高等数学教程

上册

П. С. 孟傑諾夫
Г. Л. 湼瓦日斯基 著

高等教育出版社

高 等 数 学 教 程

上 册

П. С. 孟傑諾夫
Г. Л. 涅瓦日斯基 著
蔡 昌 齡 譯

高 等 教 育 出 版 社

本書系根据苏联科技出版社 (Огиз государственное издательство технико-теоретической литературы) 出版的孟傑諾夫 (П. С. Моденов) 与湼瓦日斯基(Г. Л. Невяжский)合著的"高等数学教程" (Курс высшей математики) 1948 年版譯出。原書經苏联高等教育部审定为师范学院教科書。

本書中譯本分上下两册出版。此为上册，由东北师范大学蔡昌龄譯出。

本書原由商务印書館出版，自 1959 年 4 月起改由本社出版。

高 等 数 学 教 程

上 册

П. С. 孟傑諾夫等著

蔡昌龄譯

高等教育出版社出版 北京宣武門内承恩寺 7 号

(北京市书刊出版业营业許可証出字第 054 号)

上海市印刷四厂印刷 新华书店发行

統一书号 13010·628 开本 850×1168 1/32 印张 6 4/16

字数 167,000 印数 1,501—3,000 定价(4)¥ 0.75

1954 年 2 月商務初版(共印 15,000)

1959 年 4 月新 1 版 1959 年 9 月上海第 2 次印刷

序　言

本書可供師範專科學校的物理數學系及師範學院的數學系以外各系教學之用。

稍微超出教學大綱範圍的補充材料是用小字排印的。省略去所有這些材料，對於理解基本課文也是沒有妨礙的。

函數在一點的連續性的概念及函數在一點的極限的概念都是從極一般的觀點來敍述的。根據這種觀點是不能把所有與這有關的定理都統一起來（像通常所作的那樣）。如果只觀察那樣一些點，即在它們的近傍內函數是被定義了的，則可以省略 § 97 並且把它看作是 § 106 的推論。凸性（§ 91）及極值（§ 93）的概念也可以移到講這些概念的充分條件的那幾個有關的節內來講。

最後，在教學當中，也可以把 § 94 及 § 95 省略去而把它們的內容移到微分法裏面來講。

但是應該考慮到：不藉助於微分法而能用有限的方法來研究函數及給出與函數有關的一系列概念（增減、凸性、極值等等），是很有益的。

在一切情況下，都可以如意地變更敍述材料的順序。補充材料，在指出一系列“高等數學”的問題與初等數學的聯繫的方面，是有益處的。

最後，我們要向在整理原稿的工作中給與我們很大幫助的校對人恩・伊・諾渥舍羅夫教授、及給我們提出很多寶貴指示和意見的夫・夫・涅梅茲克母教授、阿・伊・馬爾庫謝維奇教授、並在最後的一次審查原稿中給與幫助的伊・耶・他那他爾各位致以甚深的謝意。

