S H U X U E J I A N M O A N L I

普通高等教育"十二五"规划教材

数学建模案例

韩 明　张积林　李 林
林 杰　　　　　林江宏　编著

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

内 容 提 要

本书精选反映当代科技进步和社会发展的21个问题作为案例，以"问题驱动"的形式详细讲解建立数学模型的思路、方法和步骤，并给出问题的解决方案. 在所选的案例中，有的是"中国大学生数学建模竞赛"、"美国大学生数学建模竞赛"的赛题，也有的是根据赛题改编的，还有一些其他问题. 涉及的数学方法主要有微分、积分、代数、统计、概率、最优化、微分方程、分形几何、拟合、插值、灰色理论、图论及现代优化算法等. 另外，还有一些物理方法. 为便于读者学习和训练，本书针对不同案例数学建模所需的数学理论和方法，有侧重地分别介绍相关的数学知识. 除个别计算比较简单的案例外，都在案例解答中给出了计算程序.

本书案例特色鲜明、涉及范围广阔，内容讲解紧凑、明了，对读者掌握分析实际问题建立数学模型大有帮助，可作为高等院校各专业本、专科"数学建模"课程的教材，也可以作为数学建模竞赛培训以及研究生"数学建模"课程的参考书，还可以供有关教师和科技人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

数学建模案例 / 韩明等编著. -- 上海：同济大学出版社，2012. 6

ISBN 978-7-5608-4865-5

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①韩… Ⅲ. ①数学模型—案例 Ⅳ. ①O141. 4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 083151 号

普通高等教育"十二五"规划教材

数学建模案例

韩 明 张积林 李 林 林 杰 林江宏 编著

责任编辑 陈佳蔚 **责任校对** 徐春莲 **封面设计** 潘向蓁

出版发行 同济大学出版社 www.tongjipress.com.cn

(上海市四平路 1239 号 邮编:200092 电话:021-65985622)

经 销 全国各地新华书店

印 刷 同济大学印刷厂

开 本 787 mm×960 mm 1/16

印 张 17

字 数 340 000

印 数 1—3 100

版 次 2012 年 6 月第 1 版 2012 年 6 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-5608-4865-5

定 价 35. 00 元

前　　言

数学的特点不仅在于其概念的抽象性、逻辑的严密性、结论的明确性和体系的完整性，而且还在于应用的广泛性. 20世纪以来，随着科学技术的发展和计算机的日益普及，人们对各种问题解决的要求越来越精确，使得数学的应用越来越广泛和深入；特别是进入21世纪的知识经济时代，数学科学的地位发生了巨大的变化，它正在从经济和科技的后方走向前沿. 经济发展的全球化、计算机技术的迅猛发展以及数学理论与方法的不断扩充，使得数学已经成为当代高科技的一个极为重要的组成部分，数学已经成为一种能够普遍实施的技术.

对于数学教育而言，既应该让学生掌握准确快捷的计算方法和严密的逻辑推理，也需要培养他们用数学工具分析和解决实际问题的意识和能力. 传统的数学教学体系和内容无疑偏重于前者，开设数学建模课程以及开展数学建模竞赛则是加强后者的一种有益的、成功的尝试. 著名数学家、中国科学院院士李大潜教授曾经说过："数学教育本质上就是一种素质教育，数学建模的教学及竞赛是实施素质教育的有效途径."因此，将数学建模活动和数学教学有机地结合起来，就能够在教学实践中更好地体现和完成素质教育.

21世纪对各类专业技术人才的数学素质和能力的要求越来越高，我们培养的人才应具有对带专业背景的实际问题建立数学模型的能力，这样才能在实际工作中发挥更大的创造性. 随着科学技术的发展，数学模型(Mathematical Model)、数学建模(Mathematical Modelling)这两个词出现的频率越来越高.

数学建模是沟通现实世界和数学科学之间的桥梁，是数学走向应用的必经之路. 众所周知，具有悠久历史的数学是各门自然科学、工程技术乃至社会科学的基础，是科技进步、经济建设和社会发展的重要工具. 数学的应用十分广泛，数学的重要性得到人们的广泛公认. 但是，作为一门基础的自然科学和一种精确的科学语言，数学又是以极为抽象的形式出现的. 如果人为地割断数学与现实世界的密切联系，这种抽象的形式就会掩盖数学的丰富内涵，并对数学的实际应用形成巨大障碍. 数学建模可以说是解决这个问题的一把钥匙.

