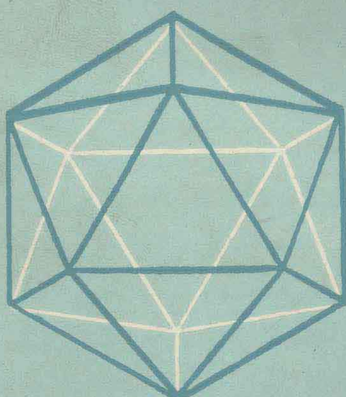
六年制重点中学高中数学课本

# 立体几何



人民教育出版社

# 说　明

一、本书是根据教育部颁发的《全日制六年制重点中学教学计划试行草案》编写的，供六年制重点中学高中一年级使用，每周授课两课时。

二、本书内容包括：直线和平面、多面体和旋转体以及多面角和正多面体等三章，全书的公式列表作为附录。第二章中的拟柱体及第三章多面角和正多面体是选学内容。

三、本书习题共分四类：练习、习题、复习参考题以及总复习参考题。

1. 练习　主要供课堂练习用；

2. 习题　主要供课内、外作业用；

3. 复习参考题与总复习参考题　这两类都分为 $A$、$B$ 两组。复习参考题 $A$ 组供复习本章知识时使用；总复习参考题 $A$ 组，供复习全书知识时使用；两类题中的 $B$ 组题综合性与灵活性较大，仅供学有余力的学生参考使用。

习题及复习参考题、总复习参考题中的 $A$ 组题的题量较多，约为学生通常所需题量的1.5倍，教学时可根据情况选用。

四、本书是在中小学通用教材数学编写组编写的全日制十年制学校高中课本(试用本)《数学》第二册第五章“空间图形”的基础上编写的。初稿编出后，曾向各省、市、自治区的教研部门、部分师范院校征求了意见，并向部分中学教师征求了意见，有的省还进行了试教。他们都提出了许多宝贵的意见。

五、本书由人民教育出版社中小学数学编辑室编写。参加编写的有鲍珑、李慧君、孙福元等，全书由孙福元校订。

# 目　　录

# 引　言

在初中，我们学了平面几何，研究过一些平面图形（由同一个平面内的点、线所构成的图形）的形状、大小和位置关系，还有平面图形的画法和计算，以及它们的应用．可是，在解决实际问题中，只知道这些几何知识还是不够用的．例如，建造厂房、制造机器、修筑堤坝等，都需要进一步研究空间图形的问题．

空间图形是由空间的点、线、面所构成，也可以看成是空间点的集合．以前我们学过的长方体、圆柱、圆锥等，都属于空间图形．平面图形是空间图形的一部分．

立体几何的研究对象是空间图形．我们将在平面几何知识的基础上，来研究空间图形的性质、画法、计算，以及它们的应用．

# 第一章　直线和平面

## 一　平　　面

### 1.1　平面

常见的桌面、黑板面、平静的水面以及纸板等，都给我们以平面的形象．几何里所说的平面就是从这样的一些物体抽象出来的．但是，几何里的平面是无限延展的．

当我们从适当的角度和距离观察桌面或黑板面时，感到它们都很象平行四边形．因此，在立体几何中，通常画平行四边形来表示平面(图 1-1)． 当平面是水平放置的时候，通常把平行四边形的锐角画成 45°，横边画成等于邻边的两倍．当一个平面的一部分被另一个平面遮住时，应把被遮部分的线段画成虚线或不画(图 1-2)．这样，看起来立体感强一些．

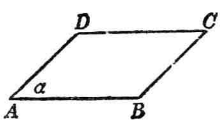



图　1-1

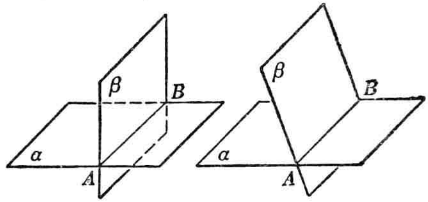


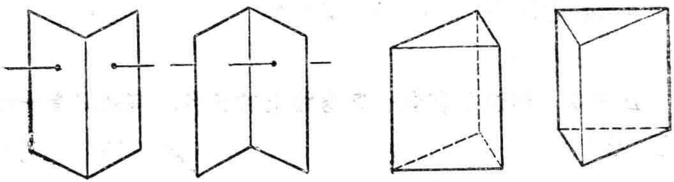

图　1-2

平面通常用一个希腊字母 $\alpha$、$\beta$、$\gamma$ 等来表示，如平面 $\alpha$、平面 $\beta$、平面 $\gamma$ 等，也可以用表示平行四边形的两个相对顶点的字母来表示，如平面 $AC$ (图 1-1)．

