

# 普通結構學

下 冊

蔡 方 蔭 著

122

商務印書館發行



2864203

# 普 通 結 構 學

下 冊

蔡 方 蔭 著



商 務 印 書 館 發 行

中華民國三十六年九月初版  
中華民國三十八年八月三版

◆(83324.10)

普通結構學三冊

下冊基價貳拾元

印刷地點外另加運費

著者 蔡方蔭

發行人 陳懋解  
上海河南中路

印刷所 商務印書館

發行所 商務印書館  
各地

\*\*\*\*\*  
版 翻  
權 印  
所 必  
有 究  
\*\*\*\*\*

## 下 冊 目 次

|                                           |    |
|-------------------------------------------|----|
| 第十章 長跨橋梁(一)——三鉸拱橋及三<br>鉸加勁懸橋 .....        | 1  |
| 10— 1. 長跨橋梁之需要及型式 .....                   | 1  |
| 10— 2. 三鉸拱橋之通用型式 .....                    | 2  |
| 10— 3. 三鉸拱橋之反力及其感應圖 .....                 | 6  |
| 10— 4. 三鉸拱骨之彎矩, 切力, 與直接應力及其感<br>應圖 .....  | 10 |
| 10— 5. 三鉸拱骨之最外纖維應力及其感應圖 .....             | 29 |
| 10— 6. 三鉸拱桁架之應力及其感應圖 .....                | 34 |
| 10— 7. 特殊型式之三鉸拱橋 .....                    | 44 |
| 10— 8. 三鉸拱橋在側力及縱力下之應力 .....               | 62 |
| 10— 9. 懸橋之型式 .....                        | 65 |
| 10—10. 懸索之形式及應力 .....                     | 68 |
| 10—11. 懸橋三鉸加勁梁之反力, 切力, 與彎矩及其<br>感應圖 ..... | 72 |
| 10—12. 懸橋三鉸加勁梁之最大反力, 切力及彎矩 .....          | 83 |
| 第十一章 長跨橋梁(二)——懸臂橋及威<br>氏桁架橋 .....         | 93 |

|                  |                            |     |
|------------------|----------------------------|-----|
| 11— 1.           | 懸臂橋之原理及型式 .....            | 93  |
| 11— 2.           | 懸臂橋之反力, 切力, 與彎矩及其感應圖 ..... | 103 |
| 11— 3.           | 懸臂桁架橋之應力及其感應圖 .....        | 108 |
| 11— 4.           | 拱橋式與懸橋式懸臂桁架橋之應力及其感應圖 ..... | 112 |
| 11— 5.           | 懸臂橋之最大反力, 切力及彎矩 .....      | 123 |
| 11— 6.           | 懸臂橋在側力下之應力 .....           | 127 |
| 11— 7.           | 威氏桁架橋之型式及特點 .....          | 131 |
| 11— 8.           | 威氏桁架橋之反力, 切力及彎矩 .....      | 133 |
| 11— 9.           | 威氏桁架橋之反力, 切力及彎矩感應圖 .....   | 143 |
| 11—10.           | 威氏桁架橋之桿應力及其感應圖 .....       | 156 |
| 11—11.           | 威氏桁架橋之最大反力, 切力及彎矩 .....    | 158 |
| 11—12.           | 威氏桁架橋之穩定條件及經濟比例 .....      | 166 |
| 11—13.           | 威氏桁架橋在側力下之應力 .....         | 171 |
| 第十二章 結構之變位 ..... |                            | 173 |
| 12—1.            | 結構變位之原因及應用 .....           | 173 |
| 12—2.            | 直梁變位之基本理論 (五圖之關係) .....    | 176 |
| 12—3.            | 用角變法求直梁之變位 .....           | 182 |
| 12—4.            | 用虛功法求直梁之變位 .....           | 200 |
| 12—5.            | 直梁由於切力及扭力之變位 .....         | 207 |
| 12—6.            | 曲梁之變位 .....                | 216 |
| 12—7.            | 用虛功法求桁架之線變位 .....          | 223 |