20世纪80年代初，数学建模开始进入我国大学课堂，成为一门新的数学课程. 1992年全国大学生数学建模竞赛开始举办，每年一次. 二三十年来数学建模教学和数学建模竞赛活动相互促进，健康发展. 2011年适逢全国大学生数学建模竞赛举办20周年，参赛规模已达到1 251所院校的19 490队，为历年来参赛人数最多的一次.

数学建模竞赛虽然发展得如此迅速，但是参加者毕竟还是很少一部分学生，要使数学建模具有强大的生命力，必须与日常的教学活动和教育改革相结合. 目前，内容、形式不尽相同的数学建模课程已在千余所高校开设，正式出版的教材和参考书达 200 多种. 在我国乃至世界范围内，尚没有哪一门数学课程、哪一项学科竞赛能取得如此迅猛的发展. 中国高等教育学会会长周远清教授曾用“成功的高等教育教学改革实践”给予评价.

本书的目的在于帮助读者尽快掌握数学建模的技巧，希望对数学建模课程、数学建模竞赛培训以及组队参加“中国大学生数学建模竞赛”和“美国大学生数学建模竞赛”会有所帮助.

根据数学建模是以“问题驱动”的特点，本书主要是通过“案例”的形式来介绍数学建模. 在本书所选择的案例中，有的就是“中国大学生数学建模竞赛”、“美国大学生数学建模竞赛”的赛题，也有根据赛题改编的问题，还有一些其他问题；涉及的数学方法主要有：微分、积分、代数、统计、概率、最优化、微分方程、分形几何、拟合、插值、灰色理论、图论及现代优化算法等. 另外还有一些物理方法. 本书从第 2 章开始，每章一个案例，共介绍 21 个案例.

考虑到 MATLAB 在数学建模中应用的广泛性，本书中大部分案例的程序就是用 MATLAB 写的(只有少数几个案例中的部分程序是用 LINGO 和 VC＋＋写的)，在本书附录中有“MATLAB 的基本操作”，还有 1992—2011 年“全国大学生数学建模竞赛”题目、2001—2011 年“美国大学生数学建模竞赛”题目等.

本书与大部分数学建模教材的不同之处在于：①在案例中都附有计算程序(除个别案例计算比较简单的外)，这也是本书的一个特色；②没有按照数学建模所要用到的数学知识体系来介绍数学理论，而是在案例中需要什么数学知识就用什么，这也是本书的另一个特色.

本书是作者结合多年来的教学经验、数学建模培训和指导学生参加数学建模竞赛的实践经验编写而成的. 编写计划由韩明教授提出，经作者们讨论并确定，具体分工如下：第 1 章至第 5 章、第 10 章、第 13 章至第 19 章、附录，由韩明教授执笔；第 6 章、第 20 章、第 21 章，由张积林副教授执笔；第 11 章、第 12 章、第 22 章，由李林副教授执笔；第 7 章，由林杰老师执笔；第 8 章、第 9 章，由林江宏老师执笔；全书由韩明教授统稿、定稿.

本书作者在此对王家宝教授的指导和鼓励表示感谢，并对参考文献的作者表示感谢. 虽然我们努力想将本书写成一部既有特色又便于教学(或自学)的教材或参考书，但由于水平所限，书中难免还有一些疏漏甚至错误之处，恳请专家和读者批评指正. 一部好的教材需要经过多年的教学实践，反复锤炼. 我们将在以后修订时改正缺陷，并补充更好的案例.

