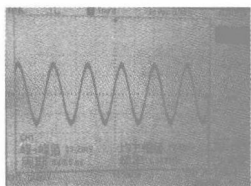


图 1-1 原信号

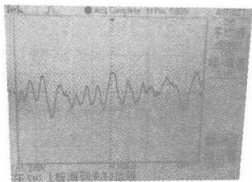


图 1-2 接收到的信号

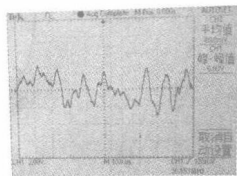


图 1-3 输入端短路时的信号

设计了一个测试电路，放大电路、滤波电路等都工作正常，目的是将我发送的原信号还原出来，信号经过传输媒体之后到输入端经过传感器进行测试。本来意图是希望能够测试出如图 1-1 所示的原信号波形，结果在输出端测出了如图 1-2 所示的不知道是什么信号的信号，将发送端信号源短路后，在输出端测出了另一个不知道是什么信号的信号。问题来了：

- (1) 我的信号哪里去了？
- (2) 难道是谁偷走了我的信号？
- (3) 这是什么原因？
- (4) 我如何才能测试出我的信号？
- (5) 我又如何恢复我的信号呢？

1.1 干扰、噪声的概念

引例 1 中所述信号哪里去了呢？没有被谁偷走，信号仍然存在，只是你的信号被噪声和干扰淹没了，因为你的信号在到达放大器输入端时已经很微弱，而噪声和干扰又很强。这就好像荒漠草原中的大象、野牛和羔羊群，放眼望去只能看到大象和野牛，根本看不到羔羊，大象和野牛好比噪声和干扰，而羔羊正好是我们要找的信号。如果你把大象和野牛赶走，你自然就看见羔羊了。

1.1.1 干扰和噪声

对有用信号来讲，干扰和噪声是讨厌的扰动。为了区别，常把可以减小或消除的外部扰动称为干扰，而把由于材料或器件的物理原因所产生的扰动称为噪声。要了解干扰和噪声，主要从如下两个方面来理解。

