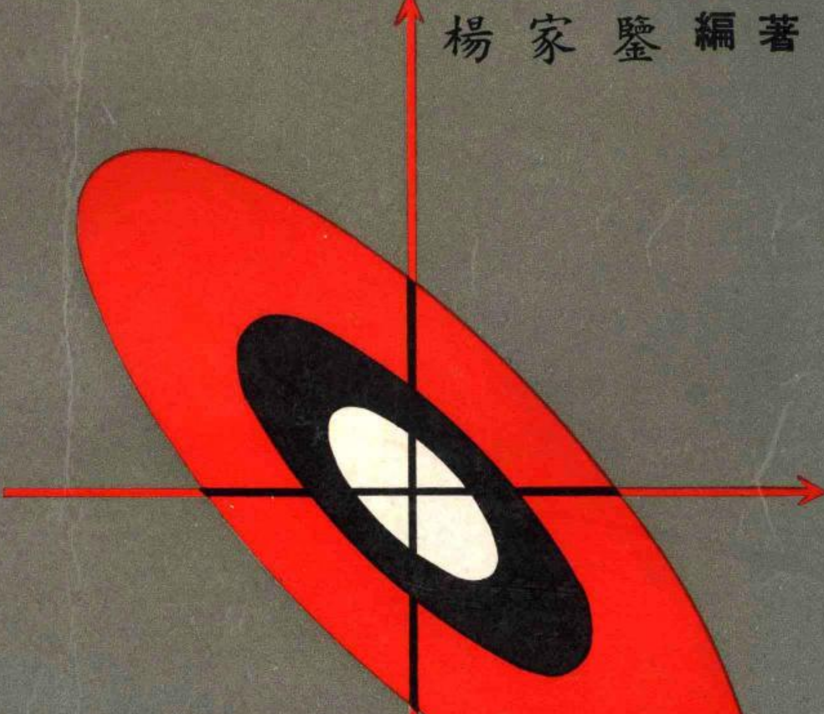
工程數學

上冊

楊家鑒編著



東華書局印行

工程數學

上　册

楊家鎣　編著

東華書局印行

中華民國六十一年九月初版
中華民國六十五年二月二版

數 學 (全二冊)

下冊 定價新臺幣六十元整

(外埠酌加運費滙費)

編著者	楊 家 鑒
發行人	卓 鑫 淼
出版者	臺灣東華書局股份有限公司 臺北市博愛路一〇五號
印刷者	中台印刷廠股份有限公司 (臺中市公園路三十七號)

內政部登記 內版臺業字第一〇三一號
(61039)

編 輯 大 意

一、本書主要是爲修完初等微積分課程的工程專科學生而寫的，提供作爲兩學期六至八學分的工程數學課程。但以其取材廣泛，實亦足夠作爲一般大專修習工程數學者的參考。

二、本書强調微分方程的解法，對於常微 方程的常用基本解法，絕大部份都集中於第二章至第六章；對於工程上常見的偏微分方程之基本解法，概集中於第十章至第十四章；他如向量分析，矩陣，複變函數，變分法，數值分析之基本原理與方法，亦均去蕪存菁，擇要闡述。

三、本書注重學習過程的「承先啓後」，乃將初等微積分課程的基本觀念濃縮於第一章，以備在進入工程數學之前，擁有充分的入門工具。

四、本書每章開始都有蘊含全章脈絡的流程圖，每一章節講解新觀念之前，都會直接或間接說明「學習目的與方法」。所以不僅提供明確的解法，亦常討論重要的基本理論。配合豐富而適當的例題與習題，務使讀者提綱挈領，事半功倍。

五、本書主要參考下列書籍，編輯而成。

1. Murray R. Spiegel "Advancсd Mathematics for Engineers and Scientists" 1971。
2. Morris Tenenbaum. Harry Pollard "Ordinary Differential Equations"
3. Erwin Kreyszig "Advanced Engineering Mathematics"

2nd. ed.

