单墫数学科普著作集
上海科普创作出版专项基金资助出版

单墫老师教你学数学

解析几何的技巧

单墫◎著

当读书不只是为了考试
你才会真正爱上数学
单墫老师娓娓道来
与你分享他所理解的数学之美

华东师范大学出版社
江苏教育出版社
JIANGSU EDUCATION PUBLISHING HOUSE

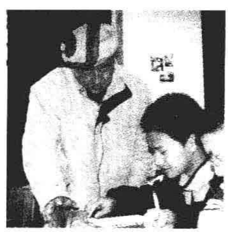
单墫数学科普著作集

上海科普创作出版专项基金资助出版

单墫老师教你学数学

解析几何的技巧

单墫◎著



华东师范大学出版社　江苏教育出版社

JIANGSU EDUCATION PUBLISHING HOUSE

图书在版编目(CIP)数据

解析几何的技巧/单墫著. —上海：华东师范大学出版社，2010
(单墫老师教你学数学)
ISBN 978-7-5617-8043-5

Ⅰ.①解… Ⅱ.①单… Ⅲ.①解析几何课-高中-教学参考资料 Ⅳ.①G634.653

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 169990 号

单墫老师教你学数学

解析几何的技巧

著　　者　单　墫
策划组稿　倪　明　孔令志
审读编辑　任念兵
装帧设计　卢晓红

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路 3663 号　邮编 200062
网　　址　www.ecnupress.com.cn
电　　话　021-60821666　行政传真 021-62572105
客服电话　021-62865537　门市(邮购)电话 021-62869887
地　　址　上海市中山北路 3663 号华东师范大学校内先锋路口
网　　店　http://ecnup.taobao.com/

印 刷 者　江苏南通印刷总厂有限公司
开　　本　890×1240　32 开
印　　张　7
字　　数　159 千字
版　　次　2011 年 3 月第一版
印　　次　2011 年 8 月第二次
书　　号　ISBN 978-7-5617-8043-5/G·4701
定　　价　16.00 元

出 版 人　朱杰人

总　序

科学昌明，既需要科学家筚路蓝缕、披荆斩棘，也需要普及工作者耕耘播种、热心培育．

普及工作很重要．如果将科学研究比作金字塔的塔尖，那么普及工作就是金字塔的底．底宽，塔才高．

科学研究不容易．从事研究，需要才能、努力与机遇．能够从事研究的人不多，好像阳春白雪，曲高和寡．他们的成果需要普及工作者通俗化、趣味化，才能广为人知，才能使更多的人关心、了解、理解，才能引起公众的兴趣，吸引更多的新人一同参加研究．Fermat 大定理就是一个典型的例子．虽然只有 Wiles 一个人给出了证明，看懂证明的不过十几个人或几十个人，但对大定理感兴趣的人成千上万．他们都是普及读物的读者．

普及工作使千万人受益，我就是其中之一．

在学生时代，我读过不少数学普及读物．如刘薰宇的《数学园地》，孙泽瀛的《数学方法趣引》，许莼舫的《几何定理和证题》，Casey 的《近世几何学初编》，日本数学家林鹤一的《初等几何作图不能问题》、上野清的《大代数讲义》，前苏联数学家写的数学丛书《摆线》、《双曲线函数》等，以及稍后中国数学家华罗庚等写的数学丛书《从杨辉三角谈起》等．还在《科学画报》上看到谈祥柏先生写的妙趣横生的文章《奇妙的联系》等．这些数学读物不仅使我学到许多数学知识、方法和思想，眼界大开，而且使我对数学产生了浓厚的兴趣，甚至立志要当一名数学家．

但当数学家的梦想却难以实现．因为那时政治运动频仍．读书，被认为“走白专道路”，会横遭批判．史无前例的文化大革命

更是书与读书人的一场浩劫.

“四人帮”倒台后,我才有幸到中国科学技术大学作研究生.在1983年成为首批18名国产博士之一.但这一年我已年届不惑,从事数学研究的黄金时期业已过去.我觉得与其花费时间凑一些垃圾论文,不如做普及工作对社会更有贡献.

对普及工作,我有浓厚的兴趣,也有一定的基础:

1. 由于做过一些研究工作,能够了解较新的材料,能够较为准确地把握数学及有关史料.

2. 由于当过多年教师,文字也还通顺,能够注意趣味性与深入浅出.