(1) 干扰和噪声无处不在，分布广泛，并与信号共存。图 1-4 所示为干扰和噪声的分布示意图。

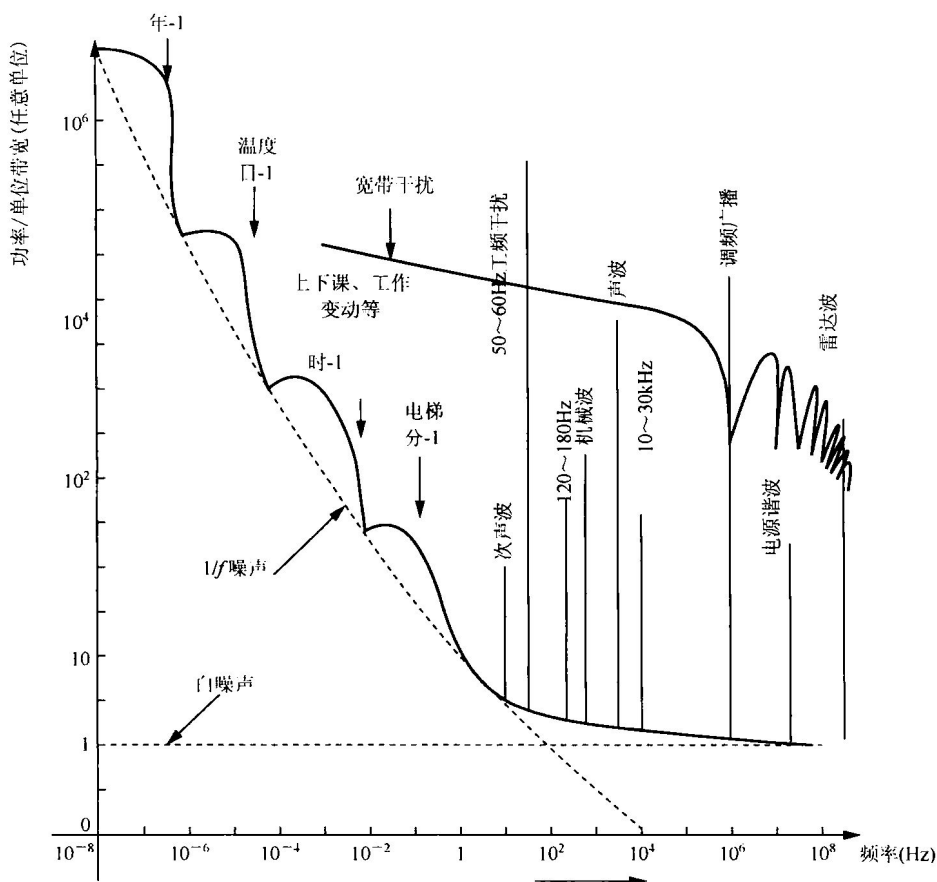


图 1-4 干扰和噪声的分布示意图

图 1-4 表示在我们日常生活的环境中干扰和噪声无处不在, 并与信号共存。各种各样的干扰和噪声分布范围极其广泛, 并且幅值各不相同。单从温度变化的角度讲, 世纪更迭, 年复一年, 每日温差就是对温度而言的一种噪声。再往下走, 每日上下班、上下课及电梯的运行等也是一种物理量的变化, 从某种程度上讲对我们的生活而言也是一种噪声。再往下, 工频电源 50~60Hz、某种频率的机械振动及周边音频环境也是一种噪声。频率再往高, 调幅、调频、调相广播电视及雷达信号、电源开关引起的谐波信号等, 对某些检测系统而言也是噪声; 还有一些宽带干扰噪声、雷电干扰噪声、宇宙射线噪声等都广泛地分布于我们的生活和工作中。

(2) 基本的干扰和噪声绝大多数是随机的, 且前后独立, 但每种干扰和噪声大多服从一定的统计分布规律。

由于电路中电子及其他载流子的随机扰动, 电路内部的噪声无处不在。电路外部的各种干扰也会在电路中感应出不同频率分布的噪声。无论是内部噪声还是外部干扰, 在这里统称为噪声。很多种噪声是随机变量随时间变化的过程, 其瞬时值是不确定的, 无论对它的过去值观测多长时间, 仍然不能确切预测其未来的瞬时值。

在微弱信号检测过程中需要处理的主要是基本的干扰和噪声。外部干扰可以通过屏蔽和接地技术加以减弱或消除(第 2 章将会作具体讲解), 而基本噪声是一种前后独立的平稳随机过程, 在任何时刻它的幅度、波形及相位都是随机的, 但我们可以用一定的统计分布规律对其进行描述。统计方法侧重的是样本总体的定量性质, 而不是个体元素的性质。就随机噪声而言, 样本可由其波形的大量的连续取值组成。常用的概率和统计描述方法有概率密度函数及数学期望值、方差、均方值、相关函数等特征值。

概率密度函数及统计特征不随时间变化的随机过程称为平稳随机过程, 电路中的噪声一般都是平稳随机过程。电路中的噪声还具有各态遍历性质, 其统计平均可以用时间平均来计算。各态遍历的随机过程一定是平稳随机过程。

只要产生噪声过程的基本条件不变, 在给定时间区间内的噪声功率和能量就基本不变, 那么它在时域内的幅度平均值基本为零。大多数噪声瞬时幅度的概率服从高斯分布规律, 也就是正态分布规律。示波器中观察的噪声波形如图 1-5 所示。幅度的正态分布函数如图 1-6 所示。