**练　习**

1. 能不能说一个平面长 4 米，宽 2 米？为什么？

2. 观察(1)、(2)中甲、乙两个图形，用模型来说明它们的位置有什么不同．并用字母来表示各平面．



甲　　　乙　　　甲　　　乙

(1)　　　(2)

(第 2 题)

## 1.2　平面的基本性质

在生产与生活中，人们经过长期的观察与实践，总结出关于平面的三个基本性质．我们把它们当作公理，作为进一步推理的基础．

**公理 1**　**如果一条直线上的两点在一个平面内，那么这条直线上所有的点都在这个平面内**(图 1-3)．

这时我们说直线在平面内，或者说平面经过直线．

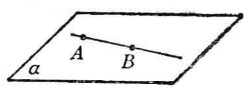



图　1-3

例如，把一根直尺边缘上的任意两点放在平的桌面上，可以看到直尺边缘就落在桌面上．

点 $A$ 在直线 $a$ 上，记作 $A\in a$；点 $A$ 在直线 $a$ 外，记作 $A\notin a$；点 $A$ 在平面 $\alpha$ 内，记作 $A\in\alpha$，点 $A$ 在平面 $\alpha$ 外，记作 $A\notin\alpha$；直线 $a$ 在平面 $\alpha$ 内，记作 $a\subset\alpha$．

**公理 2**　**如果两个平面有一个公共点，那么它们有且只有一条通过这个点的公共直线**(图 1-4)．

例如，教室内相邻的墙面，在墙角处交于一个点，它们就交于过这个点的一条直线。

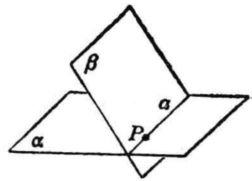



图 1-4

如果两个平面 $\alpha$ 和 $\beta$ 有一条公共直线 $a$，就说平面 $\alpha$ 和 $\beta$ 相交，交线是 $a$，记作 $\alpha\cap\beta=a$.

**公理 3　经过不在同一条直线上的三点，有且只有一个平面**(图 1-5).

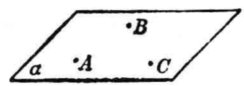



图 1-5

例如，一扇门用两个合页和一把锁就可以固定了.

过 $A$、$B$、$C$ 三点的平面又可记作"平面 $ABC$".

根据上述公理，可以得出下面的推论：

**推论 1　经过一条直线和这条直线外的一点，有且只有一个平面**(图 1-6 甲).

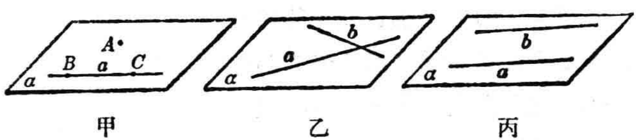



图 1-6

$A$ 是直线 $a$ 外的一点，在 $a$ 上任取两点 $B$、$C$. 根据公理 3，经过不共线的三点 $A$、$B$、$C$ 有一个平面 $\alpha$. 因为点 $B$、$C$ 都在平面 $\alpha$ 内，所以根据公理 1，直线 $a$ 在平面 $\alpha$ 内. 即平面 $\alpha$ 是经过直线 $a$ 和点 $A$ 的平面.

因为点 $B$、$C$ 在直线 $a$ 上，所以经过直线 $a$ 和点 $A$ 的平面一定经过点 $A$、$B$、$C$. 又根据公理 3 经过不共线的三点 $A$、$B$、

$C$ 的平面只有一个，所以经过直线 $a$ 和点 $A$ 的平面只有一个.

类似地，可以得出下面两个推论：

**推论 2　经过两条相交直线，有且只有一个平面**(图 1-6 乙).

**推论 3　经过两条平行直线，有且只有一个平面**(图 1-6 丙).

"有且只有一个平面"，我们也说"确定一个平面".

