随机过程
学习指导及习题解析

王　勇　程广涛　宋占杰　主编

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

SUIJI GUOCHENG XUEXI ZHIDAO JI XITI JIEXI

随机过程学习指导及习题解析

王　勇　程广涛　宋占杰　主编

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

内 容 提 要

本书是天津大学传统研究生教材《随机过程基础(修订版)》配套使用的学习指导书,全书分5章编写,包括该教材全部习题解析,同时还为方便教学添加了少量补充习题及其解答过程.本书可作为研究生随机数学基础课辅助读物,也可作为工程技术人员的参考用书.

图书在版编目(CIP)数据

随机过程学习指导及习题解析/王勇,程广涛,宋占杰主编.—天津:天津大学出版社,2013.2
ISBN 978-7-5618-4623-0

Ⅰ.随… Ⅱ.①王… ②程… ③宋… Ⅲ.随机过程-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.①O211.6

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第030247号

出版发行 天津大学出版社
出 版 人 杨欢
地　　址 天津市卫津路92号天津大学内(邮编:300072)
电　　话 发行部:022-27403647
网　　址 publish.tju.edu.cn
印　　刷 天津泰宇印务有限公司
经　　销 全国各地新华书店
开　　本 169mm×239mm
印　　张 7.75
字　　数 156千
版　　次 2013年3月第1版
印　　次 2013年3月第1次
定　　价 15.00元

前　　言

为了深化研究生随机数学课程教学内容和课程体系的改革，在天津大学研究生院"研究生创新人才培养"项目的资助下，结合天津大学《随机过程基础》近十余年的教学体会，我们对传统教材进行了修订. 本书是与之相配套的学习指导及习题解析，同时本书亦可作为一本随机过程入门读物独立使用，以帮助读者解除随机数学"做题难"的困扰. 因为随机数学和确定性数学思维方式不同，导致多数学生感到课堂内容听懂了，但课后习题常常感到无从下手. 同时鉴于国内随机过程习题解析相对较少，不能满足读者需求，有必要出版这本参考书.

本书第 1、2、3 章内容提要和典型例题或习题解答由王勇编写，第 4、5 章内容提要和习题解答由程广涛编写，最后由宋占杰对书中内容进行了总结修正，并负责统稿.

本书的修订得到了天津大学研究生院、理学院和数学系领导及相关工作人员的热忱帮助，雷阳博士参加了部分校对工作，在此一并致以衷心的感谢.

鉴于作者水平有限，疏漏和不当之处再次恳请同行与读者指正.

联系邮箱：zhanjiesong@ tju. edu. cn

编者

2012 年 10 月于天津大学

目　　录

第 1 章　概率论的基本知识

1.1　内容提要

1. 事件域

设 Ω 是样本空间，$\mathscr{F}$是由 Ω 的一些子集构成的集类(族)，如果它满足：

①$\Omega\in\mathscr{F}$;

②若 $A\in\mathscr{F}$,则 $\bar{A}\in\mathscr{F}$;

③若 $A_i\in\mathscr{F},i=1,2,\cdots$,有$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i\in\mathscr{F}$.

则称 $\mathscr{F}$为事件域，$\mathscr{F}$中的元素 A 称为事件.

不难得到：

①$\varnothing\in\mathscr{F}$;

②若 $A_i\in\mathscr{F},i=1,2,\cdots$,则$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i\in\mathscr{F},\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i\in\mathscr{F},\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i\in\mathscr{F}$;

③若 $A,B\in\mathscr{F}$,则 $A-B\in\mathscr{F}$.

2. 概率

设 Ω 是样本空间，$\mathscr{F}$是 Ω 的一个事件域，定义在 $\mathscr{F}$上的实值集函数 $P(A)$ 如果满足：

①$\forall A\in\mathscr{F}$,有 $P(A)\geqslant0$;

②$P(\Omega)=1$;

③若 $A_i\in\mathscr{F},i=1,2,\cdots$,且 $A_iA_j=\varnothing(i\neq j)$,有

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i).$$

则称 $P(\cdot)$为 $\mathscr{F}$上的概率，$P(A)$为事件 A 的概率，并且称三元总体$(\Omega,\mathscr{F},P)$为概率空间.