---

|                |                      |     |
|----------------|----------------------|-----|
| 12— 8.         | 桁架之相對線變位.....        | 230 |
| 12— 9.         | 桁架中桿之角變位及二桿間之角變..... | 243 |
| 12—10.         | 用角變法求桁架之變位(一).....   | 256 |
| 12—11.         | 用角變法求桁架之變位(二).....   | 277 |
| 12—12.         | 桁架變位之圖解法(一).....     | 288 |
| 12—13.         | 桁架變位之圖解法(二).....     | 307 |
| 12—14.         | 用卡氏定理求結構之變位.....     | 313 |
| 12—15.         | 用富氏級數求結構之變位.....     | 321 |
| 12—16.         | 普通橋梁桁架之變位.....       | 333 |
| 12—17.         | 長跨橋梁之變位.....         | 337 |
| 12—18.         | 桁架加拱之計算法.....        | 358 |
| 12—19.         | 麥氏變位互等之定理.....       | 360 |
| 12—20.         | 桁架應力感應圖之圖解法.....     | 368 |
| 12—21.         | 由桿之變位求其應力.....       | 372 |
| 後記 .....       |                      | 375 |
| 圖、例題及習題索引..... |                      | 378 |

# 普通結構學

## 下 冊

### 第十章 長跨橋梁(一)——三鉸拱橋 及三鉸加勁懸橋

10—1. 長跨橋梁之需要及型式 若橋梁之跨長，超過約 240 公尺<sup>①</sup>，則採用兩端支承之簡單跨，至不經濟。且有時橋梁所跨越之處，係一深而且寬之山谷；或係一大河，其河底太深，河流甚急；或因通航之需要，不易或不宜採用需要橋墩較多之短跨橋梁，於是可採用所謂長跨橋梁，以適應其需要。長跨橋梁之通用型式如下：

- (1) 拱橋；
- (2) 懸橋；
- (3) 懸臂橋；
- (4) 威氏桁架橋；
- (5) 連續橋。

上列五種長跨橋梁之中，懸臂橋及威氏桁架橋常係靜定。連續

① 刻下最長之簡單跨橋梁，推美國意省麥城(Metropolis, Ill.)之彭氏桁架橋，跨長約 220 公尺，於 1917 年造成。

橋係靜不定。至拱橋及懸橋是否靜定，視其型式而異。拱橋之靜定者必須有三鉸，稱爲三鉸拱橋。懸橋之有加勁桁架者，則其加勁桁架亦須有三鉸，始成爲靜定。本書之範圍，既限於靜定之結構，故以下所論之長跨橋梁，亦祇限以下四種：(1)三鉸拱橋，(2)三鉸加勁懸橋，(3)懸臂橋及(4)威氏桁架橋。本章所論者爲前二種，下章所論者則爲後二種。

長跨橋梁乃土木工程師對於近代文化之一大貢獻，主持此項橋梁之工程師，不但須有淵博之專門知識，且對於與計劃此項橋梁有關之社會及經濟方面，亦須有相當之了解。學者如讀關於此項長跨橋梁之論文或記錄<sup>①</sup>，當知此言之不謬。

長跨橋梁常係有紀念性之結構。既須堅固，又須經濟，更須美觀。如設計或建造時略有差池，因而發生重大之不幸事件，則不但主持該橋之工程師受其害，即結構工程界亦蒙其羞。本書第 1—4 節所述之 1914 年 Quebec 大懸臂橋之不幸事件，可爲殷鑒。

## 10—2. 三鉸拱橋之通用型式<sup>②</sup> 三鉸拱橋與第 5—11 節

① 例如鬼門 (Hell Gate) 拱橋及華盛頓懸橋二文，各見美國土木工程師會專刊，1918 年及 1933 年刊。

② 刻下跨度最長之三鉸拱橋，於鋼橋推美國亞省 (Arizona) 珂羅拉多 (Colorado) 河上之公路橋，跨長約爲 188.4 公尺，1928 年造成。於木橋推美國某地之公路橋，跨長約爲 55 公尺，1934 年造成。此二橋之跨長均短於第 1 面註脚①中所述之簡單跨橋梁，惟爲便於分章起見，仍將三鉸拱橋列入長跨橋梁中。