**注意：** 在立体几何里，平面几何中的定义、公理、定理等，对于同一个平面内的图形仍然成立.

**例**　两两相交且不过同一个点的三条直线必在同一个平面内.

已知：直线 $AB$、$BC$、$CA$ 两两相交，交点分别为 $A$、$B$、$C$ (图 1-7).

求证：直线 $AB$、$BC$、$CA$ 共面*.

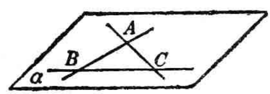


图　1-7

**证明：** ∵　直线 $AB$ 和 $AC$ 相交于点 $A$,

∴　直线 $AB$ 和 $AC$ 确定一个平面 $\alpha$ (推论 2).

∵　$B\in AB$,　$C\in AC$,

∴　$B\in\alpha$,　$C\in\alpha$.

∴　$BC\subset\alpha$ (公理 1).

因此，直线 $AB$、$BC$、$CA$ 都在平面 $\alpha$ 内，即它们共面.

---

* 空间的几个点和几条直线，如果都在同一个平面内，可以简单地说它们"共面"，否则说它们"不共面".

**练　习**

1. 填空：

(1) _____ _______的三点确定一个平面；

(2) 两条____或____直线确定一个平面；

(3) 有一个公共点的两个平面相交于________的一条直线.

2. 用符号表示下列语句：

(1) 点 $A$ 在平面 $\alpha$ 内，但在平面 $\beta$ 外；

(2) 直线 $a$ 经过平面 $\alpha$ 外一点 $M$；

(3) 直线 $a$ 和 $b$ 相交于平面 $\alpha$ 内一点 $M$；

(4) 直线 $a$ 在平面 $\alpha$ 内，又在平面 $\beta$ 内，即平面 $\alpha$ 和 $\beta$ 相交于直线 $a$.

3. 将下列命题改写成语言叙述，判断它们是否正确，并说明理由.

(1) 当 $A\in\alpha$, $B\notin\alpha$ 时，线段 $AB\subset\alpha$；

(2) $$\left.\begin{array}{l}A\in\alpha\\ B\in\alpha\\ C\in AB\end{array}\right\}\Longrightarrow C\in\alpha.$$

## 1.3　水平放置的平面图形的直观图的画法

把空间图形画在纸上或黑板上，这就是用一个平面图形来表示空间图形. 这样的平面图形不是空间图形的真实形状，而是它的直观图. 如图 1-8 是正方体的一种直观图. 正方体的各个面本来都是正方形，但是在直观图中，有一些面画成了平行四边形. 虽然直观图

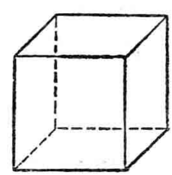


图　1-8

是和空间图形不同的平面图形，但它有较强的立体感.

要画空间图形的直观图，首先要学会水平放置的平面图形的直观图的画法. 下面举例说明一种常用的画法.

**例 1** 画水平放置的正六边形的直观图(图 1-9).

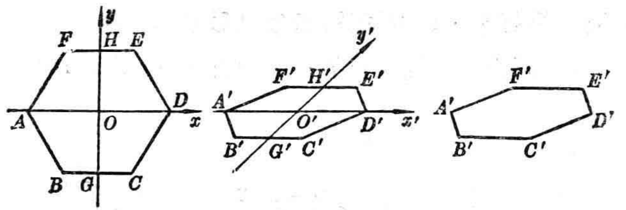



图 1-9

**画法:** (1) 在已知正六边形 $ABCDEF$ 中，取对角线 $AD$ 所在的直线为 $x$ 轴，取对称轴 $GH$ 为 $y$ 轴. 画对应的 $x'$ 轴、$y'$ 轴, 使 $\angle x'O'y'=45°$.

(2) 以点 $O'$ 为中点, 在 $x'$ 轴上取 $A'D'=AD$, 在 $y'$ 轴上取 $G'H'=\frac{1}{2}GH$. 以点 $H'$ 为中点画 $F'E'$ 平行于 $x'$ 轴, 并等于 $FE$; 再以 $G'$ 为中点画 $B'C'$ 平行于 $x'$ 轴, 并等于 $BC$.