除定义中所规定的性质外，概率还具备以下性质：

(1) $P(\varnothing)=0$;

(2) 若 $A_i\in\mathscr{F}, i=1,2,\cdots,n$, 且 $A_iA_j=\varnothing(i\neq j)$, 则

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i);$$

(3) 对任意事件 A, 有

$$P(A)=1-P(\bar{A});$$

(4) 设 A,B 是任意两个事件, 且 $A\subset B$, 则

$$P(B-A)=P(B)-P(A),\quad P(A)\leqslant P(B);$$

(5) 对任意事件 $A_i\in\mathscr{F}, i=1,2,\cdots,n$, 有

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)\leqslant\sum_{i=1}^{n}P(A_i),$$

且

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)$$
$$-\cdots+(-1)^{n-1}P(A_iA_j\cdots A_n).$$

3. 条件概率

设 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 为概率空间, 事件 $B\in\mathscr{F}$, 且 $P(B)>0$, 对任意的事件 $A\in\mathscr{F}$, 记

$$P(A|B)=\frac{P(A)}{P(AB)},$$

则称 $P(A|B)$ 为在事件 B 发生的条件下, 事件 A 发生的条件概率.

条件概率满足概率的三公理定义, 因此是概率, 并且具有概率所具备的所有性质. 比如条件概率的容斥原理: 对任意两个事件 A 和 B, 若 $P(C)>0$, 则

$$P\{(A\cup B)|C\}=P\{A|C\}+P\{B|C\}-P\{(A\cap B)|C\}.$$

与条件概率相关的三个公式如下.

1) 乘法公式

①两个事件: $P(AB)=P(B)P(A|B)\quad(P(B)>0)$.

②$n(n\geqslant 2)$ 个事件:

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})$$
$$(P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0).$$

2) 全概率公式

设 $A\in\mathscr{F}, B_i\in\mathscr{F}, i=1,2,\cdots,n, B_iB_j=\varnothing(i\neq j)$, 且 $\bigcup_{i=1}^{n}B_i=\Omega, P(B_i)>0$, 则

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i).$$

3）贝叶斯公式

设 $A\in\mathscr{F}, B_i\in\mathscr{F}, i=1,2,\cdots,n, B_iB_j=\varnothing(i\neq j)$，且 $\bigcup_{i=1}^{n}B_i=\Omega, P(B_i)>0, P(A)>0$，则

$$P(B_i|A)=\frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i)}.$$

4. 事件的独立性

1）两个事件的独立

设 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 为概率空间，$A,B\in\mathscr{F}$，若

$$P(AB)=P(A)P(B),$$

则称事件 A,B 相互独立.

2）多个事件的独立

一般地，设 $A_i\in\mathscr{F}, i=1,2,\cdots,n$，若对任意的 $m(2\leqslant m\leqslant n)$ 及任意的 $1\leqslant k_1<k_2<\cdots<k_m\leqslant n$，都有

$$P(A_{k_1}A_{k_2}\cdots A_{k_m})=P(A_{k_1})P(A_{k_2})\cdots P(A_{k_m}),$$

则称事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是相互独立的.

5. 随机变量

1）随机变量定义

设 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 为概率空间，$X=X(\omega)$ 是定义在 Ω 上的实值函数. 若对任意实数 x，都有 $\{\omega:X(\omega)\leqslant x\}\in\mathscr{F}$，则称 X 是该空间上的一个随机变量.

设 $X_1(\omega),X_2(\omega),\cdots,X_n(\omega)$ 是定义在该概率空间上的 n 个随机变量，则称

$$\boldsymbol{X}(\omega)=(X_1(\omega),X_2(\omega),\cdots,X_n(\omega))$$

为 n 维随机向量或 n 维随机变量，简记为 $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$.

2）分布函数

若 X 是一个随机变量，则称

$$F(x)=P\{X(\omega)\leqslant x\},\ -\infty<x<+\infty$$

为 X 的分布函数，并称 n 元函数

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=P\{X_1\leqslant x_1,X_2\leqslant x_2,\ \cdots,X_n\leqslant x_n\},\ -\infty<x_1,x_2,\cdots,x_n<+\infty$$

为 n 维随机变量$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的联合分布函数.

