高中三角
百题多解法

广西教育出版社

高中三角百题多解法

风介生　编著

广西教育出版社

高中三角百题多解法

凤 介 生 编著

☆

广西教育出版社出版

（南宁市七一路7号）

广西新华书店发行　南宁地区印刷厂印刷

*

开本 787×1092 1/32 印张 6.635 143千字

1987年4月第1版　1989年5月第2版

1991年7月第4次印刷

印数：77,701—86,700册

ISBN 7-5435-0046-9/G·40

定价：2.05元

前　言

平面三角是高中数学的重要组成部分，它与代数、几何有着密切的联系，也是进一步学习高等数学、物理等学科的基础。

平面三角的公式多，解题的灵活性大，初学者往往不得要领。为了帮助高中学生和自学者学好平面三角的知识，掌握高中三角的解题基本方法和技巧，提高运用三角知识分析问题和解决问题的能力；也为了给中学数学教师提供教学参考资料，笔者根据现行中学课本和国家教委1986年颁布的全日制中学数学教学大纲，参考国内外有关资料，并结合笔者多年的教学经验，选编了这本《高中三角百题多解法》。

本书选收的题目具有典型性和广泛性，能概括高中三角全部内容，并注意沟通与代数、几何知识的内在联系，帮助读者进一步理解和巩固所学知识。题型力求多样化，对每道题至少给出两种解法，帮助读者开拓思路，举一反三，触类旁通。

读者阅读本书时，应先进行独立思考，再与书中的解法相比较，以便探索和总结解题规律，从而提高解题能力。

由于水平所限，不当之处在所难免，请读者批评指正。

凤介生

于桂林市教育学院

目　　录

一、三角函数式的化简与求值

1．化简：$(\cos\theta+\sin\theta)(\cos\theta-\sin\theta)(1+\mathrm{tg}2\theta\mathrm{tg}\theta)$

分析1　把前两个因式先相乘，第三个因式化为正弦、余弦再相乘，用二倍角余弦公式化简。

解法1　原式$=(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\left(1+\dfrac{\sin2\theta\sin\theta}{\cos2\theta\cos\theta}\right)$

$$=\cos2\theta\left(1+\frac{2\sin^2\theta}{\cos2\theta}\right)$$

$$=1-2\sin^2\theta+2\sin^2\theta$$

$$=1.$$

分析2　把前两个因式先相乘，第三个因式用两角差正切公式的变形表示，再利用万能公式化简。

解法2　原式$=(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\dfrac{\mathrm{tg}2\theta-\mathrm{tg}\theta}{\mathrm{tg}(2\theta-\theta)}$

$$=\cos2\theta\left(\frac{2\mathrm{tg}\theta}{1-\mathrm{tg}^2\theta}\cdot\frac{1}{\mathrm{tg}\theta}-1\right)$$

$$=\cos2\theta\ \frac{1+\mathrm{tg}^2\theta}{1-\mathrm{tg}^2\theta}$$

$$=\cos2\theta\cdot\frac{1}{\cos2\theta}$$

$$=1.$$

分析3　前两个因式先相乘，把第三个因式中的$\mathrm{tg}2\theta$化为$\mathrm{tg}\theta$，通分后用万能公式化简。

解法3 原式$=(\cos^2\theta-\sin^2\theta)\left(1+\frac{2\operatorname{tg}\theta}{1-\operatorname{tg}^2\theta}\cdot\operatorname{tg}\theta\right)$

$$=\cos2\theta\cdot\frac{1+\operatorname{tg}^2\theta}{1-\operatorname{tg}^2\theta}$$

$$=\cos2\theta\cdot\frac{1}{\cos2\theta}$$

$$=1.$$

简评 化简三角函数式的一般要求是：①项数要最少；②三角函数的种类要最少；③三角函数的次数要最低；④分母不含三角函数。本题的三种解法基本体现了这些要求。特别地，化简时要注意三角公式的正用、逆用及变形，还应注意运用乘法公式及因式分解公式。

2．化简：$\dfrac{\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\operatorname{ctg}\frac{x}{2}+2\right)\operatorname{tg}x}{\sec x+\operatorname{tg}x}$.