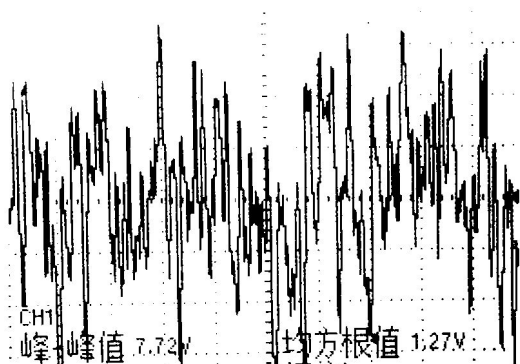


图 1-5 示波器中观察的噪声波形

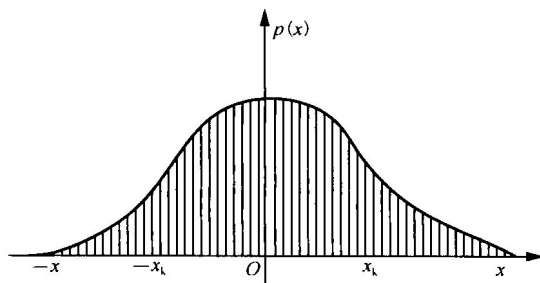


图 1-6 幅度的正态分布函数

如图 1-6 所示的幅度的正态高斯分布的概率密度函数可以表示为

$$p(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}} \quad (1-1)$$

式中, $p(x)$ 为随机物理变量, 表示的是噪声电压 $x(t)$ 在 t 时刻取值为 x 的概率;

$\mu_x = \bar{x} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$ 为噪声电压 $x(t)$ 的均值, 它表示的是直流分量;

$\sigma_x^2 = \overline{x^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [x(t) - \mu_x]^2 dx$ 为 $x(t)$ 的方差, 它反映的是随机噪声的起伏状态。

在检测数据处理中有时把噪声电压的均方根值 σ_x 称为标准差。在低噪声设计和检测中, 主要关心的是 σ_x , 它是衡量系统噪声大小的基本量。

当 $x = \mu_x$ 时, $p(x)$ 取得最大值, 即

$$p(x)|_{x=\mu_x} = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \quad (1-2)$$

$p(x)$ 的取值为 $0 \sim 1$, 所以总面积代表 1。波形集中在零电平附近, 高于或低于这个电平的噪声波形的瞬时值的概率等于 0.5, 超过 x_k 电平值的概率为如图 1-6 中所示的阴影区面积。作为工程近似, 一般情况下认为电噪声都位于 ± 3 倍的噪声均方根值之内, 峰-峰电压在 99.7% 的时间内小于 6 倍的均方根值。

式 (1-1) 说明噪声电压可以取各种值, 即使幅度很大, 也有一定的概率。峰值越高, 概率越小。表 1-1 表示对给定的峰值 $|x_0|$, 超过 $|x_0|$ 的概率 $p(x)|_{|x_0| > x_0}$ 。

表 1-1 零均值高斯噪声峰值超过 $|x_0|$ 的概率

$\frac{x_0}{\sigma_x}$	1.645	2.576	3.291	3.890	4.417
$p(x) _{ x_0 > x_0}$	0.1	0.01	0.001	0.0001	0.00001

由表 1-1 可知, 瞬时噪声幅度基本上在 $\pm 3\sigma_x$ 之内, 所以工程上常取噪声峰值电压为 3 倍的均方根值电压, 并在测量噪声电压时用均方根响应电压表。正弦波全波整流的平均值是峰值的 0.636, 而它的均方根值是峰值的 0.707。若用平均值电压表 (常用的交流电压表) 测量正弦波的均方根值, 则要在平均值电压表的刻度上乘以修正系数 1.11。

高噪声电压由大量短尖脉冲组成, 它的噪声电压均方根值为峰值的 0.798 倍, 均方根值与平均值之比为 1.255。因此, 在均方根值正弦响应的电压表上所读出的噪声电压, 必须以修正系数 1.13 才是噪声电压的均方根值。

1.1.2 随机噪声的功率谱密度及噪声分类

对信号而言, 我们分析其特性时, 主要考虑它的频谱, 即用幅度谱和相位谱来描述其幅值大小、频率高低、相位大小、也可以采用能谱或功率谱对信号进行描述。而对于随机噪声, 它的出现本身就是一种随机过程, 我们是否还能采用同信号的分析方法一样的方法来分析它的幅值、频率和相位呢? 因为其随机性、非周期性, 幅值何时为正、正多大及何时为负、负多大都没法知道; 对于频率、相位, 也具有同样的随机性。随机噪声往往又伴随我们的测试信号同时出现, 我们又应该如何衡量它对有用信号的影响呢?