所述之三鉸拱屋頂桁架相似，常各以一鉸置於拱兩端之支點，另一鉸則置於拱頂。

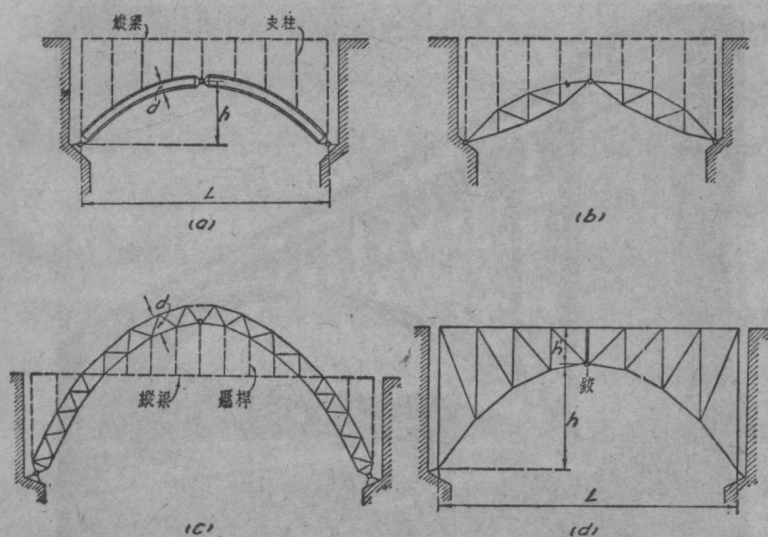
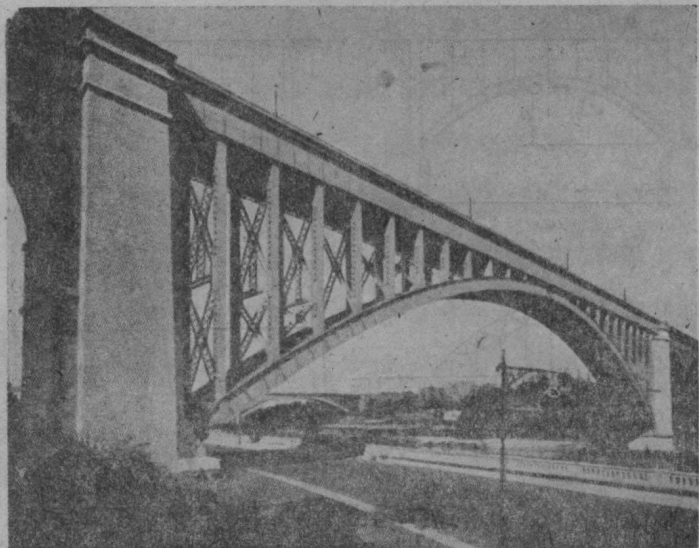


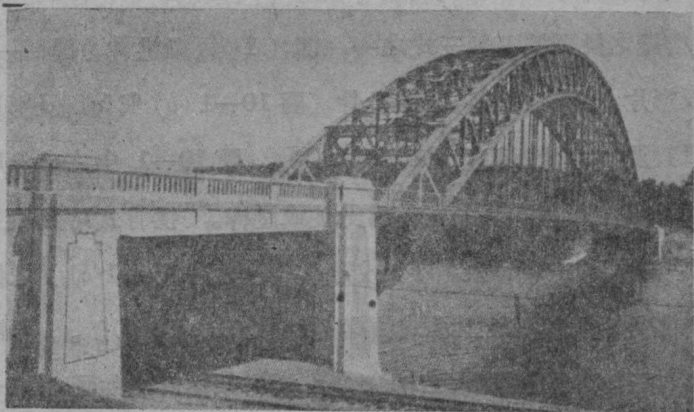
圖 10—1. 三鉸拱橋之通用型式

橋梁之拱可採下列三式之一，即：(1) 鉸梁拱骨〔圖10—1 (a)及影片 XVI〕，(2) 桁架拱骨〔圖 10—1 (b) 與 (c) 及影片 XVII〕，及(3) 拱桁架〔圖10—1 (d)〕。圖 10—1 中之虛線所示者，平直者為縱梁，豎立者為支柱或懸桿。拱骨式可用於上承式〔如圖 10—1 (a) 及 (b)〕或穿越式〔如圖 10—1 (c)〕之橋梁，但拱桁架祇能用於上承式橋梁〔如圖 10—1 (d)〕。於鉸梁拱骨，三鉸常係置於拱之中心軸。於桁架拱骨之如圖 10—1 (c) 者，其二支點之鉸可置於拱之中心或下弦，其拱頂之鉸可置於下弦上弦或二弦之中點。於拱桁架則拱頂鉸常置於下弦，如