（1979年军事院校入学试题）

分析1 化为正弦、余弦后，利用二倍角公式化$\frac{x}{2}$角的函数为x角的函数，再利用代数运算化简。

解法1 原式$=\dfrac{\left(\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}+\dfrac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}+2\right)\operatorname{tg}x}{\sec x+\operatorname{tg}x}$

$$=\frac{\left(\frac{2}{\sin x}+2\right)\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{1}{\cos x}+\frac{\sin x}{\cos x}}$$

$$=\frac{2\cdot\frac{1+\sin x}{\sin x}\cdot\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{1+\sin x}{\cos x}}$$

$$=2.$$

分析 2 利用万能公式把所给三角式化为关于$\mathrm{tg}\frac{x}{2}$的代数式再化简。

解法 2

$$\text{原式}=\left\{\mathrm{tg}\frac{x}{2}+\frac{1}{\mathrm{tg}\frac{x}{2}}+2\right\}\frac{2\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}$$

$$\div\left\{\frac{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}+\frac{2\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}\right\}$$

$$=\frac{2\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}+2+4\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}+2\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}$$

$$=2.$$

简评 把三角函数都化为正弦或余弦，是化简时常采用的方法，这是由于涉及正弦和余弦的公式多，较易找到化

简的途径，如解法1．解法2把三角式变为代数式来化简，相对繁些．

3．设$\frac{3\pi}{4}<\theta<\frac{5\pi}{4}$，化简：

$$\frac{\sqrt{\cos\frac{\pi}{4}\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\theta\right)\left[\sin(\pi-\theta)-\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\right]}}{\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}$$

（1980年高考文科试题）

分析1　先利用诱导公式和两角和的正弦公式化简，再由已知条件判断$\theta+\frac{\pi}{4}$所在范围，从而确定$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$的符号，将式子化简．

解法1　原式$=\frac{\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)(\sin\theta+\cos\theta)}}{\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}$

$$=\frac{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}}{\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$=\frac{\left|\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)\right|}{\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}.$$

$\because\ \frac{3\pi}{4}<\theta<\frac{5\pi}{4}$，$\therefore \pi<\theta+\frac{\pi}{4}<\frac{3\pi}{2}$．

从而 $\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)<0$,

$$\therefore\quad 原式=\frac{-\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}=-1.$$

分析 2 利用诱导公式及两角和的正弦公式把原式化成仅含 θ 角的三角函数式，再根据已知条件确定有关三角函数的符号，从而把式子化简。

解法 2 $$原式=\frac{\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)(\sin\theta+\cos\theta)}}{\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$=\frac{\sqrt{\frac{1}{2}(\sin\theta+\cos\theta)^2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\theta+\cos\theta)}$$

$$=\frac{|\sin\theta+\cos\theta|}{\sin\theta+\cos\theta}.$$

$$\because\quad \frac{3\pi}{4}<\theta<\frac{5\pi}{4},\qquad \therefore\quad \pi<\theta+\frac{\pi}{4}<\frac{3\pi}{2}.$$

$$\therefore\quad \sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)<0,$$

$$\therefore\quad 原式=\frac{-(\sin\theta+\cos\theta)}{\sin\theta+\cos\theta}=-1.$$

简评 由于 $\left(\frac{3\pi}{4}-\theta\right)+\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)=\pi$，从而有

$\sin\left(\frac{3\pi}{4}-\theta\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)$，本题在化简时利用了这个关系。在化简三角式时，要注意有关的角之间有无互余、互补或倍数关系等，利用这些关系往往会给解题带来很大的方便。

4．求$\sin50^\circ(1+\sqrt{3}\operatorname{tg}10^\circ)$的值。

分析 1　提出$\sqrt{3}$，括号内的式子化为正弦与余弦，利用和角与倍角正弦公式化简求值。

解法 1　原式$=\sqrt{3}\sin50^\circ\left(\frac{\sqrt{3}}{3}+\operatorname{tg}10^\circ\right)$

$$=\sqrt{3}\sin50^\circ\left(\frac{\sin30^\circ}{\cos30^\circ}+\frac{\sin10^\circ}{\cos10^\circ}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{3}\sin50^\circ\sin(30^\circ+10^\circ)}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos10^\circ}$$

$$=\frac{2\sin50^\circ\cos50^\circ}{\cos10^\circ}$$

$$=\frac{\sin100^\circ}{\cos10^\circ}=1.$$

分析 2　先把括号内的式子化为正弦与余弦，利用两角和余弦公式化简后求值。

解法 2　原式$=\sin50^\circ\cdot\frac{\cos10^\circ+\sqrt{3}\sin10^\circ}{\cos10^\circ}$

$$=\frac{2\sin50^\circ}{\cos10^\circ}\left(\frac{1}{2}\cos10^\circ+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin10^\circ\right)$$

$$=\frac{2\sin50^\circ}{\cos10^\circ}(\cos60^\circ\cos10^\circ+\sin60^\circ\sin10^\circ)$$

$$=\frac{2\sin50^\circ}{\cos10^\circ}\cdot\cos50^\circ$$

$$=\frac{\sin100^\circ}{\cos10^\circ}=1.$$

注 也可先利用两角差正切公式把括号内的式子变形，再化为正弦、余弦后化简求值。

简评 对于不查表且无限定条件的求三角函数式的值的题，一般尽量转化为特殊角的三角函数再求值。对非特殊角的三角函数，则转化为同角同名函数后化简求值。如本题的两种解法。