莫斯科　1947年6月　　波・西・孟傑諾夫

哥・里・涅夫耶日斯基

上册目錄

第一章　直線上的解析幾何

§1　直線上點的座標

在直線上，取不同的且有固定順序的兩點 O 和 E。

這樣的幾何圖形，即在其上取定不同而有順序的兩點 O 和 E 的直線，叫作笛卡爾座標軸。

以上所說的兩點之中，第一個點，即 O 點，叫作座標原點；第二個點，即 E 點，叫作單位點(圖 1)。

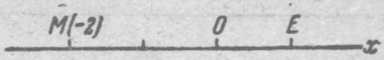

圖 1

點 O 和 E 又稱為座標軸的基本點。

以基本點為界的線段 OE 叫作單位線段。

我們將座標軸表示為 Ox。任意點 M 在座標軸上的位置將由一數 x 來確定，而數

$$x=\pm\frac{OM}{OE},$$

就叫 M 點在座標軸上的座標，並且當線段 OM 和 OE 同方向時，在等式右邊取＋號，當這兩個線段反方向時取－號。

在圖 1 中，M 點的座標等於-2，因為比 $\frac{OM}{OE}$ 等於 2，且線段 OM 和 OE 方向相反。

座標原點的座標等於零。

單位點的座標等於 1。

顯然座標軸上的一切點，以原點作分界點，和單位點處在同一方面的，座標都是正的，而處於原點另一方面的，座標都是負的。

因此,被稱作 M 點座標的數 x, 對應於座標軸上每一個點。

反之,如 x 爲任意實數,則在座標軸上可以找出一點 M, 它的座標是數 x。

在圖 2 中作出點 M, N, P, 它們所對應的座標等於 $3, 5$, 與 $-\frac{5}{2}$。

座標等於 x 的點 M 可表示爲:

$$M(x)。$$

總括以上,我們看到:

(1)直線(座標軸)上每一個點,對應於被稱爲這點座標的一個確定的數 x;

(2)兩個不同的點 M_1 和 M_2, 對應於兩個不同的座標 x_1 和 x_2(這是由點座標的定義得來的);

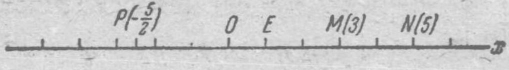

圖 2

(3)每一個數 x, 在座標軸上對應於一點 M, 而數 x 是它的座標。

具有上述各性質的對應(現象)稱爲一一對應。

所以引用直線上點座標的概念,就可以使直線上所有點的集合,和所有實數的集合形成一一對應。

練習

1. 在直線上取點 O 和 E, 使它們的距離爲 2 厘米,描出以下各點:

$$A(4),\ B(-1),\ C(6),\ D(-\frac{1}{2}),\ K(\frac{5}{3}),\ F(-\sqrt{2}),\ G(\sqrt{29})。$$

§2 有向距離

在初等幾何學中,時常用正數來表示線段的長。

等於線段 AB 和單位線段 OE 的比 $\frac{AB}{OE}$ 的正數,叫作線段 AB 的長,或它的量。在許多數學以及物理問題中,無論用正數或是用負數來

度量線段都是很方便的；這種度量法產生在同一直線上有幾個線段的情況下。研究以下的例子：幾個人沿着一條直路按相反的方向行走。這時他們所走的路程，用正數以及負數來度量是比較方便的，而且數的符號可以表明行動的方向。例如"所經過的路程依次爲 2 千米，−3 千米，−5 千米等"就表明第一個人向某一個方向走了 2 千米，而第二人和第三人向相反的方向走了 3 千米和 5 千米。

點 M 在座標軸上的座標顯然就是由座標原點到 M 點的有向距離。所以在解析幾何的第一個步驟，實質上就遇到了有向距離的概念。

圖 3

在座標軸上，研究任意線段 AB（圖 3）。

我們稱數 $\gamma=\pm\frac{AB}{OE}$ 爲它的有向長，並且當線段 AB 與 OE 同方向時取＋號，當這兩個線段反方向時取－號。例如在圖 3 中，線段 AB 的有向長等於 −2，因爲線段 AB 所指的方向，和 OE 所指的方向相反，又線段 AB 與 OE 的比等於 2。在同一圖上，線段 BA 的有向長等於 2，因爲線段 BA 和 OE 同方向，而它和 OE 的比仍然爲 2。

圖 4

定理　端點座標依次爲 x_1 與 x_2 的線段 AB 的有向長 γ，等於兩座標的差 x_2-x_1，其中被減數是線段終點的座

標,而減數是始點的座標:

$$\gamma=x_2-x_1。\tag{1}$$

證明 爲了得出公式(1),應研究 A 點和 B 點對於座標原點的一切可能位置;這些位置一共有十種(圖4)。現在對其中任意兩種情形求出公式(1);至於所餘的情形,希望讀者自己研究。

