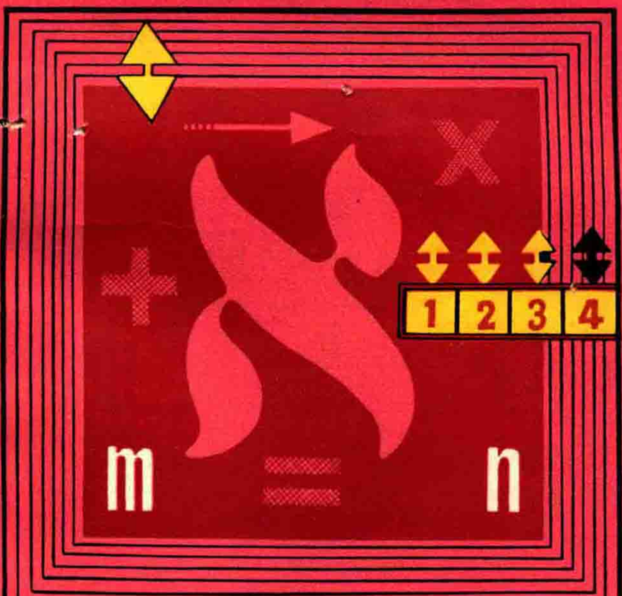
《自修数学》小丛书

无限数

〔英〕C. D. H. 库珀 著



科 学 出 版 社

《自修数学》小丛书

无　　限　　数

〔英〕C. D. H. 库珀 著

刘远图 译

科 学 出 版 社

1 9 8 2

内 容 简 介

本书是《自修数学》小丛书中的一本．它从日常计数中用到的有限数开始，说明有限数的全体是无限的，并对无限能不能比较大小(或多少)，能不能进行运算(加、乘)，经过这些运算以后会不会得出更大的数等等问题，作了通俗而又生动的讲解，从而对于集合论中“势”和映射的概念作了通俗的介绍．

本书深入浅出、生动有趣，可供具有中等文化程度的广大读者阅读．

C. D. H. Cooper
INFINITE NUMBERS
John Murray, London, 1974

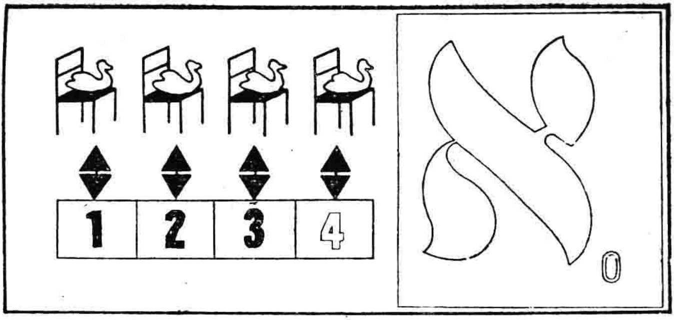
无 限 数
〔英〕C. D. H. 库珀 著
刘远图 译
责任编辑 陈永锵、毕 颖
科学出版社出版
北京朝阳门内大街137号
中国科学院印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
*
1982年9月第一版 开本：787×1092 1/32
1982年9月第一次印刷 印张：2 7/8
印数：0001—14,000 字数：54,000
统一书号：13031·1988
本社书号：2705·13—1
定价： 0.33 元

出 版 说 明

英国出版的《自修数学》小丛书（Exploring Mathematics on Your Own）是给具有初中文化程度的读者编写的一套近代数学通俗读物. 该丛书自 1964 年出版后，于 1974 年、1976 年多次再版印刷. 为开阔读者眼界、增长数学知识，我们将选其中的一部分翻译出版，其目次如下：

大家学数学
测量世界
数型
毕达哥拉斯定理
统计世界
集合、命题与运算
数学逻辑与推理
曲线
拓扑学——橡皮膜上的几何学
概率与机率
向量基本概念
有限数学系统
无限数
矩阵

目　　录



一、怎样计数

1. 我们是怎样开始认数的

我们在数学里最早遇到的概念之一，是计数的概念．我们看到画着几个同样东西的图片时，逐渐就学会了把这一组东西同某一个数联系起来．举例来说吧，我们也许曾经看见过一张画，上面有五只鸭子，边上写着数字“5”．我们可能天真地想到，“5”指的是鸭子，要不然就和这些实际的物体有点关系．但是，我们以后又看到五把椅子、五支铅笔等等，都和数字“5”和“五”这个数词联系在一起，这样我们就开始得到关于“五”的概念．以后我们又学会了不管多少的一组物体，都能抽象出它的数的性质，对于看到的各种东西也开始能数出它们有几个．

后来我们又学习处理这些数字，学习加、减、乘、除四则运

算. 我们先学会用数来解算术题,以后学会用字母表示数来解答代数题. 在这个过程中，我们还学会了不同种类的数——分数、小数等等.