(3) 连结 $A'B'$、$C'D'$、$D'E'$、$F'A'$. 所得的六边形 $A'B'C'D'E'F'$ 就是正六边形 $ABCDEF$ 的直观图.

**注意:** 图画好后, 要擦去辅助线*.

上面画直观图的方法叫做**斜二测画法**，这种画法的规则是:

**(1) 在已知图形中取互相垂直的轴 $Ox$、$Oy$. 画直观图**

* 辅助线包括 $x'$ 轴、$y'$ 轴及为画图添加的线.

**时，把它画成对应的轴 $O'x'$、$O'y'$，使 $\angle x'O'y'=45°$（或 $135°$）．它们确定的平面表示水平平面．**

**（2）已知图形中平行于 $x$ 轴或 $y$ 轴的线段，在直观图中分别画成平行于 $x'$ 轴或 $y'$ 轴的线段．**

**（3）已知图形中平行于 $x$ 轴的线段，在直观图中保持原长度不变；平行于 $y$ 轴的线段，长度为原来的一半．**

**例 2** 画水平放置的正五边形的直观图(图 1-10)．

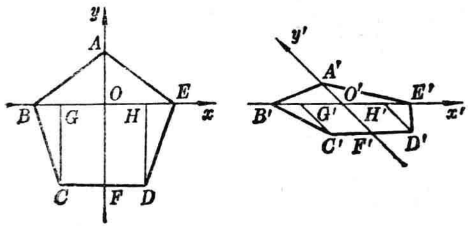



图 1-10

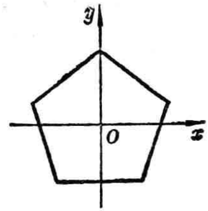
**画法：**（1）在已知正五边形 $ABCDE$ 中，取对角线 $BE$ 所在的直线为 $x$ 轴，取对称轴 $AF$ 为 $y$ 轴．分别过点 $C$、$D$ 作 $CG \parallel Oy$、$DH \parallel Oy$，与 $x$ 轴分别交于 $G$、$H$．画对应的 $x'$ 轴、$y'$ 轴，使 $\angle x'O'y'=135°$．

（2）以点 $O'$ 为中点，在 $x'$ 轴上截取 $G'H'=GH$．在 $x'$ 轴的同一侧画线段 $C'G' \parallel O'y'$、$D'H' \parallel O'y'$，并使 $C'G'=\frac{1}{2}CG$，$D'H'=\frac{1}{2}DH$；在 $x'$ 轴的另一侧的 $y'$ 轴上取一点 $A'$，使 $O'A'=\frac{1}{2}OA$；以点 $O'$ 为中点，在 $x'$ 轴上截取 $B'E'=BE$．

（3）连结 $A'B'$、$B'C'$、$C'D'$、$D'E'$、$E'A'$．所得的五边形 $A'B'C'D'E'$ 就是正五边形 $ABCDE$ 的直观图．

## 练　习

1. 画水平放置的正方形、正三角形的直观图。
2. 图中所给出的 $x$ 轴、$y$ 轴经过正五边形中心，画这个正五边形的直观图。



(第 2 题)

## 习 题 一

1. 下面的说法正确吗？为什么？

   (1) 线段 $AB$ 在平面 $\alpha$ 内，直线 $AB$ 不全在平面 $\alpha$ 内；

   (2) 平面 $\alpha$ 和 $\beta$ 只有一个公共点.
2. 为什么有的自行车后轮旁只安装一只撑脚？
3. 三角形、梯形是否一定是平面图形？为什么？
4. (1) 不共面的四点可以确定几个平面？

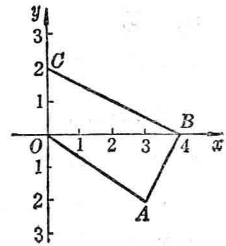
   (2) 三条直线两两平行，但不共面，它们可以确定几个平面？

   (3) 共点的三条直线可以确定几个平面？
5. 一条直线过平面内一点与平面外一点，它和这个平面有几个公共点？为什么？
6. 一条直线与两条平行直线都相交．证明：这三条直线在同一个平面内．
7. 过已知直线外一点与这条直线上的三点分别画三条直线．证明：这三条直线在同一个平面内．
8. 四条线段顺次首尾连接，所得的图形一定是平面图形吗？为什么？

9. 怎样用两根细绳来检查一张桌子的四条腿的下端，是否在同一个平面内.