(1) 随机信号既不能用确定的时间函数表示, 也无法用幅度谱表示, 只能用功率谱来描述它的频域特性。同时, 能谱或功率谱同样反映信号的能量或功率密度随频率变化的情况, 在研究信号能量 (或功率) 的分布、决定它所占频带等问题中起重要作用。

如前所述, 噪声电压不仅每一瞬间取值是随机的, 且噪声电压随时间变化也是随机的, 故称为随机过程。但系统处于稳态时, 不同时刻噪声的概率分布规律是一样的, 因此又称为平稳随机过程。这种平稳随机过程的时间统计特性用 μ_x 、 σ_x^2 、 σ_x 等表示, 它与反映噪声的统

计特性, 即平均值 μ_x 、均方值 σ_x^2 和均方根值 σ_x 是相同的。这样, 噪声测试中可利用对时间求平均 σ_x^2 来测量噪声有效值。

分析信号通过线性系统时, 我们习惯采用傅里叶级数分析。在低噪声设计中, 也必须研究噪声的传输性能, 因而需要对噪声进行频谱分析。

(2) 噪声的频谱分析采用功率谱密度来描述, 因此可用平稳随机过程理论所定义的噪声功率谱密度来讨论噪声的频谱分布。

$$s(f) = \lim_{\Delta f \rightarrow 0} \frac{p(f, \Delta f)}{\Delta} \quad (1-3)$$

式中, $p(f, \Delta f)$ 是指频率 f 处、带宽为 Δf 的噪声平均功率。若已知噪声的功率谱密度, 则在 f_1 到 f_2 的频域内的噪声功率 (即均方值) 为

$$\overline{x^2} = p_N = \int_{f_1}^{f_2} s(f) df \quad (1-4)$$

可见噪声功率谱密度 $s(f)$ 表示单位频带内噪声功率随频率的变化情况。而且噪声功率谱曲线 $s(f)$ 所覆盖的面积在数值上等于噪声的总功率。

(3) 噪声按照其在工作频段内出现不同特性, 可以分为白噪声、红噪声 (又称为低频噪声) 和蓝噪声 (又称为高频噪声)。图 1-7 所示为噪声的分类及其功率谱密度。

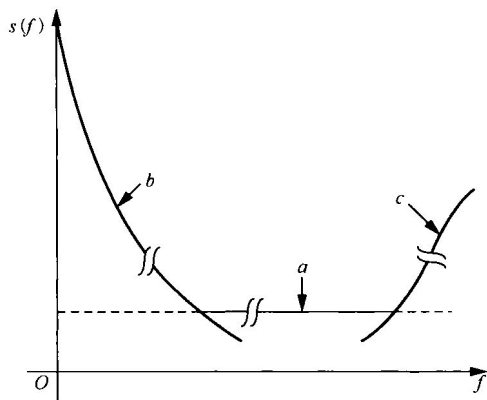


图 1-7 噪声的分类及其功率谱密度

如果噪声在很宽的频率范围内具有恒定的功率谱密度, 则这种噪声称白噪声, 如图 1-7 中 a 所示 (注意, 功率谱不包括相位信息)。反之, 若噪声功率谱密度不是常数, 则称为有色噪声, 如图 1-7 中 b 所示。以后将要讨论到双极型晶体管通常具有低频 $1/f$ 噪声, 它的谱密度随频率的降低而上升, 相当于一种有色噪声 (又名红噪声)。若噪声谱密度随频率升高而上升, 则称其为蓝噪声, 如图 1-7 中 c 所示。这些都是以光的颜色与频率的关系来比拟划分的。