在本书中，我们将完全从幼儿园的水平出发讨论计数的过程,但是这里的观点却更为深刻和严谨. 例如,当我们计数时，我们没有停下来认真地考虑我们学的内容到底是怎么一回事? 我们以前确实就是这样学习过来的. 多数人永远也不会回过头再去考虑计数的本质是什么. 下面我们立刻要介绍无限数的计数方法，因此对于有限数的计数方法有一个正确的理解,就显得很重要了.

2. 相 同 的 数

有的人可能认为,计数是数学里最基本的概念. 实际上计数是一个复杂的概念，它是建立在更为基本的概念之上的.

让我们来看一看图 1 上的那些圆点吧! 只许看五秒钟，在这样短的时间里你能够数出图上有多少个圆点吗? 下面先不要读啦,先做做这个试验吧!

要数这么多点子，五秒钟当然不够. 但是你一定注意到了,那张图里有一些是黑点,有一些是圆圈. 充其量只要看五秒钟，甚至于不屑再看一眼，你就能回答下面的问题，即第二个问题：那张图里圆圈多于黑点，还是黑点多于圆圈，还是两种一样多呢?

瞬然一瞥，当然来不及数出那么多点的个数，但是却足以看出黑点和圆圈是一样多. 我们能作出这一判断，并不要求实际数出每种点子的个数. 这就清楚地说明，“相同的数”的概念一定是比计数更为基本的概念.

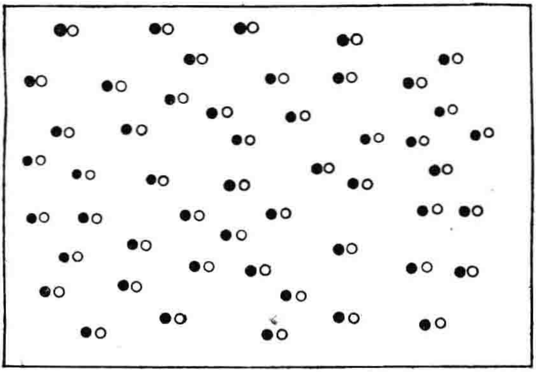


图 1

我们之所以能一眼看出黑点和圆圈恰好一样多，是因为图里黑点和圆圈是一对一地出现的. 每一个黑点旁边有一个圆圈，反过来，每一个圆圈旁边也有一个黑点. 把两组东西都配成对这个概念，以后我们将当作“有相同基数”的定义.

在叙述上述定义以前，我们要介绍一些专业方面的语言. 基数是数学的一个分支即“集合论”中出现的一个名词. 这里并不要求读者必须具备集合论方面的知识. 但是，如果读者已经学过集合论方面的知识(例如本丛书中的《集合、命题和运算》)，再花一些时间来使用这些专业名词也是值得的.

集合论中，一些东西的整体叫做一个集合，集合中每一件

东西叫做元素. "集合"[1]这个名词，从数学上看，并不意味着它的元素是由具有某一属性而自然聚集到一起的. 在日常语言中，一些茶杯和小茶碟，除非配成套，否则我们决不会把它们叫做一个"集合"("一套"). 然而在集合论里，我们却可以把一些茶杯和小茶碟叫做一个"集合". 而且集合的元素也不要求是同一类型的对象. 一个集合的元素可以多种多样，例如它可以包含一支粉笔、斯里兰卡、古罗马独裁者儒略·凯撒、一个等腰三角形、一首巴哈的歌曲等等.

请注意，到现在为止我们还没有定义什么是基数，只是对"有相同基数"这一术语作了定义.

两个集合，如果其中一个集合的元素同另一个集合的元素可以一对一地完全配对(没有多余的元素)，就说这两个集合有相同的基数.

3. 数和重量

基数可以用来计算集合所含元素的多少，而重量是物体轻重的度量. 以后我们总是把基数同重量进行比较. 最原始的称重量的器械，也就是现在实验室还在使用的、不过已经改成现代形式的杠杆式天平. 左盘和右盘各放一个物体，那么根据哪一个盘比较低，就可以说出哪一个物体比较重. 如果横臂成水平，两个物体重量相同.