3)随机变量的分类

若随机变量 $X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的所有可能取值只有有限个或可列个,则称 X 为 n 维离散型随机变量,并称

$$p_{i_1,i_2,\cdots,i_n}=P\{X_1=x_{1i_1},X_2=x_{2i_2},\cdots,X_n=x_{ni_n}\},\quad i_1,i_2,\cdots,i_n=1,2,\cdots$$

为离散型随机变量 $X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的(联合)分布列.

若随机变量 $X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的分布函数为 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,且存在非负实值函数$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,使得对任意的实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$,总有

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2}\cdots\int_{-\infty}^{x_n}f(t_1,t_2,\cdots,t_n)\,\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\cdots\mathrm{d}t_n,$$

则称 $X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$为 n 维连续型随机变量,并称函数$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$为 $X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的(联合)概率密度函数.

特别地,$n=1$ 时,以上定义也成立.

4)随机变量的独立性

设$(\Omega,\mathscr{F},P)$为概率空间,$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是 Ω 上的 $n(n\geqslant2)$个随机变量,若对于任意的实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$,都有

$$P\{X_1\leqslant x_1,X_2\leqslant x_2,\cdots,X_n\leqslant x_n\}=P\{X_1\leqslant x_1\}P\{X_2\leqslant x_2\}\cdots P\{X_n\leqslant x_n\},$$

则称随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是相互独立的.

若$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是 n 维离散型随机变量,则 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 独立的充要条件是对任意的 $i_1,i_2,\cdots,i_n=1,2,\cdots$,有

$$P\{X_1=x_{1i_1},X_2=x_{2i_2},\cdots,X_n=x_{ni_n}\}=P\{X_1=x_{1i_1}\}P\{X_2=x_{2i_2}\}\cdots P\{X_n=x_{ni_n}\}.$$

若$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$是 n 维连续型随机变量,$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是其联合概率密度函数,则 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 独立的充要条件是

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2)\cdots f_{X_n}(x_n)$$

几乎处处成立.

可以证明,若随机变量 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立,$g_i(x)\ (i=1,2,\cdots,n)$为 Borel 可测函数,则 $g_1(X_1),g_2(X_2),\cdots,g_n(X_n)$也相互独立.

6. 随机变量的数字特征

1) 数学期望

设 $F(x)$ 是随机变量 X 的分布函数，若 $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| \mathrm{d}F(x) < \infty$，则称

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x \mathrm{d}F(x)$$

为 X 的数学期望或均值.

若 X 是离散型随机变量，其概率分布列为

$$p_i = P\{X = x_i\}, i = 1, 2, \cdots, \text{且} \sum_i |x_i| p_i < \infty,$$

则 X 的数学期望是

$$EX = \sum_i x_i p_i .$$

若 X 是连续型随机变量，其概率密度函数为 $f(x)$，且 $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| \mathrm{d}F(x) < \infty$，则 X 的数学期望是

$$EX = \int_{-\infty}^{+\infty} x \mathrm{d}F(x).$$

对二维随机变量 (X, Y)，设其联合分布函数为 $F(x, y)$，则函数 $g(X, Y)$ 的数学期望通过下式计算：

$$E_g(X, Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) \mathrm{d}F(x, y)$$

$$= \begin{cases} \sum_i \sum_j g(x_i, x_j) p_{ij}, & \text{若}(X, Y)\text{离散}, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) f(x, y) \mathrm{d}x \mathrm{d}y, & \text{若}(X, Y)\text{连续}, \end{cases}$$

其中 p_{ij} 和 $f(x, y)$ 分别是相应的联合分布列和联合分布函数.

2) 方差

设 X 是随机变量，若 EX 存在，且 $E(X - EX)^2 < \infty$，则称

$$DX = E(X - EX)^2 \tag{1.1.1}$$

为随机变量 X 的方差，称 $\sqrt{DX}$ 为 X 的标准差.

常用计算公式：$DX = EX^2 - (EX)^2$.