韩　明

2012 年 6 月

目　录

1 绪　　论

数学的应用向所有的领域渗透，或者说各行各业日益依赖于数学，甚至可以说当今的社会正在日益数学化. 随着科学技术的进步，新的分支(交叉)学科不断出现，特别是与数学相结合而产生的新学科，如数学化学、数学地质学、数学心理学、金融数学、数理语言学等. 至于高科技与数学的关系就更加密切以至融为一体，一位有远见的科学家 David Jr 就曾深刻地指出："太少的人认识到当今如此受到称颂的高科技，本质上是一种数学技术. "David Jr 还中肯地指出："数学的重要性是不言自明的，何况许多对此看法游移不定的人并没有认真地思考过(数学的重要性问题). "他还告戒数学界要作出更多的主动努力使人们更加了解数学. 我国著名的科学家钱学森教授也多次强调数学的重要性，并论述了他对"数学技术"的理解.

我们看到一种矛盾现象，一方面很容易"论证"数学的重要性，因为从小学一年级到大学一二年级(甚至是高年级、研究生阶段)每学期都要学习数学而且都是必修课，而任何其他学科都没有持续这么长的学习时间的，因而"数学最重要"不是很自然了吗？我们也可以举出很多例子(从日常生活到尖端技术)说明数学是必不可少的. 但是另一方面，我们常常会发现听众不会反对你讲的例子，他(她)们中许多人还是认为数学没有多大用处甚至干脆说数学没有用. 这不仅仅是由于数学的语言比较抽象不容易掌握，还有数学教育中的问题以及其他的原因等. 我们应该对数学教育进行反思，特别是计算机普及的今天，大学数学教育应该如何进行改革呢？

1989 年，著名的科学家钱学森教授在"中国数学会教育与科研座谈会"上提出："电子计算机的出现对数学科学的发展产生了深刻的影响，大学理工科的数学课程是不是需要改革一番？"

1992 年，美国工业与应用数学学会的一篇论文就指出："一切科学与工程技术人员的教育必须包括愈来愈多的数学和计算机科学的内容. 数学建模和相伴的计算正在成为工程设计中的关键工具. "美国科学、工程和公共事业政策委员会在一份报告中指出："今天，在科学技术中最为有用的领域就是数值分析与数学建模".

据《科学时报》2011 年 9 月 23 日报道，全国大学生数学建模竞赛组委会主任、中国科学院院士、复旦大学教授李大潜在"2011 高教社杯全国大学生数学建模竞赛"新闻发布会上说："开设数学建模和数学实验课程，举办数学建模竞赛，为数学与外部世界的联系打开了一个通道，提高了学生学习数学的积极性和主动性，是对数学教学体系和内容改革的一个成功的尝试. "

20世纪80年代初，数学建模开始进入我国大学课堂，成为一门新的数学课程. 1992年全国大学生数学建模竞赛开始举办，每年一次. 二三十年来数学建模教学和数学建模竞赛活动相互促进，健康发展. 2011年适逢全国大学生数学建模竞赛举办20周年，参赛规模已达到1 251所院校的19 490队，为历年来参赛人数最多的一次. 竞赛虽然发展得如此迅速，但是参加者毕竟还是很少一部分学生，要使数学建模具有强大的生命力，必须与日常的教学活动和教育改革相结合. 20年来在竞赛的推动下，许多高校相继开设了数学建模课程，目前开设各种类型数学建模课程的学校已超过千所. 在我国乃至世界范围内，尚没有哪一门数学课程、哪一项学科竞赛能取得如此迅猛的发展. 中国高等教育学会会长周远清教授曾用"成功的高等教育教学改革实践"给予评价.

数学模型究竟是一门什么样的学问？它为什么在20世纪后半叶引起人们的普遍关注？数学建模教学和数学建模竞赛为什么能得到国家教育主管部门的高度重视，受到广大学生、教师的热烈欢迎？数学建模在人才培养和教育教学改革中起到哪些促进作用？姜启源、谢金星在《一项成功的高等教育改革实践——数学建模教学与竞赛活动的探索与实践》(《中国高教研究》，2011年第12期)中回答了这些问题. 当然，这些问题也是我们所关心的.