5. 求$\operatorname{tg}9^\circ+\operatorname{ctg}117^\circ-\operatorname{tg}243^\circ-\operatorname{ctg}351^\circ$的值。

（1982年高考文科试题）

分析1 先用诱导公式和互为余角的三角函数公式化简，化为正弦与余弦后再分组合并，最后用二倍角公式及和差化积公式化简求值。

解法1 原式$=\operatorname{tg}9^\circ-\operatorname{tg}27^\circ-\operatorname{tg}63^\circ+\operatorname{tg}81^\circ$

$$=\operatorname{tg}9^\circ+\operatorname{ctg}9^\circ-(\operatorname{tg}27^\circ+\operatorname{ctg}27^\circ)$$

$$=\frac{\sin9^\circ}{\cos9^\circ}+\frac{\cos9^\circ}{\sin9^\circ}-\left(\frac{\sin27^\circ}{\cos27^\circ}+\frac{\cos27^\circ}{\sin27^\circ}\right)$$

$$=\frac{1}{\sin9^\circ\cdot\cos9^\circ}-\frac{1}{\sin27^\circ\cdot\cos27^\circ}$$

$$=\frac{2}{\sin18^\circ}-\frac{2}{\sin54^\circ}$$

$$=\frac{2(\sin54^\circ-\sin18^\circ)}{\sin18^\circ\cdot\sin54^\circ}$$

$$=\frac{4\cos36^\circ\cdot\sin18^\circ}{\sin18^\circ\cdot\sin54^\circ}=4.$$

分析 2 化为锐角三角函数后，把两个正切的差用两角差的正切公式变形表出，再化为正弦与余弦，用两角和与差的余弦公式化简求值。

解法 2 原式 $=\mathrm{tg}9^\circ-\mathrm{tg}27^\circ-\mathrm{tg}63^\circ+\mathrm{tg}81^\circ$

$$=(\mathrm{tg}81^\circ-\mathrm{tg}63^\circ)-(\mathrm{tg}27^\circ-\mathrm{tg}9^\circ)$$

$$=\mathrm{tg}(81^\circ-63^\circ)(1+\mathrm{tg}81^\circ\mathrm{tg}63^\circ)$$

$$-\mathrm{tg}(27^\circ-9^\circ)(1+\mathrm{tg}27^\circ\mathrm{tg}9^\circ)$$

$$=\mathrm{tg}18^\circ(\mathrm{ctg}9^\circ\mathrm{ctg}27^\circ-\mathrm{tg}9^\circ\mathrm{tg}27^\circ)$$

$$=\frac{\sin18^\circ}{\cos18^\circ}\cdot\frac{\cos^2 9^\circ\cos^2 27^\circ-\sin^2 9^\circ\sin^2 27^\circ}{\sin9^\circ\sin27^\circ\cos9^\circ\cos27^\circ}$$

$$=\frac{4}{\cos18^\circ}\cdot\frac{\cos18^\circ\cos36^\circ}{\sin54^\circ}$$

$$=4.$$

简评 四个三角函数的代数和的化简求值，通常是把两个函数作为一组进行化简。解法 1 分组的原则是同一组的两个三角函数的角之间有互余关系，变形后可出现特殊角的三角函数。解法 2 则是把两组分别化积后有公因式 $\mathrm{tg}18^\circ$，提取公因式后，括号内的 4 个角的函数可化为 2 个角的函数。有利于化简求值。

注 此题可推广到一般：

$$\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=4.$$

6. 不查表，求$\sin\frac{\pi}{24}\sin\frac{11\pi}{24}\cos\frac{7\pi}{12}$的值。

分析 1　因为$\frac{\pi}{24}+\frac{11\pi}{24}=\frac{\pi}{2}$，可把前二个不同角的函数化为同角函数。再用倍角公式把三个函数的积化为二个函数的积，最后用积化和差公式化为特殊角的函数，从而求值。

解法 1　原式 $=\sin\frac{\pi}{24}\cos\frac{\pi}{24}\cos\frac{7\pi}{12}$

$$=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{7\pi}{12}$$

$$=\frac{1}{4}\left[\sin\left(\frac{7\pi}{12}+\frac{\pi}{12}\right)-\sin\left(\frac{7\pi}{12}-\frac{\pi}{12}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left(\sin\frac{2\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right)=\frac{\sqrt{3}-2}{8}.$$