例如研究第二種情形。在這裏 A 點和 B 點的座標爲正,而 γ 爲負因此

$$x_1=\frac{OA}{OE},\quad x_2=\frac{OB}{OE},$$

$$\gamma=-\frac{AB}{OE}=-\frac{OA-OB}{OE}=-\left(\frac{OA}{OE}-\frac{OB}{OE}\right)=$$

$$=\frac{OB}{OE}-\frac{OA}{OE}=x_2-x_1。$$

在第六種情形中有:

$$x_1=-\frac{OA}{OE},\quad x_2=\frac{OB}{OE},$$

$$\gamma=\frac{AB}{OE}=\frac{OA+OB}{OE}=\frac{OA}{OE}+\frac{OB}{OE}=-x_1+x_2=x_2-x_1。$$

注意 當 A 點和 B 點重合時,公式(1)也成立;那時 $\gamma=0$。

練 習

2. 在座標軸上取點 O 與 E 的距離爲一厘米,作以下各對點:

(1) $A(4)$, $B(7)$; (2) $A(3)$, $B(-2)$;

(3) $A(-2)$, $B(-7)$; (4) $A(-1)$, $B(5)$;

由以上每種情形計算線段 AB 的有向長 γ,並由圖形檢查計算的結果。

3. 證明由座標原點到點 M 的有向距離等於 M 點的座標。

4. 溫度計指出溫度 $t_1=-10°$;經過了某一個時間後,它又指出 $t_2=-25°$;求自第一次所指的到第二次所指的有向距離,並說明計算結果的意義。

§3 距離

由前節所述可得線段 AB 的長 d 爲此線段有向長 γ 的絕對值:

$d=|\gamma|$或

$$d=|x_2-x_1|。\qquad (1)$$

所以具有端點 $A(x_1)$和 $B(x_2)$的線段 AB 的長，等於這些點座標的差的絕對值，同時無論哪一個座標為減數，哪一個座標為被減數都是一樣，因為我們所取的是這個差的絕對值。

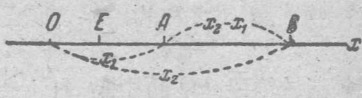

圖 5

注意 1　對於相重合的點，公式 $d=|x_2-x_2|$ 也成立，假如我們規定相重合的兩點之間的距離等於零。

注意 2　按照圖 5 不難記憶公式 $\gamma=x_2-x_1$ 和 $d=|x_2-x_1|$。

練　習

5. 在以下各情形中，計算線段 AB 的長

(1) $A(8)$, $B(-2)$;　(2) $A(-5)$, $B(-10)$;　(3) $A(0)$, $B(-4)$。

§4　開間隔與閉間隔

今後我們時常遇到兩個不同的數 α 與 β 之間所有數的集合。例如取代數式

$$(x-2)(x-5)$$

並提出一個問題：對於哪些 x 的值，這個式子的值是負的？容易看到，使以上乘積為負的一切 x 值，構成數 2 與 5 之間一切數的集合：

$$2<x<5。$$

兩個不同的數 α 與 β 之間一切數 x 的集合：

$$\alpha<x<\beta$$

叫作開間隔並表示為　(α, β);

永遠將較小的數 α 寫在前面；數 α 與 β 叫作開間隔的界。在開間隔 (α, β) 內，嚴格地包括着大於 α 且小於 β 的一切數，開間隔的界其實不在這個範圍之內。

在座標軸上作出點 $P(\alpha)$ 與 $Q(\beta)$(圖 6)。和開間隔(α, β)中一切座標值 x 相對應的點集合 $M(x)$，是由座標軸上位於 P, Q 二點之間的一切點所構成的(圖 6 中線段 PQ 端點的箭頭是用來強調 P, Q 兩點不在所研究的開間隔之內的)。

數 α 與 β 之和的一半，即 $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ 叫作開間隔(α, β)的中心；這個數對應於線段 PQ 的中點 $A\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$，因為由 A 點到 P, Q 兩點的距離相等：

$$\left|\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha\right|=\frac{1}{2}\left|\alpha-\beta\right|,\text{及}\left|\frac{\alpha+\beta}{2}-\beta\right|=\frac{1}{2}\left|\alpha-\beta\right|。$$