1.1.3 相关函数及随机噪声的相关函数

1. 自相关函数及其特性

时间函数 $x(t)$ 的自相关函数能反映 $x(t)$ 时域特性的平均度量, 它反映它自身 $x(t)$ 在不同时刻 t_1 和 t_2 取值的相关程度, 其定义为

$$\hat{R}_x(t_1, t_2) = E[x(t_1)x(t_2)] \quad (1-5)$$

若令 $t_1 = t$, $t_2 = t - \tau$, 则简记为 $\hat{R}_x(\tau)$, 即

$$\hat{R}_{xx}(\tau) = E[x(t)x(t-\tau)] \quad (1-6)$$

用时间平均来计算式(1-6)的统计平均,自相关函数可以表示为

$$\hat{R}_{xx}(\tau) = E[x(t)x(t-\tau)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [x(t)x(t-\tau)] dt \quad (1-7)$$

自相关函数具有以下重要特点。

(1) 对于实信号,自相关函数是 τ 的偶函数,即

$$\hat{R}_{xx}(\tau) = \hat{R}_{xx}(-\tau) \quad (1-8)$$

证明:对于平稳的随机噪声,其统计量不随时间起点而变化,故有

$$\hat{R}_{xx}(\tau) = E[x(t)x(t-\tau)] = E[x(t)x(t+\tau)] = \hat{R}_{xx}(-\tau) \quad (1-9)$$

因此,自相关函数又可以表示为

$$\hat{R}_{xx}(\tau) = E[x(t)x(t+\tau)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [x(t)x(t+\tau)] dt \quad (1-10)$$

(2) 当 $\tau \rightarrow 0$ 时, $\hat{R}_{xx}(\tau)$ 具有最大值,即

$$\hat{R}_{xx}(0) \geq \hat{R}_{xx}(\tau) \quad (1-11)$$

证明:因为

$$[x(t) \pm x(t-\tau)]^2 \geq 0$$

所以

$$x^2(t) + x^2(t-\tau) \geq 2x(t)x(t-\tau)$$

取两边的数学期望值,得

$$\hat{R}_{xx}(0) \geq \hat{R}_{xx}(\tau)$$

因此, $\hat{R}_{xx}(\tau)$ 的一般形状如图1-8所示。可见,从 $\tau=0$ 具有最大值开始,随着 $|\tau|$ 的增大, $|\hat{R}_{xx}(\tau)|$ 呈衰减趋势,衰减的快慢取决于 $x(t)$ 不同时刻取值的相关程度。并且, $x(t)$ 的频带越宽, $|\hat{R}_{xx}(\tau)|$ 衰减得越快。

(3) $\hat{R}_{xx}(0)$ 反映 $x(t)$ 的均方值,对应于随机噪声的功率,即

$$\hat{R}_{xx}(0) = E[x(t)x(t-0)] = \overline{x^2} \quad (1-12)$$

$\hat{R}_{xx}(0)$ 与式(1-3)中的 $p(f, \Delta f)$ 相对应。

(4) 如果 $x(t)$ 包含某种周期性分量,则 $\hat{R}_{xx}(\tau)$ 包含同样周期的周期性分量。对于平稳的随机噪声,如果它所包含的周期性分量是正弦信号,那么 $\hat{R}_{xx}(\tau)$ 将不再包含此正弦分量的相位信息。不管其初相位如何,谐波分量在自相关函数中总是以余弦函数的形式出现。

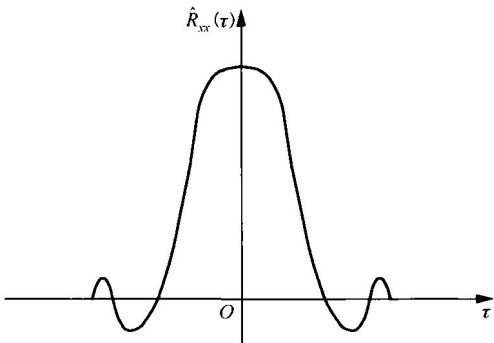


图1-8 自相关函数的一般形状

(5) 互不相关的两个随机噪声之和的自相关函数等于两个随机噪声自相关函数之和,即如果 $z(t) = x(t) + y(t)$,则 $\hat{R}_z(\tau) = \hat{R}_x(\tau) + \hat{R}_y(\tau)$ 。