杠杆式天平不是直接秤出物体的重量. 它只能比较两个

1) 集合 (Set) 这个词在英语里有"一套"、"一组"的意思. ——译者

物体的重量．我们说的“用天平称重”，是指把不知道的重量同已知的重量作比较的操作过程．称重量需要有两个条件：

（1）比较重量的方法；

（2）有一些标准的重量．

对于计量集合里元素的多少，也需要有类似的两个条件：

（1）比较两个集合大小的方法；

（2）有一些标准的集合．

我们已经有一种比较两个集合大小的方法，即配对原则．剩下的是要找出一些标准的集合．

4. 标准集合

最经常用于比较集合大小的有下面这些集合：

$\{1\}$

$\{1,2\}$

$\{1,2,3\}$

$\{1,2,3,4\}$

…………

图 2 中画了几个正方形．数数看有几个！对了，是七个．

图 2

无疑你在一刹那间就数出来了，可能用了一些复杂的步骤，例如在心里把正方形分成四个一组，三个一组，然后再相

加. 但是我们也可以猜想，你数的办法是慢慢地一个一个数出来的，就象一个小孩数东西那样.

你指着第一个正方形，口里唸“一”，指着后面一个唸“二”，直至数到最后一个正方形. 当你指着最后一个时，你口里唸“七”. 这里你做的事情是把那些正方形同标准集合{1，2，3，4，5，6，7}的元素配对. 它们正好配完，因此我们就说，正方形的个数和标准集合{1，2，3，4，5，6，7}的元素个数相同. 通常我们并不把这个过程说得这么复杂，而只是简单地说：“有七个正方形.”

假设有集合{13，2，56，810，19，33}和{澳洲，非洲，北美，南美，欧洲，亚洲}，它们是不是也“有相同的基数”呢？显然，回答是：“是”. 然而当你仔细考察一下给出答案的过程，你就会发现步骤还是很复杂的呢！把两个集合中的一个直接同另一个集合进行比较，你未必会这样作. 最可能的办法是，先数每一个集合有几个元素，得出每个集合都是六个元素. 这个过程相当于把两个集合分别同另一个集{1，2，3，4，5，6}作比较. 当我们数每一个集合有几个元素时，就是把这个集合同{1，2，3，4，5，6}一对一地配对. 因此，根据术语“有相同的基数”的定义，上面两个集合都和{1，2，3，4，5，6}有相同的基数. 在作出这两个集合有相同的基数的结论的过程中，我们不知不觉地用到了下面的传递原则

如果集合 A 和集合 B 可以一对一地配对，集合 B 和集合 C 可以一对一地配对，那么集合 A 和 C 也可以一对一地配对.

现在，我们可以对有限集作出“基数”这个词的定义. 我

们先写出下列数字表:

$$1, 2, 3, 4, 5, \cdots\cdots$$

如果集合 S 和 $\{1, 2, 3, \cdots n\}$“有相同的基数”,我们就定义集合 S 的基数是上列数字表中的 n. 例如,{星期日,星期一,星期二,星期三,星期四,星期五,星期六}和 $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ 完全配对,所以它的基数是 7. 根据传递原则,我们知道,基数为 7 的任意两个集合,它们“有相同的基数”. 这看起来好象是不言而喻的,但是应当记住,术语“有相同的基数”是作为单独的概念定义的,那时候还没有定义基数本身.

如果两个集合的基数相同,那么这两个集合都可以和同一个标准集合一对一地配对,根据传递原则,它们就可以直接进行一对一地配对,这就是说,这两个集合有相同的基数. 这样一来,“基数相同”和“有相同的基数”的意义完全一样,因此以后我们可以随便使用哪一个术语.

5. 我们看到的第一个无限数

到现在为止,我们只讨论了有限的基数. 现在我们将定义一个无限的基数 $\aleph_0$(读作:“阿列夫零”). 为了定义 $\aleph_0$,我们需要规定相应的一个标准集合. 然后根据一个集合能不能同这个标准集合完全配对,我们就能确定它的基数是不是 $\aleph_0$.

以后我们把有限基数的全体组成的集合

$$\{1, 2, 3, 4, \cdots\}$$

取作标准的$\aleph_0$集合.