10. 画出图中水平放置的四边形 $OABC$ 的直观图.

11. 画水平放置的等腰梯形和平行四边形的直观图。




(第 10 题)

# 二　空间两条直线

## 1.4　两条直线的位置关系

我们知道，在同一个平面内的两条直线*的位置关系只有两种：平行或相交.

空间的两条直线之间，还有另外一种位置关系.

观察图 1-11 中的六角螺母的棱 $AB$ 和 $CD$ 所在的直线，或机械部件蜗轮和蜗杆的轴线，可以看出，它们不同在一个平面内.

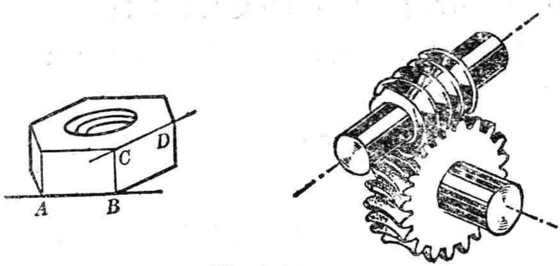



图　1-11

* 本书中没有特别说明的"两条直线(平面)"，均指不重合的两条直线(平面).

我们把不同在任何一个平面内的两条直线叫做**异面直线**. 显然,两条异面直线是既不平行又不相交的.

空间的两条直线的位置关系有以下三种:

(1) **相交直线**——在同一个平面内,有且只有一个公共点;

(2) **平行直线**——在同一个平面内,没有公共点;

(3) **异面直线**——不同在任何一个平面内,没有公共点.

画异面直线时,可以画成如图 1-12 那样,以显示出它们不共面的特点.

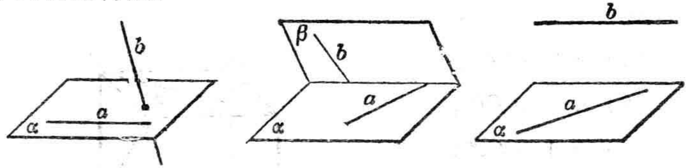



图 1-12

直线 $a$、$b$ 相交于点 $A$,我们规定记作 $a\cap b=A$.

例 **平面内一点与平面外一点的连线,和平面内不经过该点的直线是异面直线.**

已知: $a\subset\alpha$, $A\notin\alpha$, $B\in\alpha$, $B\notin a$. (图 1-13).

求证: 直线 $AB$ 和 $a$ 是异面直线.

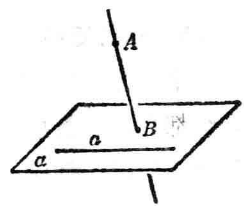



图 1-13

证明: 假设直线 $AB$ 与 $a$ 在同一个平面内,那么这个平面一定经过点 $B$ 和直线 $a$.

$\because$ $B\notin a$, 经过点 $B$ 与直线 $a$ 只能有一个平面 $\alpha$,

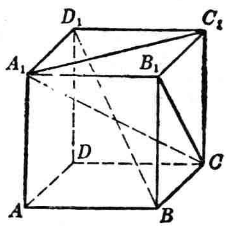
$\therefore$ 直线 $AB$ 与 $a$ 应在平面 $\alpha$ 内.

∴ $A\in\alpha$，这与已知 $A\notin\alpha$ 矛盾.

∴ 直线 $AB$ 和 $a$ 是异面直线.

### 练　习

1. 在教室里找出几对异面直线的例子.
2. (1) 没有公共点的两条直线叫做平行直线. 对吗？
   (2) 分别在两个平面内的两条直线一定是异面直线吗？为什么？
3. 说出正方体中各对线段的位置关系：
   (1) $AB$ 和 $CC_1$；
   (2) $A_1C$ 和 $BD_1$；
   (3) $A_1A$ 和 $CB_1$；
   (4) $A_1C_1$ 和 $CB_1$；
   (5) $A_1B_1$ 和 $DC$；
   (6) $BD_1$ 和 $DC$.



（第 3 题）

## 1.5　平行直线

在平面几何里，我们曾学过："在同一个平面内，如果两条直线都和第三条直线平行，那么这两条直线也互相平行". 对于空间的三条直线，实际上也有这样的性质，我们把它作为公理.