圖 10—1 (d), 蓋如此若使其下弦之形式與拱橋在呆荷重下之合力多邊形<sup>①</sup>相合, 則其上弦桿及腹桿在呆荷重下之應力均等



影片 XVI. 三鉸鋼梁拱橋



影片 XVII. 桁架拱橋

① 合力多邊形之意義見第 5—11 節。

於零。三鉸拱橋之特殊型式見 10—7 節。

鉸梁拱骨適宜於跨度較短之橋梁，桁架拱骨適宜於跨度較長之橋梁，而拱桁架則適於中跨橋梁。拱橋之鉸愈多，則其剛勁亦愈小，故三鉸拱之優點在其係一靜定之結構，其劣點則在其剛勁於拱橋中為最小。且其變位線於拱頂鉸之處，有一折斷之點，故三鉸拱橋不適宜於鐵路橋梁。惟橋梁縱係採用二鉸拱，一鉸拱，或無鉸拱，建造時亦常使其在呆荷重下成為三鉸拱。即最先建一三鉸拱橋，俟呆荷重加於橋上之後，再將不需要之鉸取去，或使其無鉸之作用，如是則該項拱橋在呆荷重下係靜定。

拱橋之高度  $h$  與跨長  $L$  之比，當依當地之情形及拱橋之型式而定。於拱桁架其高度約為跨長之  $1/12$  至  $1/4$ ，以  $1/7$  為適中。拱頂之深度  $h'$  約為跨長之  $1/30$  至  $1/15$ ，以  $1/25$  為適中。桁架拱骨之深度  $d$  亦與鉸梁拱骨之深度  $d$  相似，約為跨長之  $1/60$  至  $1/40$ 。拱橋之形式常採用拋物線形，但亦有採用圓弧者。

上承式橋梁之採用拱骨者，每橋之拱骨數可在二以上，其數視橋之寬度而定。橋梁之採用拱桁架者及穿越式橋梁，每橋之拱數常祇二個。若橋面係置於拱橋之頂上，如圖 10—1(b) 及 (d)，則二拱間之中心距，不得小於跨長之  $1/15$ ，亦不得小於支點與橋面系間高度之  $1/3$  或  $1/2$ 。若橋面系係懸吊於二拱之間，如圖 10—1(c)，則以橋面系之寬度為二拱間之中心距，但後者亦不得小於跨長之  $1/20$ ，或拱高之  $1/4$ 。有時為增加拱橋

在側力下之穩定起見，常使二拱均向內傾斜，即使支點處二拱間之中心距略大於拱頂之處者，此項傾度常在橫 1 豎 12 至橫 1 豎 7 之間。拱橋於無活荷重時及有活荷重時在側力下之穩度，必詳密計算。其在側力傾覆力矩下之穩定安全率，以不小於 2 為宜，至少亦不得小於 1.5，否則其支座必須加以相當之錨定。

10-3. 三鉸拱橋之反力及其感應圖 三鉸拱反力之數解及圖解法已詳見第 3—6 及 3—7 節，茲述三鉸拱橋之反力感應圖如下。

圖 10-2(a) 示一非對稱式之三鉸拱，鉸  $B$  之位置高於鉸  $A$  故， $AB$  線之傾度為  $\phi$ 。因此假定  $\phi$  為正號，反是  $\phi$  為負號。圖中  $h$  之值，係鉸  $C$  與  $AB$  線間之豎距，稱為  $C$  鉸之高度。此圖之要點乃在其  $A, B$  及  $C$  三鉸之相對位置，至拱之型式如何，並無關係。故下列之結果，可應用於任何型式之三鉸拱橋。