(6) 对于平稳的随机噪声, $\hat{R}_{xx}(\tau)$ 仅与时间差 τ 有关,而与计算时间的起点无关。

(7) 当 $\tau \rightarrow \infty$ 时,自相关函数反映随机噪声直流分量的功率,即 $\hat{R}_{xx}(\infty) = \mu_x^2$,与式(1-1)中的 μ_x 对应。

自相关函数可以应用于随机噪声,也可以应用于确定性信号。

2. 互相关函数、随机噪声的互相关函数及其特性

互相关函数反映两个不同的随机噪声 $x(t)$ 和 $y(t)$ 在不同时刻 t_1 和 t_2 取值的相关程度, 其定义为

$$\hat{R}_{xy}(\tau) = E[x(t_1)y(t_2)] \quad (1-13)$$

对于平稳的随机噪声, 其统计特征量与时间起点无关。若令 $t_1 = t - \tau$, $t_2 = t$, 则简记 $\hat{R}_{xy}(t_1, t_2) = \hat{R}_{xy}(t - \tau, t)$ 为 $\hat{R}_{xy}(\tau)$, 即

$$\hat{R}_{xy}(\tau) = E[x(t - \tau)y(t)] \quad (1-14)$$

和式 (1-7) 一样, 用时间平均来计算式 (1-14) 的统计平均, 互相关函数可以表示为

$$\hat{R}_{xy}(\tau) = E[y(t)x(t - \tau)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [y(t)x(t - \tau)] dt \quad (1-15)$$

互相关函数具有以下重要特点。

(1) 互相关函数的上界由下式确定, 即

$$\hat{R}_{xy}(\tau) \leq \sqrt{R_x(0)R_y(0)} \quad (1-16)$$

(2) 互相关函数不再是偶函数, 即

$$\hat{R}_{xy}(\tau) \neq R_{xy}(-\tau) \quad (1-17)$$

但

$$\hat{R}_{xy}(\tau) = R_{xy}(-\tau) \quad (1-18)$$

(3) τ 值很大时的互相关函数反映 $x(t)$ 和 $y(t)$ 均值的乘积, 即

$$\hat{R}_{xy}(\infty) = \mu_x \mu_y \quad (1-19)$$

(4) 对于平稳的随机噪声, $\hat{R}_{xy}(\tau)$ 仅与时间差 τ 有关, 而与计算时间的起点无关。

互相关函数可以应用于随机噪声与随机噪声之间的相关性特性研究, 也可以应用于确定性信号与随机噪声之间的相关性特性研究, 还可以应用于确定性信号与确定性信号之间的相关性特性研究。

3. 互协方差函数及其特性

与互相关函数紧密相关的另一个统计量是互协方差函数, 其定义为

$$\hat{C}_{xy}(t_1, t_2) = E\{[x(t_1) - \mu_x][y(t_2) - \mu_y]\} = \hat{R}_{xy}(t_1, t_2) - \mu_x \mu_y \quad (1-20)$$

互协方差函数的特点如下。

(1) 对于零均值的平稳随机信号 $x(t)$ 和 $y(t)$, 它们的互相关函数与互协方差函数相等, 即 $\mu_x = \mu_y = 0$, $\hat{R}_{xy}(\tau) = \hat{C}_{xy}(\tau)$ 。