3) 协方差与相关系数

设 X, Y 是随机变量，$EX^2 < \infty$，$EY^2 < \infty$，则称

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E[(X-EX)(Y-EY)]$$

为 X 与 Y 的协方差,并且称

$$\rho_{XY}=\frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}\quad(DX>0,DY>0)$$

为 X 与 Y 的相关系数.

若 $\rho_{XY}=0$,则称 X 与 Y 不相关.

常用计算公式:$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-EX\,EY$.

4)性质

随机变量的数字特征分别具有以下性质:

①$E(C)=C,D(C)=0$,其中 C 为常数;

②$E(aX+bY)=aEX+bEY$,其中 a,b 为常数;

③若 X 与 Y 独立,则 $E(XY)=EX\,EY$;

④若 X 与 Y 独立,则 $D(aX\pm bY)=a^2DX+b^2DY$;

⑤$D(X\pm Y)=DX+DY\pm 2\mathrm{Cov}(X,Y)$;

⑥对任意的实数 x,有 $DX=E(X-EX)^2\leqslant E(X-x)^2$;

⑦Schwarz 不等式,若 $EX^2<\infty,EY^2<\infty$,则$[E(XY)]^2<E(X^2)E(Y^2)$;

⑧$\mathrm{Cov}(aX_1+bX_2,cY_1+dY_2)=ac\mathrm{Cov}(X_1,Y_1)+ad\mathrm{Cov}(X_1,Y_2)$
$+bc\mathrm{Cov}(X_2,Y_1)+bd\mathrm{Cov}(X_2,Y_2)$;

⑨$|\rho_{XY}|\leqslant 1$;

⑩$|\rho_{XY}|=1$ 的充要条件是 X 与 Y 以概率 1 线性相关,即存在常数 a,b,且 $a\neq 0$,使 $P\{Y=aX+b\}=1$;

⑪若 X 与 Y 独立,则 $\rho_{XY}=0$.

7. 条件数学期望

1)边缘分布和条件分布

若(X,Y)是二维离散型随机变量,联合分布列为

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij},\quad i,j=1,2,\cdots,$$

则称

$$P\{X=x_i\}=\sum_{j=1}^{\infty}P\{X=x_i,Y=y_j\}=\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}=p_{i\cdot},\quad i=1,2,\cdots$$

为(X,Y)关于 X 的边缘分布列;

若(X,Y)是二维连续型随机变量,联合概率密度函数为$f(x,y)$,则称

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$$

为(X,Y)关于X的边缘概率密度函数.

相应有关于Y的边缘分布列和边缘概率密度函数,并称

$$P\{X=x_i\mid Y=y_j\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}}=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}},\quad i=1,2,\cdots$$

为在$Y=y_j(P\{Y=y_j\}>0)$条件下,随机变量X的条件分布列,并称

$$f(x\mid y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}\quad (f_Y(y)>0)$$

为在条件$Y=y$下X的条件概率密度函数.

相应有关于Y的条件分布列和条件概率密度函数.

2)条件分布函数

设(X,Y)是二维随机变量,且对任意$\varepsilon>0$,$P\{y-\varepsilon<Y\leqslant y+\varepsilon\}>0$,如果

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}P\{X\leqslant x\mid y-\varepsilon<Y\leqslant y+\varepsilon\}$$

存在,则称其为在$Y=y$条件下随机变量X的条件分布函数,记为

$$F_{X|Y}(x\mid y)=P\{X\leqslant x\mid Y=y\}=\lim_{\varepsilon\to0^+}P\{X\leqslant x\mid y-\varepsilon<Y\leqslant y+\varepsilon\}.$$

3)条件数学期望

设(X,Y)是二维随机变量,在$Y=y$条件下X的条件分布函数为$F_{X|Y}(x\mid y)$,且$\int_{-\infty}^{+\infty}|x|\mathrm{d}F_{X|Y}(x\mid y)<\infty$,则称

$$E(X\mid Y=y)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\mathrm{d}F_{X|Y}(x\mid y)$$

为在$Y=y$条件下X的条件数学期望.