1.1 数学模型与数学建模

随着科学技术的迅速发展，数学模型(Mathematical Model)、数学建模(Mathematical Modelling)这两个词出现的频率越来越高，它们正在成为人们日常生活和语言交流中常见的术语. 那么什么是数学模型呢？什么又是数学建模呢？

叶其孝教授在《大学生数学建模竞赛辅导教材》中指出：要用数学去解决实际问题就一定要用数学的语言、方法去刻画该问题，而这种刻画的数学表述就是一个数学模型. 他还指出：所谓数学建模，可以说它是一种数学思考方法，是"对现实的现象通过智力活动构造出能抓住其重要性且有用的特征的数学表示."从科学技术、工程、经济、管理等角度看数学建模，就是用数学的语言和方法，通过抽象、简化建立能近似刻画并解决实际问题的一种有力的数学工具.

简单地说，数学模型就是对实际问题的一种数学表述. 具体一点说，数学模型是关于部分现实世界为某种目的的一个抽象的简化的数学结构. 更确切地说，数学模型就是对于一个特定的对象为了一个特定目标，根据特有的内在规律，作出一些必要的简化假设，运用适当的数学工具，得到的一个数学结构. 数学结构可以是数学公式、算法、表格或图示等. 数学建模就是建立数学模型，建立数学模型的过程就是数学建模的过程.

数学建模是沟通现实世界和数学科学之间的桥梁，是数学走向应用的必经之路. 众所周知，具有悠久历史的数学是各门自然科学、工程技术乃至社会科学的基础，是

科技进步、经济建设和社会发展的重要工具.数学的应用十分广泛,数学的重要性得到人们的广泛公认.但是,作为一门基础的自然科学和一种精确的科学语言,数学又是以极为抽象的形式出现的.如果人为地割断数学与现实世界的密切联系,这种抽象的形式就会掩盖数学的丰富内涵,并对数学的实际应用形成巨大障碍.数学建模可以说是解决这个问题的一把钥匙.

用数学方法解决一个实际问题,不论这个问题是来自工程建设、经济管理、生物、医学、地质、气象,还是社会、经济乃至人们的日常生活当中,都必须在实际问题与数学之间架设一座桥梁.首先把这个实际问题转化为一个相应的数学问题,然后对这个数学问题进行分析和计算,最后将所求得的解答回归实际,检验能否有效地回答原先的实际问题.如果最后得到的结果在定性或者定量方面与实际情况有很大的差距,那就要修正所建立的数学模型,直到取得比较满意的结果为止.这个全过程,特别是其中的第一步,就称为"数学建模",即为所考察的实际问题建立数学模型.

谈到数学模型的建立或者数学建模,似乎是一个新东西、新名词,其实它与数学有同样悠久的历史.公元前3世纪,欧几里德在总结前人研究结果的基础上,建立的欧几里德几何,就是针对现实世界的空间形式提出的一个数学模型.开普勒根据大量的天文观测数据总结出的行星运动的三大定律,后经牛顿利用万有引力定律、从力学原理出发给出了严格的证明,更是一个数学建模取得光辉成就的例子.到近代,出现在流体力学、电动力学、量子力学中的一些方程,也都是抓住了该学科本质的数学建模的成功范例,它们已经成为相关学科的核心内容和基本框架.

1.2 数学建模的基本方法和步骤

数学建模面临的问题是多种多样的,建模的目的不同、分析的方法不同、采用的数学工具不同,所得到的模型的类型也不同.下面所谓基本方法不是针对具体问题而是从方法论意义上讲的.

1.2.1 数学建模的基本方法

数学建模的基本方法可以分为两大类,一是机理分析法,二是测试分析法.**机理分析**是根据客观事物的特性认识,找出反映内部机理的数量关系,建立的模型常有明确的物理意义.**测试分析**是将研究对象看作一个"黑箱"系统(意思是它的内部机理看不清楚),通过对系统输入、输出数据的测量和统计分析,按照一定的准则找出与数据拟合得最好的模型.

面对一个实际问题用哪一种建模方法,主要取决于人们对研究对象的了解程度和建模目的.如果掌握了一些内部机理的知识,模型也要求具有反映内在特征的物理意义,建模就应以机理分析法为主.而如果对象的内部规律基本上不清楚,模型也不需要反映内部特性(例如仅用于对输出作出预报),那么就可以用测试分析法.

对于许多实际问题还经常将这两种方法结合起来使用，即用机理分析法建立模型的结构，用测试分析法确定模型的参数.