1977年恢复高考后,一度出现读书的热潮.这时常庚哲先生带头写了《抽屉原则及其他》,受到普遍的好评.稍后,上海教育出版社的王文才、赵斌两位编辑邀我写稿,我就写了《几何不等式》、《趣味的图论问题》,在1980年出版.以后又陆陆续续写了《覆盖》、《组合数学中的问题和方法》、《趣味数论》、《棋盘上的数学》、《解析几何中的技巧》、《算两次》、《集合及其子集》、《组合几何》、《对应》、《国际数学竞赛解题方法》(与葛军合作)、《不定方程》(与余红兵合作)、《巧解应用题》、《因式分解》、《平面几何中的小花》、《数学竞赛史话》、《解题思路训练》、《十个有趣的问题》、《概率与期望》、《小学数学趣题巧解》、《快乐的数学》、《数列与数学归纳法》、《解题研究》、《数学竞赛教程》等等.

由于文革后,大家渴望读书.而此前的书大多毁于“文革”劫火.因此新出的书颇受欢迎,其中也包括了我写的小册子.

冯克勤先生说:“不要小看了这些小册子,它们将数学的美带给大众.”(冯克勤《评审意见》)

杨世明、杨学枝先生说:“直到1980年,大家才盼来单墫的《几何不等式》一书……不仅普及了基础知识、基本思想方法,而

且激发了研究兴趣.今天初等不等式研究中的许多骨干,都曾从该书获益.单墫的《几何不等式》一书,无疑是这一阶段的标志性的著作."(杨世明,杨学枝《初等不等式在中国》,载《中学数学研究》2007年第1期).

还有一些数学教师见到我客气地说:"我们都是读您的书长大的."

这些评论当然是过奖的溢美之词,但也说明普及工作是一件有意义的、值得去做的事情.

近年来,急功近利的风气在学校蔓延.要根治这种歪风,还得提倡读书.要使广大青少年"热爱知识,渴求学问"(卡耐基《林肯传》,人民文学出版社,2005版第16页).

首先,得多出一些好书,供大家阅读.

读书是天下第一件好事,读好书是人生第一件乐事,好读书,读好书,进步就迅速.有些学生学数学,只做题,从不看书.这种做法是难以进步的.

感谢华东师范大学出版社出版我的科普著作集.这7种小册子修订后,重新出版,希望能有较多的读者,特别是青少年读者.希望它们能给爱好数学的朋友们带来乐趣.

前　言

“几何难!”

很多人有这样的感慨.

感谢笛卡尔发明了解析几何,为解决几何问题开辟了一条康庄大道.可是,仍然有不少人不乐意采用这一方法,原因之一是他们觉得解析几何“繁”.其实,真正掌握了技巧,许多问题用解析几何来解,不但不繁,而且解答井井有条,十分优雅.

这本小册子的目的就是撷取一些问题来表现解析几何的技巧.希望读者阅读此书时带着纸和笔,在看例题的解答之前,自己先演算一遍,这样才能真正掌握解题的技巧.如果您的解答更好,请告诉我们,以便今后改进.

单　墫

目　录

1

距离公式

点(x_1, y_1)与(x_2, y_2)之间的距离是

$$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}, \tag{1.1}$$

这是大家熟悉的距离公式,它可以用来解很多几何问题.

例 1 ……………………………………………………

设$\triangle ABC$的三边长为a、b、c,则BC边上的中线m_a的平方为

$$m_a^2=\frac{1}{2}b^2+\frac{1}{2}c^2-\frac{1}{4}a^2. \tag{1.2}$$

解 设BC中点为D,则D的坐标为

$$x_D=\frac{x_B+x_C}{2}, \qquad y_D=\frac{y_B+y_C}{2}. \tag{1.3}$$

(以后我们用x_P、y_P分别表示P点的横坐标与纵坐标,不一一声明.)于是由公式(1.1),

$$\begin{aligned}m_a^2&=(x_A-x_D)^2+(y_A-y_D)^2\\&=\left(x_A-\frac{x_B+x_C}{2}\right)^2+\left(y_A-\frac{y_B+y_C}{2}\right)^2\\&=\frac{1}{4}[(x_A-x_B)+(x_A-x_C)]^2+\frac{1}{4}[(y_A-y_B)+(y_A-y_C)]^2\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4}[(x_A - x_B)^2 + (x_A - x_C)^2 + 2(x_A - x_B)(x_A - x_C)]$$

$$+ \frac{1}{4}[(y_A - y_B)^2 + (y_A - y_C)^2 + 2(y_A - y_B)(y_A - y_C)].$$

注意到恒等式

$$\begin{aligned} &2(x_A - x_B)(x_A - x_C) \\ &= (x_A - x_B)^2 + (x_A - x_C)^2 - (x_B - x_C)^2 \quad (1.4) \\ &2(y_A - y_B)(y_A - y_C) \\ &= (y_A - y_B)^2 + (y_A - y_C)^2 - (y_B - y_C)^2, \quad (1.4') \end{aligned}$$