設以一單位豎向集中荷重置於  $D$  點，其與右支點之距離為  $KL$ 。若此荷重在拱之右部，即  $0 \leq KL \leq b$ ，其左右二支點之反力，如圖 10-2(a) 所示。因鉸  $C$  之彎矩等於零，得，

$$\frac{V_A}{H} = \frac{h + a \tan \phi}{a}$$

用  $\Sigma M_B = 0$ ，以鉸  $B$  為矩心，得

$$KL + HL \tan \phi - V_A L = 0$$

由上列二方程可得

$$H = \frac{ak}{h} \quad (10-1)$$

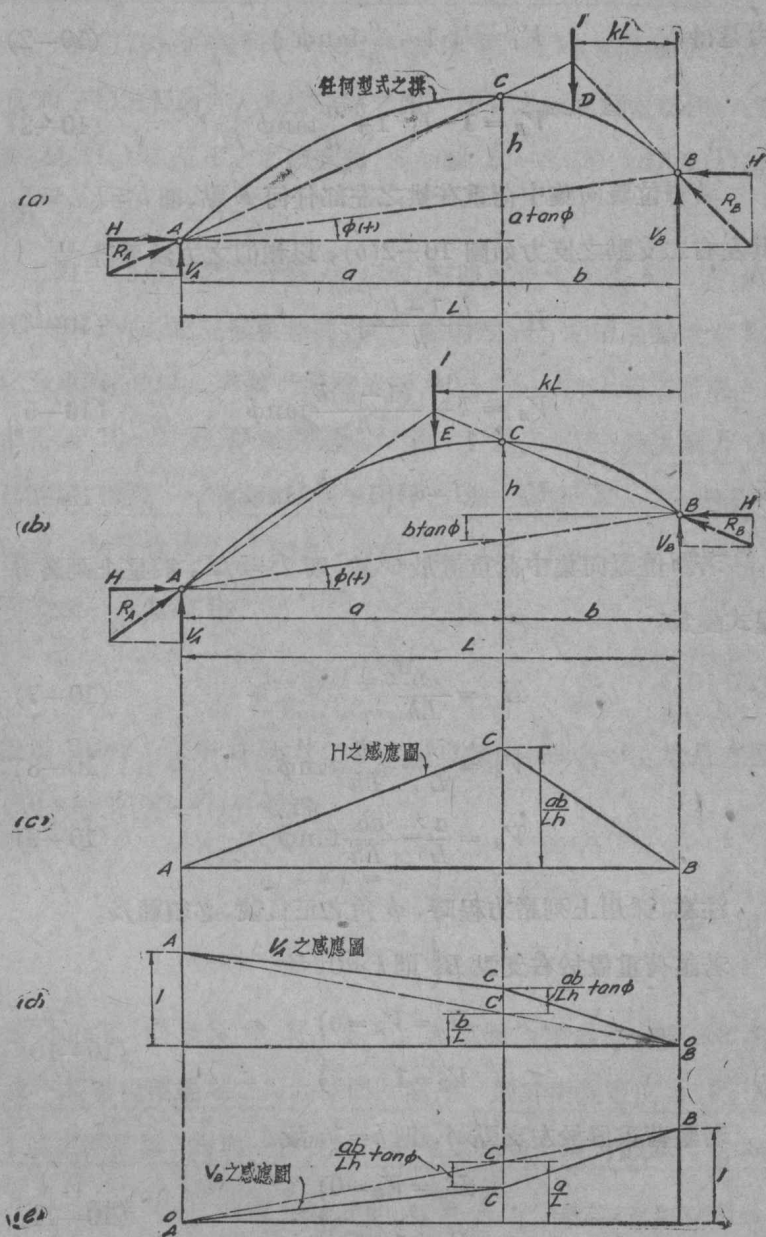


圖 10-2. 三鉸拱橋之反力感應圖

由是得, 
$$V_A = k \left( 1 + \frac{a}{h} \tan \phi \right) \quad (10-2)$$

$$V_B = 1 - k \left( 1 + \frac{a}{h} \tan \phi \right) \quad (10-3)$$

若單位豎向集中荷重在拱之左部任何  $E$  點, 即  $b \leq KL \leq L$ , 其左右二支點之反力如圖 10-2(b), 以相似之方法可得

$$H = \frac{b(1-k)}{h} \quad (10-4)$$

$$V_A = k + \frac{(1-k)b}{h} \tan \phi \quad (10-5)$$

及 
$$V_B = (1-k) \left( 1 - \frac{b}{h} \tan \phi \right) \quad (10-6)$$

若單位豎向集中荷重置於  $C$  鉸, 則  $k=b/L$ , 於是上列諸方程式變為,

$$H = \frac{ab}{Lh} \quad (10-7)$$

$$V_A = \frac{b}{L} + \frac{ab}{Lh} \tan \phi \quad (10-8)$$

$$V_B = \frac{a}{L} - \frac{ab}{Lh} \tan \phi \quad (10-9)$$

注意, 採用上列諸方程時,  $\phi$  角之正負號, 必須顧及。

若該荷重置於右支點  $B$ , 則  $k=0$ , 故

$$\left. \begin{aligned} H &= V_A = 0 \\ V_B &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (10-10)$$