1.2.2 数学建模的一般步骤

数学建模要经过哪些步骤并没有一定的模式，通常与问题的性质、建模目的等有关(姜启源，谢金星，叶俊(2011)). 以下介绍三种具有代表性的数学建模步骤.

1. 第一种数学建模步骤

(1) **模型准备**. 要了解问题的实际背景，明确建模目的，搜集必要的各种信息，如现象、数据等. 尽量弄清楚研究对象的主要特征，做好建模的准备.

(2) **模型假设**. 根据对象的特征和建模目的，抓住问题的本质，忽略次要因素，作出必要的、合理的简化假设. 假设做得不合理或太简单，会导致错误的或无用的模型；假设做得过分详细，试图把复杂对象的众多因素都考虑进去，会使你很难或无法继续下一步的工作. 常需要在合理与简化之间作出恰当的折衷. 通常，做假设的依据，一是出于对问题内在规律的认识，二是来自对象、数据的分析，以及二者的综合. 想象力、洞察力、判断力以及经验，在模型假设中起着重要作用.

(3) **模型构成**. 根据所作的假设分析对象的因果关系，利用对象的内在规律和适当的数学工具，构造各个量(常量和变量)之间的等式(不等式)关系或其他数学结构. 这里除了需要一些相关学科的专门知识外，还常常需要较为广阔的应用数学方面的知识. 要善于发挥想象力，注意使用类比法，分析对象与熟悉的其他对象的共性，借用已有模型. 建模时还应该遵循的一个原则是：尽量采用简单的数学工具，因为你的模型总是希望更多的人了解和使用，而不是只供少数专家欣赏.

(4) **模型求解**. 可以采用解方程、画图形、优化方法、数值计算、统计分析等各种数学方法，特别是数学软件和计算机技术.

(5) **模型分析**. 对求解结果进行数学上的分析，如结果的误差分析、统计分析、模型对数据的灵敏性(sensitivity)分析、对假设的强健性(robust)分析等.

(6) **模型检验**. 把求解和分析结果翻译回到实际问题，与实际的现象、数据比较，检验模型的合理性和适用性. 如果结果与实际不符，问题常常出现在模型假设上，应该修改、补充假设，重建模型. 这一步对于模型是否真的有用非常关键，要以严肃认真的态度对待. 有些模型要经过几次反复，不断完善，直到检验结果获得某种程度上的满意.

(7) **模型应用**. 应用的方式一般取决于实际问题的性质和建模的目的.

2. 第二种数学建模步骤

Meerschaert(1999)把数学建模的过程归结为五个步骤，称为“五步方法”，并且贯穿全书各类问题的分析和讨论. 它们是：

(1) 提出问题；

(2) 选择建模方法；

(3) 推导模型的数学表达式；

(4) 求解模型；

(5) 回答问题.

以上五个步骤的具体内容，详见 Meerschaert(1999)的书.

3. 第三种数学建模步骤

Giordano 等人(2003)把数学建模的过程归结为六个步骤，它们是：

(1) 识别问题；

(2) 做出假设；

(3) 求解或解释模型；

(4) 验证模型；

(5) 实施模型；

(6) 维修模型.

以上六个步骤的具体内容，详见 Giordano 等人(2003)的书.

注 Frank R. Giordano 教授曾任美国西点军校数学系主任，多年来一直担任美国大学生数学建模竞赛的组织者，他是美国大学生数学建模竞赛组委会主任. 在他们的书(Giordano 等人(2003))中，还介绍了数学建模以及美国大学生数学建模竞赛的相关内容等，可作为参加美国大学生数学建模竞赛的参考书.

从以上介绍的三种不同的数学建模步骤看，并不是所有问题的建模都要经过以上这些步骤，有时各步骤之间的界限也不那么分明，建模时不要拘泥于形式上的按部就班. 本书在后面的数学建模案例中就采用了灵活的表述形式.