**公理 4　平行于同一条直线的两条直线互相平行.**

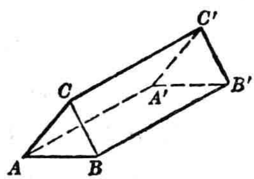


图　1-14

例如，图 1-14 里三棱镜的三条棱，如果 $AA' \parallel BB'$、$CC' \parallel BB'$，

这时必有 $AA' \parallel CC'$.

**例** 已知：四边形 $ABCD$ 是空间四边形（四个顶点不共面的四边形），$E$、$H$ 分别是边 $AB$、$AD$ 的中点，$F$、$G$ 分别是边 $CB$、$CD$ 上的点，且 $\frac{CF}{CB}=\frac{CG}{CD}=\frac{2}{3}$. 求证：四边形 $EFGH$ 是梯形.

**证明**：如图 1-15，连结 $BD$.

$\because$ $EH$ 是 $\triangle ABD$ 的中位线，

$\therefore$ $EH \parallel BD, EH=\frac{1}{2}BD$.

又在 $\triangle BCD$ 中，$\frac{CF}{CB}=\frac{CG}{CD}=\frac{2}{3}$，

$\therefore$ $FG \parallel BD$, $FG=\frac{2}{3}BD$.

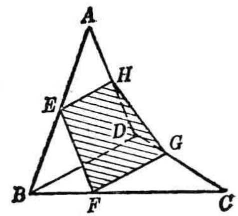


图 1-15

根据公理 4，$EH \parallel FG$.

又 $\because$ $FG > EH$，

$\therefore$ 四边形 $EFGH$ 是梯形.

根据公理 4，我们可以证明下面的定理：

**定理 如果一个角的两边和另一个角的两边分别平行并且方向相同，那么这两个角相等.**

已知：$\angle BAC$ 和 $\angle B'A'C'$ 的边 $AB \parallel A'B'$, $AC \parallel A'C'$，并且方向相同.

求证：$\angle BAC=\angle B'A'C'$.

**证明**：对于 $\angle BAC$ 和 $\angle B'A'C'$ 都在同一平面内的情况，在平面几何中已经证明. 下面我们证明两个角不在同一平面内的情况.

如图 1-16，在 $AB$、$A'B'$，$AC$、$A'C'$ 上分别取 $AD=A'D'$、$AE=A'E'$，连结 $AA'$、$DD'$、$EE'$、$DE$、$D'E'$。

∵ $AB \parallel A'B'$, $AD=A'D'$,

∴ $AA'D'D$ 是平行四边形.

∴ $AA' \underline{\parallel} DD'$.

同理 $AA' \underline{\parallel} EE'$.

根据公理 4 得 $DD' \parallel EE'$.

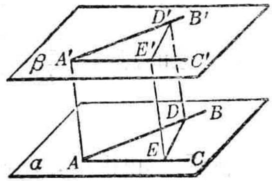


图 1-16

又可得 $DD'=EE'$,

∴ 四边形 $EE'D'D$ 是平行四边形.

∴ $ED=E'D'$. 可得 $\triangle ADE \cong \triangle A'D'E'$.

∴ $\angle BAC=\angle B'A'C'$.

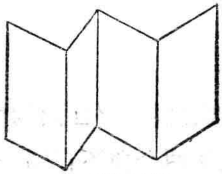
把上面两个角的两边反向延长，就得出下面的推论：

**推论 如果两条相交直线和另两条相交直线分别平行，那么这两组直线所成的锐角（或直角）相等.**

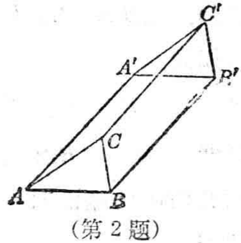
**注意：** 由上面定理的证明可知：平面里的定义、定理等，对于非平面图形，需要经过证明才能应用.

### 练 习

1. 把一张长方形的纸对折两次，打开后如图那样，说明为什么这些折痕是互相平行的.



（第 1 题）




（第 2 题）

2. 已知：$AA'$、$BB'$、$CC'$ 不共面，且 $BB' \underline{\parallel} AA'$，$CC' \underline{\parallel} AA'$.