數 $\delta=\dfrac{\beta-\alpha}{2}$，即線段 PQ 之長的一半；或由開間隔中心到它任一界的距離，叫作開間隔的半徑(圖 6)。

圖　6

由中心與半徑的概念，可用以下不等式來說明開間隔：

$$|x-a|<\delta。$$

這個不等式表明點 $M(x)$ 與開間隔中心 $A(a)$ 的距離，小於開間隔的半徑 δ，所以與滿足不等式 $|x-a|<\delta$ 的一切 x 值相對應的點集合 $M(x)$，是座標軸上在 P, Q 兩點之間的一切點的集合。

當已知 a 與 δ 時，由關係式

$$a=\frac{\alpha+\beta}{2},\quad \delta=\frac{\beta-\alpha}{2},$$

可以求 α 與 β：　　$\alpha=a-\delta,\quad \beta=a+\delta。$

於是對於任意的 a 與 $\delta>0$，可以表示開間隔為：

$$(a-\delta,\ a+\delta)$$

或　　$$a-\delta<x<a+\delta,$$

不過在幾何方面還是十分明顯的。

例 1. 對於開間隔(3, 7)或 $3<x<7$，中心 $a=\dfrac{3+7}{2}=5$，半徑 $\delta=\dfrac{7-3}{2}=2$，也就是說開

間隔可以表示爲：

$|x-5|<2$（圖7）。

圖　7

例 2、　開間隔 $|x+4|<6$ 或 $|x-(-4)|<6$ 可以表示爲：$(-4-6, -4+6)$ 或是 $(-10, 2)$ 或 $-10<x<2$（圖 8）。

圖　8

現在轉到以下的重要概念。

在兩數 α 與 β 之間的一切數 x 的集合，包括 α 與 β 本身在內：$\alpha\leqslant x\leqslant\beta$，叫作閉間隔。

閉間隔表示爲：$[\alpha, \beta]$；永遠將較小的數 α 放在第一位置。顯然閉間隔也可以表示爲：$|x-a|\leqslant\delta$；其中

$$a=\frac{\alpha+\beta}{2},\quad \delta=\frac{\beta-\alpha}{2}。$$

在幾何方面，閉間隔 $[\alpha, \beta]$ 對應於座標軸上以 $P(\alpha)$，$Q(\beta)$ 兩點爲界的線段上的一切點的集合（圖 9）。

圖　9

在 α 與 β 二數之間的一切數的集合，包括其中的一數在內，稱爲半開間隔或半閉間隔，並表示爲：$[\alpha, \beta)$（如果半開間隔內含有數 α），或爲：$(\alpha, \beta]$（如半開間隔內含有數 β）。

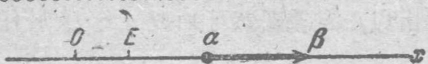

圖　10

在圖 10 與 11 中作出了半開間隔 $[\alpha, \beta)$ 與 $(\alpha, \beta]$。

圖　11

大於數 α 的一切數的集合 $(x>\alpha)$（圖 12），也稱爲開間隔，並表示爲：$(\alpha, +\infty)$ 或 $\alpha<x<+\infty$。

圖　12

小於數 α 的一切數的集合 $(x<\alpha)$，也叫作開間隔，並表示爲：$(-\infty, \alpha)$ 或 $-\infty<x<\alpha$（圖 13）。

圖　13

一切實數的集合，

也稱爲開間隔，並表示爲：$(-\infty, +\infty)$ 或爲 $-\infty < x < +\infty$。

最後，大於或等於數 a 的一切數的集合，以及小於或等於數 a 的一切數的集合，稱爲半開間隔或半閉間隔；而表示爲：$[a, +\infty)$ 及 $(-\infty, a]$，或 $a \leqslant x < +\infty$ 及 $-\infty < x \leqslant a$，或 $x \geqslant a$，$x \leqslant a$（圖 14 與 15）。