现在我们就用它来度量几个无限集. 由于每一个由实际物体组成的集合(甚至整个宇宙中原子的集合)都是有限集[1], 所以我们讨论无限集时, 必须考虑抽象的事物组成的集合. 例如我们可以把所有偶数取作一个集合:

$$\{2, 4, 6, 8, \cdots\}$$

同标准的 $\aleph_0$ 集合比较起来, 偶数集合里有多少偶数呢? 我们可能会想, 偶数集比标准 $\aleph_0$ 集的元素少了一半, 当然偶数集比标准 $\aleph_0$ 集要小. 但是实际并非如此! 集合$\{2, 4, 6, 8, \cdots\}$并不比集合$\{1, 2, 3, 4, \cdots\}$小. 它们的基数相同, 这是因为我们可以把每一个自然数同一个偶数配对, 也可以把每一个偶数同一个自然数配对. 例如, 下面就是一种配对的方法:

标准集		偶数集
1	$\longleftrightarrow$	2
2	$\longleftrightarrow$	4
3	$\longleftrightarrow$	6
4	$\longleftrightarrow$	8
………		

用这种方法可以把两个集合的元素都配成对, 因此它们有相同的基数, 即 $\aleph_0$.

这是无限基数具有的令人惊奇的性质之一. 从一个无限

1) 这句话是不对的. 宇宙是无限的, 它里面存在的物质以及组成这些物质的原子也应当是无限的. ——译者

集可以去掉几个元素而不会改变它的基数．如果你对这一点感到不以为然的话(如果从任何一个集合拿走几件东西，当然就少了几件嘛！)，我们要提醒你注意：这是由于到现在为止，你数过的都是有限集合．

当我们深入进行讨论时，我们将会遇到更加令人惊奇的事情，因此我们必须忘记我们熟悉的只对有限数才成立的某些数的概念．在这奇异事件的大海中，只有“有相同的基数”的定义(任何两个集合，当且仅当它们能够一对一地完全配对时，才有相同的基数)，才是我们能够依靠的稳固的巨锚．

假设我们取完全平方数组成一个集合：

$$\{1, 4, 9, 16, 25, \cdots\}$$

这时我们可能会天真地想到，这个集合里的元素要比集合$\{1, 2, 3, 4, 5, \cdots\}$的元素少许多许多，因为后一集合的大部分元素去掉之后才得到前一个集合．但是事实却并非如此，因为我们可以把这两个集合的元素一对一地完全配对，根据定义，它们应当有相同的基数．

下列各集合的基数都是 $\aleph_0$．

$$\{1, 2, 3, 4, 5, \cdots\}$$

$$\{2, 3, 4, 5, 6, \cdots\}$$

$$\{2, 4, 6, 8, 10, \cdots\}$$

$$\{1, 4, 9, 16, 25, \cdots\}$$

$$\{1, 2, 4, 8, 16, \cdots\}$$

$$\{1, 10, 100, 1000, 10000, \cdots\}$$

一般地有，任何可以将元素排列起来(即写成一个无限序列)

的集合，它的基数是 $\aleph_0$. 这是由于我们可以把这样的集合的元素同标准 $\aleph_0$ 集合{1, 2, 3, 4, 5, …}一对一地完全配对，例如取第一个元素同 1 配对，第二个同 2 配对，第三个同 3 配对，等等.

6. 超过 $\aleph_0$ 的基数

到现在为止，我们讨论过的基数以及相应的标准集，可以列出如下：

$$\text{有限基数}\begin{cases} 1 & \{1\} \\ 2 & \{1,\ 2\} \\ 3 & \{1,\ 2,\ 3\} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \end{cases}$$

$$\aleph_0 \quad \{1,\ 2,\ 3,\ \cdots\}$$

现在，我们为进一步研究作好了必要的准备. 下面我们将致力于寻找除 $\aleph_0$ 以外的无限数. 从上面的讨论可以看出，这个问题可以归结为要找出一个不可列的集合.

习 题 1

1. 指出下列集合的基数：
   a. 所有三位数的集合.
   b. 所有末位数字是 9 的数的集合.
   c. {1, 1/2, 1/3, 1/4, …}.
   d. {a, b, c, d, e, …}.
2. 设想你面前有无限长的一列鸽舍，共有 $\aleph_0$ 那么多个，每一鸽舍都

住了一只鸽子. 另外飞来一只鸽子,你想给它找一个鸽舍,但是所有的鸽舍里都有鸽子。这时你该怎么办呢?

3. 下面的语句,哪些是真语句,哪些是伪语句?

a. 任何可以排列的集合的基数都是 $\aleph_0$.

b. 如果两个集合不能一对一地完全配对,它们的基数一定不相同.

c. 如果一个集合的元素同另一个集合的元素,除了后一个集合的一个元素以外,都能一对一地配对,那么这两个集合的基数不同.

d. 每一个无限集的基数都是 $\aleph_0$.