4. C.R. Wylie, JR. "Advanced Engineering Mathematics"

六、本書章節甚多，若因授課時間限制，可略去註有星號（*）之章節定理暨例題；本書附有答案及教師手冊，分別提供讀者研習及教學參考。

七、本書初版的完成，雖已竭盡心力，然而臨稿匆促，錯誤在所難免，如有發現或質疑，歡迎函詢指正，不勝感激。

編者 謹識

兩年來,編者於工程數學教學上教材取捨的困難,使編者有心編寫這一本書;卓鑫淼先生的讚助與鼓勵,使編者決心編寫這一本書。

王飛龍君犧牲七個多月的寒暑假,幫忙抄錄大部份資料;郭北方君幫忙爲其中大部份習題作解答。沒有兩位的幫忙,本書無法於今完成。

校對期間,有賴吳澤滄,童正霞,吳明星諸君撥空詳細驗算,予以校正,使本書得以減少漏誤,僅此銘謝。

編著 謹識

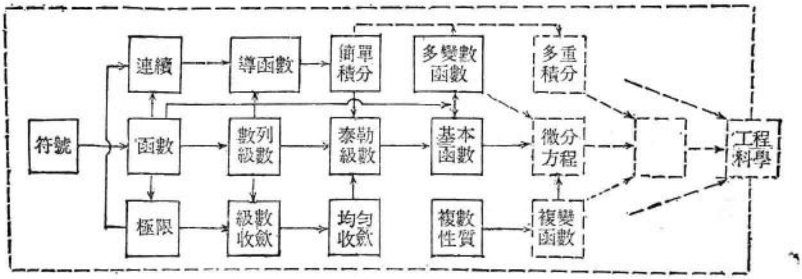
61年8月28日

工 程 數 學

上 冊 目 次

第 一 章

工程數學之基本觀念



——從知道的地方做起，往不知道的地方做去——

工程數學包括所有工程科學所需的數學方法，微積分學爲其主要基礎。在未深入探討工程數學之各層內涵之前，對於作爲探討工具的基本微積分學之各重點，宜作提綱挈領的複習，此乃本章目的所在。

本章計分九節，除首節擇要說明本書常用符號之記法與讀法外，其餘各節依序複習基本函數；微分與積分之要點與基本應用；無限級數之審歛；超越函數之以泰勒級數展開等等均是第四章常微分方程級數解法的踏脚石；複數之基本運算亦將應用於以後各章，行列式及克拉默法則，多變數函數之各種基本性質與運算均爲重要之基本課題。

（本章所述大半屬於微積分的簡要複習，若授課時間限制，可酌情省畧註＊號之部份）

§ 1-1 常用符號淺釋:

爲說明扼要及記載簡潔，一些邏輯符號在數學之演繹過程常扮演重要的角色。本節所列諸符號乃今後本課程經常出現者，以下以英文"*Definition*"之第一字母 ***D***，代表**定義**，$\boldsymbol{D}_1$，$\boldsymbol{D}_2$ 分別表示**定義一**，**定義二**，餘類推。

$\boldsymbol{D}_1$："$\forall$"表示"任意"，"所有"，"一切"。

例A："$\forall x$"表示"所有x"，"任意x"，或"一切x"

$\boldsymbol{D}_2$："$\exists$"表示"至少有一"。

例B："$\exists x$"表示"至少有一x"

$\boldsymbol{D}_3$："$\equiv$"表示"恒等"，或"同義"。

例C："$\sin^2 x+\cos^2 x\equiv 1$"表示"$\equiv$"號兩邊之式或值恒相等；"$P(x)\equiv Q(x)$"表示 $P(x)$ 與 $Q(x)$ 同義。

$\boldsymbol{D}_4$："$\Rightarrow$"表示"蘊含"，亦表"若…則…"。

例D："$p\Rightarrow q$"表示"p蘊含q"，"p之眞蘊含q亦爲眞"或"若p成立則q亦必成立"。p被稱爲q的充分條件，而q爲p的必要條件。(另一符號"$\rightarrow$"表示"趨近"，廣用於表示極限，如"$x\rightarrow a$"表示"x趨近a"，切勿混淆。)

$\boldsymbol{D}_5$："$\Leftrightarrow$"表示"互相蘊含"，"若且唯若···則···"。

例E："$p\Leftrightarrow q$"表示"p之爲眞與q之爲眞互相蘊含"，即"p成立則q成立，而q成立p亦必成立"，簡單的說，"若且唯若p成立則q成立"。換句話說，p爲q之充分且必要之條件，即 p,q 互爲彼此之充要條件。