若該荷重置於左支點  $A$ , 則  $k=1$ , 故

$$\left. \begin{aligned} H &= V_B = 0 \\ V_A &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (10-11)$$

方程(10-7)至(10-11),各係  $H, V_A$  及  $V_B$  感應圖於  $C, B$  及  $A$  三點之豎距。於該三點之間,所有之感應圖當然係一直線,故  $H, V_A$  及  $V_B$  之感應圖,各如圖 10-2 (c) (d) 及(e)所示。

設一簡單梁之跨長為  $L$ , 以  $C$  點將其分為  $a$  及  $b$  二段,與圖 10-2 (a)之三鉸拱相同,則  $C$  點彎矩  $M'_C$  之感應圖於  $C$  點之豎距為  $ab/L$ 。若將此值除以圖 10-2 (a)中  $C$  鉸之高度  $h$ , 即得圖 10-2 (c)  $H$  感應圖於  $C$  點之豎距。故三鉸拱橋  $H$  之感應圖, 等於一跨長相同簡單梁中  $C$  點之彎矩  $M'_C$  之感應圖, 除以  $C$  鉸之高度  $h$ 。因此, 方程(10-1), (10-4) 及 (10-7) 可寫成一方程如下:

$$H = \frac{M'_C}{h} \quad (10-12)$$

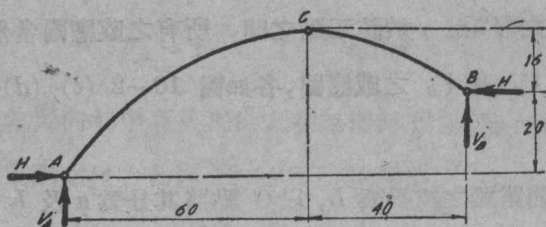
設圖 10-2 (a) 中  $A$  及  $B$  二鉸之高度相同, 則  $\phi=0$ , 於是方程(10-8)及(10-9)各變為

$$\left. \begin{aligned} V_A &= \frac{b}{L} \\ V_B &= \frac{a}{L} \end{aligned} \right\} \quad (10-13)$$

圖 10-2 (d)及(e)中  $V_A$  及  $V_B$  感應圖均變為一直線  $AC'B$ 。故三鉸拱橋兩端之二鉸如係同一高度, 則其兩端豎反力  $V_A$  及  $V_B$  之感應圖, 均與一跨長相同簡單梁兩端之反力感應圖相同。

習題 10-1. 設某三鉸拱橋中  $A, B$  及  $C$  三鉸之位置如附圖所示。求其平反力  $H$  及其豎反力  $V_A$  與  $V_B$  之感應圖, 及其全跨長有均佈荷重

$W$ /公尺時  $H$ ,  $V_A$  及  $V_B$  之值。



習題 10—1.