当(X,Y)分别是离散型和连续型随机变量时,有

$$E(X\mid Y=y)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\mathrm{d}F_{X|Y}(x\mid y)$$

$$=\begin{cases}\sum\limits_x xP\{X=x\mid Y=y\}, & \text{若}(X,Y)\text{是离散型的},\\ \int_{-\infty}^{+\infty}xf_{X|Y}(x\mid y)\mathrm{d}x, & \text{若}(X,Y)\text{是连续型的}.\end{cases}$$

4)条件数学期望的性质

①当X与Y相互独立时,$E(X\mid Y)=EX$;

②$E(E(X\mid Y))=EX$　(全数学期望公式);

③$E[g(Y)\cdot X\mid Y]=g(Y)E(X\mid Y)$;

④$E[g(Y)\cdot X]=E[g(Y)E(X|Y)]$；

⑤$E(C|Y)=C$， C 为常数；

⑥$E[g(Y)|Y]=g(Y)$；

⑦$E[(aX+bY)|Z]=aE(X|Z)+bE(Y|Z)$， a,b 为常数；

⑧$E[X-E(X|Y)]^2\leqslant E[X-g(Y)]^2$.

8. 常用变换

1）母函数

设 X 是取非负整数值的随机变量，分布列为 $p_k=P\{X=k\}$，$k=0,1,2,\cdots$，则称

$$G(s)=E(s^X)=\sum_{k=0}^{\infty}p_k s^k$$

为 X 的母函数.

母函数满足如下性质.

①取非负整数值的随机变量的分布列由其母函数唯一确定.

②设 $G(s)$ 是随机变量 X 的母函数，若 EX 存在，则 $EX=G'(1)$；若 DX 存在，则

$$DX=G''(1)+G'(1)-[G'(1)]^2.$$

③独立随机变量和的母函数等于各随机变量母函数的乘积.

④若 $X_1,X_2,\cdots$ 是独立同分布的整值随机变量，其母函数为 $P(s)$，N 是与 $\{X_n\}$ 独立的取正整数值的随机变量，其母函数为 $G(s)$，则 $Y=\sum_{i=1}^{n}X_i$ 的母函数为

$$HG(s)=G(P(s)).$$

2）矩母函数

设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$，称

$$\psi(t)=E(e^{tX})=\begin{cases}\sum_x e^{tx}P\{X=x\}, & \text{若 } X \text{ 是离散型的},\\ \int_{-\infty}^{+\infty}e^{tx}f(x)\,dx, & \text{若 } X \text{ 是连续型的}\end{cases}$$

为 X 的矩母函数.

矩母函数如果存在，则与概率分布一一对应.

矩母函数的性质：

①相互独立随机变量和的矩母函数等于各自矩母函数的乘积；

②设 X 的矩母函数为 $\psi(t)$，则 $\psi^{(n)}(0)=E(X^n)$，$n=1,2,\cdots$.

3）特征函数

设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$，称

$$\phi(t)=E(\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX})=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\mathrm{d}F(x)=\begin{cases}\sum\limits_{x}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}P\{X=x\}, & \text{若 } X \text{ 是离散型的},\\ \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}f(x)\mathrm{d}x, & \text{若 } X \text{ 是连续型的}\end{cases}$$

为 X 的特征函数.

特征函数一定是存在的.

特征函数具有如下性质.

①$\phi(t)$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续，且 $|\phi(t)|\leqslant\phi(0)=1,\phi(-t)=\overline{\phi(t)}$.

②$\phi(t)$ 非负定，即对任意正整数 n，任意 $t_i\in\mathbb{R}$ 及复数 $\lambda_i,i=1,2,\cdots,n$，有

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\phi(t_k-t_j)\lambda_k\overline{\lambda_j}\geqslant 0.$$

③若 $X=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$，且 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 相互独立，则

$$\phi_X(t)=\prod_{i=1}^{n}\phi_{X_i}(t).$$

④若 X 的 n 阶矩存在，则 $\phi_X(t)$ 可微分 $k(k\leqslant n)$ 次，且

$$\phi_X^{(k)}(0)=\mathrm{i}^kE(X^k).$$

⑤若 X 的特征函数为 $\phi_X(t)$，$Y=aX+b$（a,b 为常数），则 Y 的特征函数为

$$\phi_Y(t)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}tb}\phi_X(at).$$