圖 14

開間隔 $(a-\delta, a+\delta)$ 或 $|x-a| < \delta$ 也叫作數 a 的 δ 鄰域。滿足條件 $a \leqslant x < a+\delta$ 的一切數 x 的集合，叫作 a 點的右鄰域。能使不等式 $a-\delta < x \leqslant a$ 成立的一切數 x 的集合，叫作 a 點的左鄰域（圖 16 與 17）。

圖 15

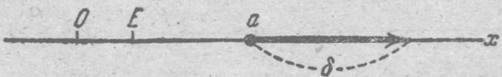

圖 16

圖 17

注意 我們稱 $-\infty$ 與 $+\infty$ 爲非原有數（$-\infty$ 爲"負無限"非原有數；$+\infty$ 爲"正無限"非原有數）。由以上定義顯然可知數 $+\infty$ 大於任何實數，而數 $-\infty$ 小於任何實數。

對於非原有數，也可進行某些算術運算。但這兩個數不具有初等數學中所談到的那許多實數的性質[1]。所以對它們進行運算時應十分注意；並且這種運算本身當然也應該預先定義出來；本書中不談到這些問題[2]。

練 習

6. 用一切方法表示以下的數集合：

[1] 參考 Новосёлов С. И. 代數，師範專科學校教本，1947。

[2] 參考"學校數學"雜誌，1947 年第 4 期中 А. И. Маркушевича 教授論文"函數概念"。

(1) $|x-1|<3$，　(2) $2>x>0$，　(3) $|x|<1$，　(4) $-3\leqslant x<7$，
(5) $|5-x|\leqslant 2$，　(6) $1<x\leqslant 10$，　(7) $-1<x<10$，　(8) $5\leqslant x\leqslant 9$，
(9) $x\geqslant 6$，　(10) $x<3$，　(11) $x>-4$，　(12) $x\leqslant 0$，
(13) $-3<x<3$，　(14) $(-\infty, 3)$，　(15) $2, +\infty)$。　作圖。

§5 單比

在直線上，有兩兩不同的三個點 A, B 與 C。數 $\pm\dfrac{AB}{BC}$ 叫作 A, B, C 的單比並以 (ABC) 來表示它：

$$(ABC)=\pm\frac{AB}{BC},$$

並且當線段 AB 與 BC 同方向時，分數前面取正號；不同方向時取負號。

例如在圖 18 中單比 (ABC) 等於 $-\dfrac{1}{2}$（為什麼？），單比 (CBA) 等於 -2（為什麼？）。

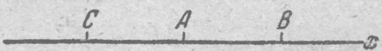

圖 18

我們時常用一個文字 λ 來表示單比 (ABC)。

練　習

7. 點 A 與 B 的距離等於 3 厘米，點 B 與 C 的距離等於 7 厘米；點 B 位在點 A 與 C 之間。求以下各單比：

$$(ABC),\ (ACB),\ (BAC),\ (BCA),\ (CAB)\text{ 與 }(CBA)。$$

8. 如果點 B 為線段 AC 的中點，單比 (ABC) 等於什麼？

§6 座標中的單比

定理　三個兩兩不同的點 $A(x_1)$, $B(x_2)$ 與 $C(x_3)$ 的單比 λ 或 (ABC) 等於一個分數，它的分子是第二點座標和第一點座標的差，分母是第三點座標和第二點座標的差：

$$\lambda=(ABC)=\frac{x_2-x_1}{x_3-x_2}。\tag{1}$$

證明 首先證明:

$$\lambda=(ABC)=\frac{\gamma_{12}}{\gamma_{23}},$$

其中 γ_{12} 是由 A 點到 B 點的有向距離,而 γ_{23} 是由 B 點到 C 點的有向距離。事實上根據 § 2 有向距離 γ_{12} 的絕對值等於比 $\frac{AB}{OE}$:

$$|\gamma_{12}|=\frac{AB}{OE}$$

同理

$$|\gamma_{23}|=\frac{BC}{OE},$$

因此

$$\left|\frac{\gamma_{12}}{\gamma_{23}}\right|=\frac{AB}{OE}:\frac{BC}{OE}=\frac{AB}{BC}$$