1.3 数学建模竞赛

20 世纪 80 年代初，为适应科技发展及高等教育教学改革的需要，数学建模开始进入我国部分大学的课堂教学. 1990 年，上海市率先举办了大学生数学建模竞赛，揭开了全国数学建模竞赛的序幕. 数十年来，在教育部和各级教育行政部门的支持下，众多高校踊跃参与. 参赛院校数和组队参赛数每年分别以 16%和 24%的速度增长，2011 年分别达到 1 251 所院校和 19 490 队. 目前，全国大学生数学建模竞赛已成为我国高校规模最大的基础性学科竞赛. 数学建模引入大学课堂是在先进的教育理念指导下的我国高等教育教学改革的一次成功的实践，它为高等学校培养什么人、怎样培养人，做出了重要的探索；为全面提高大学生的综合素质搭建了平台；创新了理论知识学习与实践相结合的人才培养新模式，为高等教育教学改革提供了一个成功的范例. 中国高等教育学会会长周远清教授曾用“成功的高等教育教学改革实践”给予高度评价.

在数学建模进入我国大学课堂 30 年、中国大学生数学建模竞赛成功举办 20 届之际，《中国高教研究》杂志在 2011 年第 12 期特开辟专栏，回顾、总结数学建模竞赛的成功经验，探索高等教育教学改革、提升高等教育质量的有效途径. 其中，姜启源、

谢金星的《一项成功的高等教育改革实践——数学建模教学与竞赛活动的探索与实践》，全面介绍了数学建模进入我国大学课堂 30 年、中国大学生数学建模竞赛成功举办 20 年以来，所取得的显著成绩. 并在论述数学建模在经济建设、科技进步、社会发展中的重要意义的基础上，着重分析了数学建模教学与竞赛活动在培养学生的创新精神、实践能力和综合素质，以及教育教学改革中所起的推动作用.

周远清、姜启源发表在 2006 年 1 月 11 日《光明日报》上的文章《数学建模竞赛实现了什么?》中指出：十几年来在我国开展的“全国大学生数学建模竞赛”的实践已经证实了“数学建模竞赛”至少实现了以下两点：(1)提高了学生的综合素质；(2)推动了高校教育改革.

我国高校自 1989 年首次参加美国大学生数学建模竞赛，积极性越来越高. 近几年在全国大学生数学建模竞赛日益普及的基础上，我国学生参加美国大学生数学建模竞赛的队数竟然占到该项竞赛总队数的 80%以上.

以下简要介绍“中国大学生数学建模竞赛”和“美国大学生数学建模竞赛”.

1.3.1 中国大学生数学建模竞赛

中文名称：中国大学生数学建模竞赛（通称：全国大学生数学建模竞赛，网站 http://www.mcm.edu.cn/).

英文名称：China Undergraduate Mathematical Contest in Modeling (CUMCM).

主办机构：教育部高等教育司、中国工业与应用数学学会(CSIAM).

竞赛宗旨：创新意识，团队精神，重在参与，公平竞争.

指导原则：扩大受益面，保证公平性，推动教学改革，提高竞赛质量，扩大国际交流，促进科学研究.

全国大学生数学建模竞赛是全国高校规模最大的课外科技活动之一. 该竞赛每年 9 月(一般在中旬某个周末的星期五至下周星期一共三天)举行，竞赛面向全国大专院校的学生，不分专业. 但竞赛分本科、专科两组，本科组竞赛所有大学生均可参加，专科组竞赛只有专科生(包括高职、高专生)可以参加.

全国大学生数学建模竞赛创办于 1992 年，每年一届，目前已成为全国高校规模最大的基础性学科竞赛，也是世界上规模最大的数学建模竞赛. 学生以三人组成一队的形式参赛，在所给定的题目中任选一题(1998 年及以前，全国大学生数学建模竞赛一直是 A，B 两个题目，从 1999 年开始，针对专科学生增加了 C，D 两个题目)，用三天 72 小时的时间，完成数学建模的全过程. 参赛者应根据题目要求，完成一篇包括模型的假设、模型建立和求解、计算方法的设计和计算机实现、结果的分析和检验、模型的改进等方面的论文(即答卷).

既然是竞赛，就要给参赛队分出等级. 根据“全国大学生数学建模竞赛章程”(见本书附录 B)，竞赛论文的评奖以“**假设的合理性、建模的创造性、结果的正确性和文字表述的清晰程度**”为主要标准. 各赛区(原则上一个省/直辖市/自治区为一个赛