D_6: "$\ni$"表示"使得"。

例F："$\exists x \in A$, $\ni$ $x \notin B$" 表 "至少有一屬於A之x使得該x不屬於B"。又如 "$\exists x \in (a, b) \ni f(x)=0$ 表示 "至少有一在a與b之間的x使得 $f(x)=0$"

D_7: "$\wedge$"表示"且"，"與"。

例G："$x-2=0 \wedge x \neq 3$" 意即 "$x-2=0$ 且 $x \neq 3$"

D_8: "$\vee$"表示"或"。

例H："$x-2=0 \vee x-3=0 \ni (x-2)(x-3)=0$" 表示 "$x-2=0$ 或 $x-3=0$ 使得 $(x-2)(x-3)=0$"；當然亦可表爲 "$x-2=0 \vee x-3=0 \Leftrightarrow (x-2)(x-3)=0$"

D_9: "且/或"，表示"或"或"且"。

例I："p 且/或 q" 表示 "p 或 q" 或 "p 且 q"

本節以下列例 **J** 作爲上列諸符號應用之說明。

例J：$(\forall x \in (a, b) \ni f'(x)$ 存在$) \Rightarrow \left(\exists x_0 \in (a, b) \ni f'(x_0)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)$

依上述諸符號之用法當讀之如下：

若"所有屬於 (a, b) 之x均使得 $f'(x)$ 存在"則"至少有一 x_0 屬於 (a, b) 使得 $f'(x_0)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$。"

練　習 1-1

試閱讀下列記述：

1. $$\left\{\begin{pmatrix} y=f(u), & u \in X_f \\ u=g(x), & x \in X_g \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} u_0=g(x_0) \ni \left(\dfrac{dy}{du}\right)_{u=u_0} \text{存在} \\ x_0 \in X_g \ni \left(\dfrac{du}{dx}\right)_{x=x_0} \text{存在} \end{pmatrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\left\{\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=x_0}=\left(\frac{dy}{du}\right)_{u=u_0}\left(\frac{du}{dx}\right)_{x=x_0},\ x_0\in X_g\right\}$$

2. (線 $x=a$ 為函數 f 之圖之垂直漸近線)

$\equiv\ (\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=\pm\infty\ \vee\ \lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\pm\infty)$

3. $f(x)$ 在 $[a,b]$ 為連續 $\Rightarrow \lim\limits_{\Delta x\to 0}\sum\limits_{i=1} f(x_i)\Delta x$ 存在

$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx$ 存在

$\Rightarrow f(x)$ 在 $[a,b]$ 為可積分

*§ 1-2 基本函數 (Elementary functions)

基本函數的定義與運算，雖為一般讀者所熟習，但為強調其重要的基本運算，本節有必要將之作一簡賅的復習。

D_1: 函數 f 是一種變數與變數之間的對應關係，使每一元素 $x\in X$ 和另一元素 $y\in Y$ 相對應。寫成 $y=f(x)$, $f(x)$ 稱為函數於 x 時的值。其中 x 稱為**自變數**，y 為**因變數**，X 為**定義域**，Y 為**值域**。

*例A: $f(x)=2x^3-3x+5\Rightarrow$

$$f(-1)=2(-1)^3-3(-1)+5=2(-1)+3+5=6;$$
$$f(0)=2(0)^3-3(0)+5=0+0+5=5;$$
$$f(x+h)=2(x+h)^3-3(x+h)+5$$
$$=2x^3+6x^2h+6xh^2+2h^3-3x-3h+5$$

D_2: 多項函數 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n$.

D_3: **指數函數 $f(x)=a^x$，此函數符合指數定律。**

*D: 對數函數 $f(x)=\log_a x$, a稱為對數的底, $a=e\Rightarrow f(x)$ 稱為自

然對數，寫成 $\ln x$，有下面性質或定理(以英文 ***property*** 或 ***principle*** 之第一字母 $\boldsymbol{P}$ 表示，$\boldsymbol{P}_1$，$\boldsymbol{P}_3$ 分別代表**性質一**，**性質二**，或**定理一**，**定理二**，餘類推。)