便可得出

$$\begin{aligned} m_a^2 &= \frac{1}{4}[2(x_A - x_B)^2 + 2(x_A - x_C)^2 - (x_B - x_C)^2] \\ &\quad + \frac{1}{4}[2(y_A - y_B)^2 + 2(y_A - y_C)^2 - (y_B - y_C)^2] \\ &= \frac{1}{2}[(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2] \\ &\quad + \frac{1}{2}[(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2] \\ &\quad - \frac{1}{4}[(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2], \end{aligned}$$

即(1.2)式成立.

上面的推导仅是极简单的计算,没有添辅助线,没有巧妙的推理,甚至没有明确用到余弦定理,只用了距离公式(1.1)与中点的坐标(1.3). 这正是解析几何的优点所在,请读者回忆中线公式(用纯几何方法)的证明,对比一下,体会更深.

注 1 上面出现的一些式子中,横坐标与纵坐标处在平等的地位. 由于这种对称性,在非正式的书写中,可以只写出含 x

的部分，而将含 y 的部分用"$+\cdots\cdots$"来代替（学过向量的读者将关于两个坐标的表达式改成一个用向量表示的式子，更为简单）.

注 2 上面的(1.4)与(1.4′)相加得出

$$(x_A - x_B)(x_A - x_C) + (y_A - y_B)(y_A - y_C) = \frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2). \tag{1.5}$$

它相当于余弦定理，即(1.5)式左边就是 $bc\cos A$. 这一点我们以后将会用到（熟悉向量的读者可以看出(1.5)式左边是向量 $\boldsymbol{AB}$、$\boldsymbol{AC}$ 的数量积）.

例 ❷ ……………………………………………………

求证：当 P 为$\triangle ABC$ 的重心时，P 到三个顶点距离的平方和最小.

证 设重心为 G，则

$$x_G = \frac{1}{3}(x_A + x_B + x_C), \qquad y_G = \frac{1}{3}(y_A + y_B + y_C). \tag{1.6}$$

因为

$$\begin{aligned}(x_P - x_A)^2 &= [(x_P - x_G) + (x_G - x_A)]^2 \\ &= (x_P - x_G)^2 + (x_G - x_A)^2 + 2(x_P - x_G)(x_G - x_A),\end{aligned}$$

关于 x_B、x_C 也有类似的等式，这样的三个等式相加得

$$\begin{aligned}\Sigma(x_P - x_A)^2 = 3\cdot(x_P - x_G)^2 &+ \Sigma(x_G - x_A)^2 \\ &+ 2(x_P - x_G)\Sigma(x_G - x_A),\end{aligned}$$

其中 Σ 表示将字母 A、B、C 轮换后所得的三个式子相加，例如

$\Sigma(x_P - x_A)^2 = (x_P - x_A)^2 + (x_P - x_B)^2 + (x_P - x_C)^2$. 由于(1.6),上式右端最后一个和为零. 所以

$$\Sigma(x_P - x_A)^2 = 3(x_P - x_G)^2 + \Sigma(x_G - x_A)^2.$$

关于纵坐标也有类似的等式. 于是

$$PA^2 + PB^2 + PC^2$$
$$= 3PG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 \geqslant GA^2 + GB^2 + GC^2,$$

即当且仅当点 P 与重心 G 重合时, $PA^2 + PB^2 + PC^2$ 取得最小值 $GA^2 + GB^2 + GC^2$.

注 1 如果读者不熟悉轮换的和号,可以将式子中所有的项逐一写出. 但轮换的和号是方便的,我们今后多次用到,希望不熟悉的读者渐渐熟悉它.

注 2 如果取 G 为原点,计算更简单,可参看第 8 节例 6.

例 3 ……………………………………………

证明:任意四边形四条边的平方和,等于两条对角线的平方和,再加上对角线中点连线的平方的 4 倍.