分析 2　先把前二个函数的积化为余弦的差，再利用$\frac{5\pi}{12}+\frac{7\pi}{12}=\pi$的关系，使式子仅含一个角的函数，最后利用二倍角余弦公式化出特殊角的函数，从而求值。

解法 2　原式 $=-\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{24}+\frac{11\pi}{24}\right)-\right.$

$$\left.\cos\left(\frac{\pi}{24}-\frac{11\pi}{24}\right)\right]\cos\frac{7\pi}{12}$$

$$=\frac{1}{2}\cos\frac{5\pi}{12}\cos\frac{7\pi}{12}$$

$$=-\frac{1}{2}\cos^2\frac{5\pi}{12}\left(\because \frac{5\pi}{12}+\frac{7\pi}{12}=\pi\right)$$

$$=-\frac{1}{4}\left(1+\cos\frac{5\pi}{6}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{3}-2}{8}.$$

简评 本题两种解法都是根据角之间的关系，适当运用三角公式把非特殊角的函数转化为特殊角的函数，从而达到化简求值的目的。这是解这类题的常用方法。

7．已知 $\sin x+\cos x=\frac{1}{5}$，且 $0\leqslant x<\pi$，求 $\operatorname{tg}x$。

分析1 从已知条件出发，利用两角和正弦公式求 $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$，再求 $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$和$\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$，把后者展开即可求$\operatorname{tg}x$。

解法1 $\because\ \sin x+\cos x=\frac{1}{5}$，

则 $\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)=\frac{1}{5}$，

即 $\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{5}$，$\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{10}$。

当 $0\leqslant x<\frac{\pi}{2}$时，$\sin x+\cos x\geqslant 1$。

由 $\sin x+\cos x=\frac{1}{5}$ 及 $0\leqslant x<\pi$ 知 $\frac{\pi}{2}<x<\pi$，则

$$\frac{3\pi}{4}<x+\frac{\pi}{4}<\frac{5\pi}{4},$$

$$\therefore\quad \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{1-\sin^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$=-\frac{7\sqrt{2}}{10},$$

$$\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}=-\frac{1}{7}.$$

则 $\frac{\operatorname{tg}x+1}{1-\operatorname{tg}x}=-\frac{1}{7}$，

解得 $\operatorname{tg}x=-\frac{4}{3}$。

分析2 将已知等式两边平方，化为关于 $\sin x$ 的二次方程，求出 $\sin x$ 后，$\cos x$ 和 $\operatorname{tg}x$ 可求。

解法2 $\because$ $\sin x+\cos x=\frac{1}{5}$，$\cos x=\frac{1}{5}-\sin x$，

两边平方，得 $1-\sin^2x=\cos^2x=\left(\frac{1}{5}-\sin x\right)^2$，

即 $25\sin^2x-5\sin x-12=0$，

解得 $\sin x=\frac{4}{5}$，或 $\sin x=-\frac{3}{5}$。

由 $0\leqslant x<\pi$ 知，应取 $\sin x=\frac{4}{5}$。

则 $\cos x=\frac{1}{5}-\sin x=-\frac{3}{5}$。

$\therefore\ \operatorname{tg}x=-\dfrac{4}{3}$.

简评 题目虽给出$0\leqslant x<\pi$，但条件$\sin x+\cos x=\dfrac{1}{5}$对$x$有进一步的限制，若不考虑这点，仅由$0\leqslant x<\pi$得$\dfrac{\pi}{4}\leqslant x+\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{5\pi}{4}$，$\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$就有两解，从而$\operatorname{tg}x$也有两解，这就错了。解求值问题，要注意判断解是否唯一。

8．已知$\cos2\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$，求$\sin^4\theta+\cos^4\theta$的值。

（1964年北京竞赛题）

分析1 使用完全平方公式和二倍角正弦公式等变形，把所求式子化成仅含$\cos2\theta$的三角式，再把已知条件代入求值。

解法1 $\because\ \cos2\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$，

$$\therefore\ \sin^4\theta+\cos^4\theta=(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^2-2\sin^2\theta\cos^2\theta$$

$$=1-\frac{1}{2}\sin^2 2\theta=1-\frac{1}{2}(1-\cos^2 2\theta)$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos^2\theta=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{9}=\frac{11}{18}.$$

分析2 由已知条件，利用二倍角余弦公式分别求出$\sin^2\theta$和$\cos^2\theta$的值，代入原式求值。

解法2 $\because\ \cos2\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$，