$$*\boldsymbol{P}_1:\ \ln(m\,n)=\ln m+\ln n;\ \ \ln\frac{m}{n}=\ln m-\ln n;$$

$$\ln m^p=p\ln m \qquad m\wedge n>0$$

＊證：令 $e^x=m \Rightarrow x=\ln m;\ e^y=n \Rightarrow y=\ln n,$

$$\because\ e^x\cdot e^y=e^{x+y} \Rightarrow mn=e^{x+y} \Rightarrow x+y=\ln(mn)$$

$$\therefore\ \ln(mn)=\ln m+\ln n$$

$$\because\ e^x/e^y=e^{x-y} \Rightarrow m/n=e^{x-y} \Rightarrow x-y=\ln(m/n)$$

$$\therefore\ \ln(m/n)=\ln m-\ln n$$

$$\because\ (e^x)^p=e^{xp} \Rightarrow m^p=e^{xp} \Rightarrow xp=\ln m^p$$

$$\therefore\ \ln m^p=p\ln m$$

$\boldsymbol{D}_5$：三角函數 $\sin x$，$\cos x$，$\tan x$，$\cot x$，$\sec x$，$\csc x$。

三角函數常見的幾個重要性質列之於下：

$$\boldsymbol{P}_2:\ \sin x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right),\ \cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right),\ \tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{1}{\tan x},\ \ \sec x=\frac{1}{\cos x},\ \ \csc x=\frac{1}{\sin x}$$

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1,\ \ \sec^2 x-\tan^2 x=1,\ \ \csc^2 x-\cot^2 x=1$$

$$\sin(-x)=-\sin x,\ \ \cos(-x)=\cos x,\ \ \tan(-x)=-\tan x$$

$$\sin(x\pm y)=\sin x\cos y\pm\cos x\sin y,$$

$$\cos(x\pm y)=\cos x\cos y\mp\sin x\sin y$$

$$\tan(x\pm y)=\frac{\tan x\pm\tan y}{1\mp\tan x\tan y}$$

例 B: 證明: (a) $\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$; (b) $\cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)$

證: $\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$ 令 $x=y \Rightarrow$

$\cos^2 x-\sin^2 x=\cos 2x$; $\cos^2 x+\sin^2 x=1$

將上述二式相減可得 (a); 相加可得 (b)。

例 C: 證明 $A\cos x+B\sin x=\sqrt{A^2+B^2}\sin(x+\alpha)$, $(\tan\alpha=A/B)$

證: (1) $A\cos x+B\sin x=\sqrt{A^2+B^2}\left[\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos x+\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin x\right]$

設 $\sin\alpha=\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$, $\cos\alpha=\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$

$\tan\alpha=\frac{A}{B}$

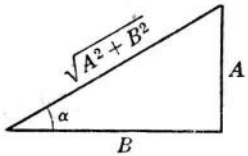


圖 1-1

如圖 1-1, 代入 (1) 得:

$$A\cos x+B\sin x=\sqrt{A^2+B^2}(\sin\alpha\cos x+\cos\alpha\sin x)$$
$$=\sqrt{A^2+B^2}\sin(x+\alpha)$$

可理可證 $A\cos x+B\sin x=\sqrt{A^2+B^2}\cos(x-\alpha)$

D_6: 反三角函數 $\sin^{-1}x, \cos^{-1}x, \tan^{-1}x, \cot^{-1}x, \sec^{-1}x, \csc^{-1}x$。

反三角函數的主值規定與其函數圖形可參閱東華本高中數學。

例D: $\sin x=y \Leftrightarrow x=\sin^{-1}y$, 其中 $x\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $y\in[-1, 1]$

D_7: 雙曲線函數 $\sinh x, \cosh x, \tanh x, \coth x, \operatorname{sech} x, \operatorname{csch} x$。

$$\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2};\quad \cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2};$$

$$\tanh x=\frac{\sinh x}{\cosh x}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}};\qquad \coth x=\frac{1}{\tanh x}=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$$

$$\operatorname{sech} x=\frac{1}{\cosh x}=\frac{2}{e^{x}+e^{-x}};\quad \operatorname{csch} x=\frac{1}{\sinh x}=\frac{2}{e^{x}-e^{-x}}$$