或

$$\left|\frac{\gamma_{12}}{\gamma_{23}}\right|=\frac{AB}{BC}。$$

但根據單比定義 $\frac{AB}{BC}=|\lambda|$,於是 $|\lambda|=\left|\frac{\gamma_{12}}{\gamma_{23}}\right|$。如線段 AB 與 BC 同方向,則 λ 為正數;但此時 γ_{12} 與 γ_{23} 的符號相同,所以數 $\frac{\gamma_{12}}{\gamma_{23}}$ 也是正的;可見在這種情況下,由等式 $|\lambda|=\left|\frac{\gamma_{12}}{\gamma_{23}}\right|$ 可以得出 $\lambda=\frac{\gamma_{12}}{\gamma_{23}}$。又如線段 AB 與 BC 的方向相反,則 λ 為負數;但此時 γ_{12} 與 γ_{23} 為不同符號的數,所以數 $\frac{\gamma_{12}}{\gamma_{23}}$ 也是負的;因此由等式 $|\lambda|=\left|\frac{\gamma_{12}}{\gamma_{23}}\right|$,仍然可以得出 $\lambda=$ $=\frac{\gamma_{12}}{\gamma_{23}}$。也就是在一切情況下常有

$$\lambda=\frac{\gamma_{12}}{\gamma_{23}};$$

但根據確定有向距離的公式(§ 2),$\gamma_{12}=x_2-x_1$,$\gamma_{23}=x_3-x_2$,於是

$$\lambda=\frac{x_2-x_1}{x_3-x_2}。$$

推論 位在笛卡爾座標軸上的點 M 的座標 x,等於單比(MOE)加以負號,即

$$x=-(MOE)。\tag{2}$$

事實上，僅根據所證過的公式，乃有：

$$-(MOE)=-\frac{0-x}{1-0}=x。$$

練　習

9. 如已知 $A(2)$，$B(-3)$ 與 $C(5)$，求(ABC)，(ACB)，(BAC)，(BCA)，(CAB)，(CBA)，並用圖形檢查計算的結果。

§7 分線段為已知比

在直線上有三個兩兩不同的點 M_1，M 與 M_2。如單比(M_1MM_2)等於 λ，則稱說點 M 分線段 M_1M_2 成比 λ。

例如在圖 19 中，點 M 分線段 M_1M_2 成比 2，點 P 分線段 M_1M_2 成比 -2，點 Q 分線段 M_1M_2 成比 $-\frac{1}{4}$ 等，因為單比(M_1MM_2)，(M_1PM_2)，(M_1QM_2) 依次等於 $2, -2, -\frac{1}{4}$。當分點在線段之外時（例如圖 19 中的 P，Q 兩點），則稱它"外分線段 M_1M_2。"

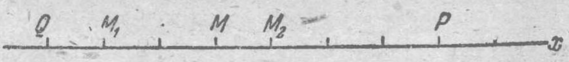

圖 19

現在我們提出以下的問題：已知點 M_1 與 M_2 的座標及點 M 分線段 M_1M_2 所成的比 λ，求 M 點的座標。這個問題是具有純實用意義的：例如在 M_1 與 M_2 兩點分別安於兩個質量 m_1 與 m_2，而 M 是由這兩個質點所構成的體系的重心。這時，我們知道點 M 分線段 M_1M_2 所成的比，是這兩個質量的反比，即 $\frac{m_2}{m_1}$，如此就恰好和以上問題聯系起來：已知點 M_1 與 M_2 的座標及重心分線段 M_1M_2 所成的比 $\frac{m_2}{m_1}$，如何確定重心。