習題 10—2. 求習題 10—1 三鉸拱橋在中華二十級活荷重下反力  $H$ ,  $V_A$  及  $V_B$  之最大值。活荷重以每軌之重量計。

#### 10—4. 三鉸拱骨之彎矩, 切力, 與直接應力, 及其感應圖

如圖 10—3 (a) 所示, 無論拱骨某正截面  $D$  所受之總合應力  $R_D$  如何, 依圖 3—1 (a) 及 (b) 所示之方法, 可將此總合應力  $R_D$  分解為彎矩  $M_D$ , 切力  $T_D$ , 及直接應力  $N_D$ 。於任何荷重情形之下, 彎矩  $M_D$  可由荷重與拱一端之反力求之, 切力及直接應力可由正截面  $D$  之豎切力  $V_D$  及平壓力  $H_D$  求之。如圖 10—3 (b) 所示, 則

$$T_D = V_D \cos \theta_D - H_D \sin \theta_D \quad (10-14)$$

$$N_D = -(V_D \sin \theta_D + H_D \cos \theta_D) \quad (10-15)$$

方程 (10—15) 前有一負號, 因  $N_D$  係壓力。寫方程 (10—14) 及 (10—15) 時, 係假定  $V_D$  為正號切力,  $H_D$  為壓力。若  $V_D$  或  $H_D$  之指向與圖 10—3 (b) 所示者相反, 則  $V_D$  或  $H_D$  變為負號。此外截面  $D$  處拱軸切線之傾度為  $\theta$  時,  $\theta_D$  假定係正號, 若切線之傾為  $\searrow$  時,  $\theta_D$  係負號, 與前述  $\phi$  之正負號相同。

故採用上列二方程及以下之諸方程時，均須顧及  $\theta_D$  之正負號。

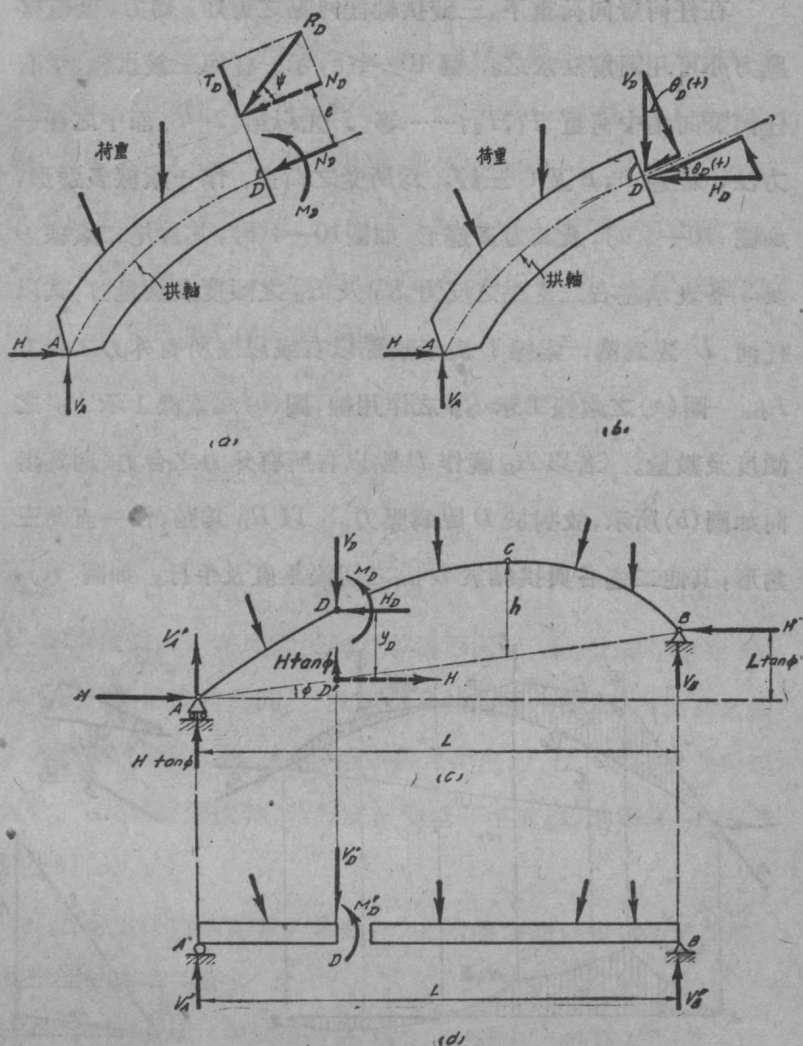


圖 10—8. 三鉸拱骨之彎矩切力及直接應力

反是，既知  $V_D$  與  $H_D$  或  $T_D$  與  $N_D$  之後，亦可求得總合應力