⑥逆转公式：设 X 的分布函数为 $F(x)$，特征函数为 $\phi(t)$，则对任意实数 x_1，x_2，有

$$\frac{F(x_2+0)+F(x_2-0)}{2}-\frac{F(x_1+0)+F(x_1-0)}{2}=\frac{1}{2\pi}\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx_1}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx_2}}{\mathrm{i}t}\phi(t)\mathrm{d}t.$$

特别地，如果 x_1 和 x_2 是 $F(x)$ 的连续点，则有

$$F(x_2)-F(x_1)=\frac{1}{2\pi}\lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx_1}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx_2}}{\mathrm{i}t}\phi(t)\mathrm{d}t.$$

⑦唯一性定理：随机变量 X 的分布函数 $F(x)$ 由它的特征函数 $\phi(t)$ 所唯一确定.

⑧若随机变量 X 的特征函数 $\phi(t)$ 在 $\mathbb{R}$ 上绝对可积，即 $\int_{-\infty}^{+\infty}|\phi(t)|\mathrm{d}t<\infty$，则 $F'(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上存在且有界、连续，对 $x\in\mathbb{R}$，有

$$F'(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}\phi(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

⑨Bochner-Khintchine 定理：函数 $\phi(t)$ 是特征函数的充要条件是 $\phi(t)$ 连续、非负定且 $\phi(0)=1$.

4）Fourier 变换

称式

$$\mathscr{F}[f(t)]=F(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\omega}\mathrm{d}t \tag{1.1.2}$$

为函数 $f(t)$ 的 Fourier 变换，其反变换为

$$f(t)=\mathscr{F}^{-1}[F(\omega)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\omega}\mathrm{d}\omega, \tag{1.1.3}$$

其中 $f(t)$ 满足 Fourier 积分条件：

①$f(t)$ 在任意有限区间 $[a,b]$ 上满足 Dirichlet 条件，即 $f(t)$ 在 $[a,b]$ 上连续或只有有限个第一类间断点，且至多只有有限个极值点；

②$f(t)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上绝对可积.

Fourier 变换的性质：

①线性性质

$$\mathscr{F}[\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)]=\alpha F_1(\omega)+\beta F_2(\omega);$$

②位移性质

$$\mathscr{F}[f(t\pm t_0)]=\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\omega t_0}\mathscr{F}[f(t)];$$

③微分性质

$$\mathscr{F}[f'(t)]=\mathrm{i}\omega\mathscr{F}[f(t)],$$

其中 $f(t)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续或只有有限个可去间断点，且 $\lim\limits_{|t|\to\infty}f(t)=0$；

④积分性质

$$\mathscr{F}\left[\int_{-\infty}^{t}f(v)\,\mathrm{d}v\right]=\frac{1}{\mathrm{i}\omega}\mathscr{F}[f(t)],$$

其中

$$\lim_{t\to+\infty}\int_{-\infty}^{t}f(v)\,\mathrm{d}v=0;$$

⑤能量积分（也称为 Parseval 等式）

$$\int_{-\infty}^{+\infty}[f(t)]^2\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}|F(\omega)|^2\mathrm{d}\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}S(\omega)\,\mathrm{d}\omega.$$

⑥卷积定理：

若函数$f_i(t)(i=1,2,\cdots,n)$满足 Fourier 积分条件,则

$$\mathscr{F}[f_1(t)*f_2(t)]=F_1(\omega)\cdot F_2(\omega),$$

$$\mathscr{F}^{-1}[F_1(\omega)\cdot F_2(\omega)]=f_1(t)*f_2(t),$$

$$\mathscr{F}[\prod_{i=1}^{n}f_i(t)]=\frac{1}{(2\pi)^{n-1}}F_1(\omega)*F_2(\omega)*\cdots*F_n(\omega).$$

5)Laplace 变换

设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$,则称

$$\tilde{F}(s)=\int_0^{+\infty}e^{-st}dF(t)$$

为 Laplace 变换,其中 $s=a+bi(a>0)$为复数;称

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[F(s)]=\frac{1}{2\pi i}\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty}F(s)e^{st}ds,t>0$$

为 Laplace 逆变换.