证 如果不用解析几何,需要添辅助线,还要一些细致的分析,并不很容易. 采用解析几何,只需要简单直接的计算,图都不必画.

设四个顶点的坐标为 $A_i(x_i, y_i)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$. 这时对角线中点为 $B\left(\dfrac{x_1 + x_3}{2}, \dfrac{y_1 + y_3}{2}\right)$、$C\left(\dfrac{x_2 + x_4}{2}, \dfrac{y_2 + y_4}{2}\right)$, 而

$$4\left(\frac{x_1 + x_3}{2} - \frac{x_2 + x_4}{2}\right)^2 + (x_1 - x_3)^2 + (x_2 - x_4)^2$$
$$= (x_1 + x_3 - x_2 - x_4)^2 + (x_1 - x_3)^2 + (x_2 - x_4)^2$$
$$= 2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_3x_4 - x_4x_1)$$
$$= (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_4)^2 + (x_4 - x_1)^2.$$

关于纵坐标也有类似的等式，所以

$$4BC^2 + A_1A_3^2 + A_2A_4^2 = A_1A_2^2 + A_2A_3^2 + A_3A_4^2 + A_4A_1^2.$$

用解析法(代数方法)解几何题是本书的重点之一. 本节举了三个例子，从这些例子可以看出在解某些几何题时，解析几何比纯几何或纯三角的方法优越. 当然要解得好，就必须掌握一些技巧. 从第 2 节到第 7 节，我们先介绍一些基本、简单的技巧.

2

平行四边形的顶点

已知平行四边形 $ABCD$ 的三个顶点的坐标分别为 $A(3, 2)$、$B(4, -3)$、$C(2, 5)$,求 D 的坐标.

这个问题的解法很多.如图 2.1,如果利用平行四边形的对边平行,可以先求出直线 AD 与 CD 的方程,再定出它们的交点 D 的坐标.如果利用平行四边形的对边相等,可以由 D 到 A 的距离为 BC 及 D 到 C 的距离为 AB 定出点 D 的坐标.当然还可以利用 AD 与 BC 平行并且相等来确定 D.但是最简单的方法是利用平行四边形的对角线互相平分,即 AC、BD 的交点 E 既是(线段)AC 中点,也是 BD 中点,所以有

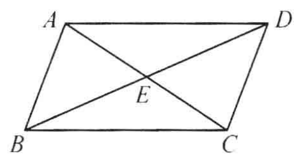


图 2.1

$$x_E = \frac{1}{2}(x_A + x_C) = \frac{1}{2}(x_B + x_D)$$

及

$$y_E = \frac{1}{2}(y_A + y_C) = \frac{1}{2}(y_B + y_D).$$

于是

$$\begin{cases} x_A + x_C = x_B + x_D, \\ y_A + y_C = y_B + y_D. \end{cases} \tag{2.1}$$

(2.1)式虽然简单,却很有用处(本书中将多次用到(2.1)).

对于开始问题,我们有

$$x_D = x_A + x_C - x_B = 3 + 2 - 4 = 1,$$
$$y_D = y_A + y_C - y_B = 2 + 5 - (-3) = 10.$$

同一个问题,往往可以从几种不同的途径入手,我们应当选用最简单的方法.

如果将平行四边形 $ABCD$"压扁",使 A、C 都落到 BD 上,那么便产生下面的结果:

设 B、A、C、D 为一直线上顺次四点,并且 BD 与 AC 的中点相同,则

$$x_A + x_C = x_B + x_D,$$
$$y_A + y_C = y_B + y_D.$$

这个结论,后面(如第 30 节例题 2)还要用到.

3

过已知点的平行线

例 1

直线 l 过点(3, 2)并且与已知直线 $5x-2y+4=0$ 平行，求 l 的方程.

教科书上这道题的解法是先求出直线

$$5x-2y+4=0 \tag{3.1}$$

的斜率为$\frac{5}{2}$.由于 l 与(3.1)平行,所以 l 的斜率也是$\frac{5}{2}$.所以 l 的点斜式方程为

$$y-2=\frac{5}{2}(x-3),$$

即

$$5x-2y-11=0.$$

在刚开始学习解析几何时,这样按部就班地解,当然是必要的.但在完成解析几何的初级阶段后,就应当采用下面的解法:

首先注意直线

$$a_1x+b_1y+c_1=0$$

与直线