(2) 互协方差函数反映两个函数 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的相关特性。

如果对于任意 t_1 和 t_2 都能满足 $\hat{C}_{xy}(t_1, t_2) = 0$, 则称 $x(t)$ 和 $y(t)$ 互不相关。

描述两路随机噪声相互关系的另一个术语是“相互独立”。当随机噪声 $x(t)$ 和 $y(t)$ 相互独立时, 其联合概率密度 $p(x, y)$ 可以分解为

$$p(x, y) = p(x)p(y) \quad (1-21)$$

当式 (1-21) 成立时, $x(t)$ 与 $y(t)$ 必定相互独立, 而且 $E(xy) = E(x)E(y)$ 。

4. 随机噪声的自相关函数及两路随机噪声的互相关函数

通常的随机噪声就是一个平稳随机过程, 由自相关函数的特点, 随机噪声的自相关函数 $\hat{R}_{xx}(\tau)$ 与 τ 的关系如图 1-9 所示。

可见随机噪声的自相关函数在 $\tau \rightarrow 0$ 时存在一定的幅值, 随着 τ 值的增加, $\hat{R}_{xx}(\tau)$ 会锐减到接近于零。

两路随机噪声 $x(t)$ 与 $y(t)$ 之间的相关性很小, 它们的互相关函数 $\hat{R}_{xy}(\tau)$ 与 τ 的关系如图 1-10 所示。

由图 1-10 所示的两路随机噪声 $x(t)$ 与 $y(t)$ 的互相关函数 $\hat{R}_{xy}(\tau)$ 与 τ 的关系可得, $\hat{R}_{xy}(\tau)$ 呈现出 δ 函数的形式。

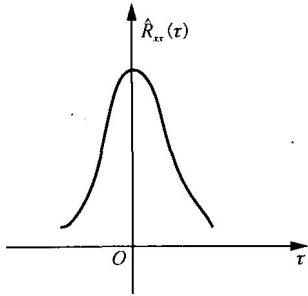


图 1-9 随机噪声的自相关函数 $\hat{R}_{xx}(\tau)$ 与 τ 的关系

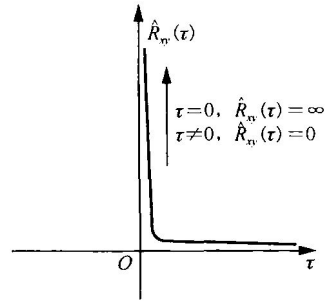


图 1-10 两路随机噪声 $x(t)$ 与 $y(t)$ 的互相关函数 $\hat{R}_{xy}(\tau)$ 与 τ 的关系

由此可见, 随机噪声的自相关函数和互相关函数, 只要 τ 值不为 0, 随着 τ 值的增加, 它们都接近于零。

应该说明的是, 相互独立的两路随机噪声一定互不相关, 但互不相关的两路随机噪声不一定相互独立。

相关函数的上述特性对于从噪声中检测微弱信号非常有用。一般情况下, 被检测的有用信号与淹没信号的噪声之间不存在相关性, 因此采用相关方法有可能把有用信号从噪声中提取出来。

1.1.4 等效噪声带宽

应用于确定性信号的线性电路, 带宽的典型定义是半功率点之间的频率间隔, 这就是常说的线性电路的 3dB 带宽。功率正比于电压的平方, 功率下降到 50% 相当于电压下降到 $\frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707 = 70.7\%$ 处, 即电压下降了 3dB。

而对于随机噪声, 由于其电压幅度的不确定性, 人们主要关心的是系统输出的随机噪声功率的大小。引入等效噪声带宽的概念, 可以使很多输出噪声功率的工程计算得以简化。

等效噪声带宽 B_e 不同于上述 3dB 带宽, 对 B_e 的定义: B_e 是在相同的输入噪声情况下, 与实际线性电路输出噪声功率相等的理想矩形通带系统的带宽。

等效噪声带宽的定义示意图如图 1-11 所示。

设输入白噪声的功率谱密度函数为 $G(f)$, 其功率最大增益为 G_0 , 其等效噪声带宽 B_e 的定义为

$$B_e = \frac{1}{G_0} \int_0^{\infty} G(f) df \quad (1-22)$$