$\boldsymbol{P_3}$: $\cosh^2x-\sinh^2x=1$；$\operatorname{sech}^2x+\tanh^2x=1$；

$$\coth^2x-\operatorname{csch}^2x=1$$

$$\sinh(x\pm y)=\sinh x\cosh y\pm\cosh x\sinh y;$$

$$\cosh(x\pm y)=\cosh x\cosh y\pm\sinh x\sinh y;$$

$$\tanh(x\pm y)=\frac{\tanh x\pm\tanh y}{1\pm\tanh x\tanh y}$$

例E：證明 (a)$\cosh^2x-\sinh^2x=1$；（b）$\operatorname{sech}^2x+\tanh^2x=1$

證 (a)：$\cosh x=\frac{1}{2}(e^{x}+e^{-x})$，$\sinh x=\frac{1}{2}(e^{x}-e^{-x})$

$$\therefore\quad \cosh^2x-\sinh^2x=\frac{1}{4}(e^{x}+e^{-x})^2-\frac{1}{4}(e^{x}-e^{-x})^2$$

$$=\frac{1}{4}(e^{2x}+2+e^{-2x})-\frac{1}{4}(e^{2x}-2+e^{-2x})=1$$

(b)：將 (a) 所得的結果兩邊除以 $\cosh^2x$

$$\frac{\cosh^2x}{\cosh^2x}-\frac{\sinh^2x}{\cosh^2x}=\frac{1}{\cosh^2x}\ \Rightarrow\ 1-\tanh^2x=\operatorname{sech}^2x$$

$$\therefore\quad \operatorname{sech}^2x+\tanh^2x=1$$

例F：證明 $\cosh^{-1}x=\pm\ln(x+\sqrt{x^2+1})$

證：$y=\cosh^{-1}x\ \Rightarrow\ \cosh y=x=\frac{1}{2}(e^{y}+e^{-y})$

$\therefore\quad e^{y}+e^{-y}=2x\ \Rightarrow\ e^{2y}-2xe^{y}+1=0$　解 e^{y} 二次式

$$e^{y}=\frac{2x\pm\sqrt{4x^2-4}}{2}=x\pm\sqrt{x^2-1}$$

$$\therefore\quad y=\ln(x\pm\sqrt{x^2-1});$$

$$\Rightarrow\ \ln(x-\sqrt{x^2-1})=\ln\left(\frac{x^2-(x^2-1)}{x+\sqrt{x^2-1}}\right)=-\ln(x+\sqrt{x^2-1})$$

$\therefore\quad y=\cosh^{-1}x=\pm\ln(x+\sqrt{x^2-1})\quad x\geq 1$

練 習 1-2

1. $f(x)=(3x^2+2x-5)/(x-4)$，求：(a)$f(2)$，(b)$f(-1)$，(c)$f(3/2)$，(d)$f(-x)$ (e)$f(\sqrt{2})$。
2. 已知：若 $f(-x)=-f(x)$ 則 f 爲奇函數；若 $f(-x)=f(x)$ 則 f 爲偶函數。據此判斷下列各函數之奇偶性：(a) $\cos 2x$， (b) $\sin 3x$， (c) $\tan x$ (d) e^x， (e) e^x-e^{-x}， (f) e^x+e^{-x}
3. (a) 證明 $e^{a\ln b}=b^a$； (b) 求$e^{-2\ln x}$
4. 證明：(a) $\sin 3x=3\sin x-4\sin x^3$ (b) $\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x$
5. 證明：(a) $\coth^2 x-\operatorname{csch}^2 x=1$， (b) $\cosh^2 x+\sinh^2 x=\cosh 2x$ (c) $\sinh^{-1}x=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$
6. 若 $\cos x=8/17$，求：(a) $\sin 2x$， (b) $\cos 2x$， (c) $\sin(x/2)$

*7. 求 $\tan(\ln 3)$ 之函數值。

*§ 1-3 極限，連續與導函數

本節爲初等微積分之簡要縮影，所有定義公式或定理均可見於一般初等微積分課程。基本函數微分運算與極限值之求取可說是本節的主要目的。(本節所有 ϵ 及 δ 均表任意小之正數)

***D_1**：極限 (*limit*)：對於$\forall\epsilon>0$，恒對應 $\exists\delta>0\ni 0<|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-l|<\epsilon$，則稱 $x\to a$ 時 $f(x)$ 有一極限 l，寫成 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=l$

例A：$\lim\limits_{x\to 1}(x^2-4x+8)=5$；$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=4$；$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$