这里的$f(t)$仅要求满足 Laplace 积分条件:

①$f(t)$在任意有限区间$[a,b](a>0)$上分段连续;

②$t\to+\infty$时,存在常数$M>0,c\geqslant0$,使得$|f(t)|\leqslant Me^{ct}$.

Laplace 变换的性质:

①线性性质

$$\mathscr{L}[\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)]=\alpha\mathscr{L}[f_1(t)]+\beta\mathscr{L}[f_2(t)];$$

$$\mathscr{L}^{-1}[\alpha F_1(s)+\beta F_2(s)]=\alpha\mathscr{L}^{-1}[F_1(s)]+\beta\mathscr{L}^{-1}[F_2(s)];$$

②位移性质

$$\mathscr{L}[e^{at}f(t)]=F(s-a);$$

③微分性质

$$\mathscr{L}[f'(t)]=sF(s)-f(0);$$

④积分性质

$$\mathscr{L}[\int_{-\infty}^{t}f(v)dv]=\frac{1}{s}F(s);$$

⑤延迟性质

当$t<0$时$f(t)=0$,则对任意$\tau\geqslant0$,有

$$\mathscr{F}[f(t-\tau)]=e^{-s\tau}F(s),\quad\mathscr{L}^{-1}[e^{-s\tau}F(s)]=f(t-\tau).$$

9. n 维正态分布

设 n 维随机变量 $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}|\boldsymbol{B}^{-1}|^{\frac{1}{2}}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})\right\},$$

其中，$\boldsymbol{B}=[b_{ij}]$ 是 $\boldsymbol{X}$ 的协方差矩阵，$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}}=E\boldsymbol{X}$ 是一实值列向量，$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$. 则称随机变量 $\boldsymbol{X}$ 服从 n 维正态分布，记为 $\boldsymbol{X}\sim N(\boldsymbol{a},\boldsymbol{B})$.

n 维正态分布的性质如下.

①若 $\boldsymbol{X}\sim N(\boldsymbol{a},\boldsymbol{B})$，则 $\boldsymbol{X}$ 的特征函数为

$$\phi(\boldsymbol{t})=\exp\left\{\mathrm{i}\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{t}-\frac{1}{2}\boldsymbol{t}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{t}\right\}.$$

②若 $\boldsymbol{X}\sim N(\boldsymbol{a},\boldsymbol{B})$，则

$$EX_k=a_k,\mathrm{Cov}(X_k,X_l)=b_{kl},k,l=1,2,\cdots,n.$$

③n 维正态随机变量的各分量相互独立，当且仅当它们两两不相关.

④若 $\boldsymbol{X}\sim N(\boldsymbol{a},\boldsymbol{B})$，$\boldsymbol{C}$ 是 $m\times n$ 矩阵，则

$$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{X}\sim N(\boldsymbol{C}\boldsymbol{a},\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}).$$

⑤$\boldsymbol{X}\sim N(\boldsymbol{a},\boldsymbol{B})$ 的充分必要条件是 $\boldsymbol{X}$ 各分量的任一线性组合 $Y=\sum\limits_{j=1}^{n}l_jX_j$ 服从一维正态分布 $N(\sum\limits_{j=1}^{n}l_ja_j,\sum\limits_{j,k=1}^{n}l_jl_kb_{jk})$.

1.2 典型例题

1. 设某段时间内到达某商场的顾客人数 N 服从参数为 λ 的 Poisson 分布. 每位顾客在该商场的消费额 X 服从 $[a,b]$ 上的均匀分布. 各位顾客是否消费相互独立且与 N 独立. 求顾客在该商场总的消费额的数学期望.

解 设第 i 个顾客的消费额为 $X_i,i=1,2,\cdots,N$，则在该商场总的消费额为 $Y=\sum\limits_{i=1}^{N}X_i$，由全数学期望公式得

$$\begin{aligned}E(Y)&=E\{E(Y|N)\}=E\Big\{E\Big(\sum_{i=1}^{N}X_i|N\Big)\Big\}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}P\{N=n\}E\Big(\sum_{i=1}^{n}X_i\Big)\end{aligned}$$