普通高等教育"十二五"规划教材

高等数学

(上册)

张明望 沈忠环 杨雯靖 主编

科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材

高等数学

（上册）

张明望　沈忠环　杨雯靖　主编

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书是根据编者多年的教学实践，吸收近年教学研究及教学改革的新成果，按照《高等数学课程教学基本要求》编写而成的. 分上、下两册出版. 上册内容为函数与极限、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、微分方程等六章. 下册内容为空间解析几何与向量代数、多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数等五章. 并在每章插入了利用 Mathematica 软件求解相关问题的内容. 书末附有习题答案与提示.

本书可作为高等院校理工科各专业高等数学课程的教材，也可供其他相关学科学生使用.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 上册 / 张明望，沈忠环，杨雯靖主编. —北京：科学出版社，2012.8
普通高等教育"十二五"规划教材
ISBN 978-7-03-035359-7

Ⅰ.①高… Ⅱ.①张… ②沈… ③杨… Ⅲ. ①高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 190125 号

责任编辑：杨瑰玉 冯桂层 / 责任校对：王望容
责任印制：彭 超 / 封面设计：苏 波

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

南京展望文化发展有限公司照排
武汉市新华印刷有限责任公司印刷
科学出版社出版 各地新华书店经销

*

2012 年 8 月第 一 版 开本：B5(720×1000)
2012 年 8 月第一次印刷 印张：19 3/4
字数：386 000

定价：35.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

《高等数学》编委会

主　编　张明望　沈忠环　杨雯靖

编　委　（按姓氏笔画排序）

朱永刚　杨雯靖　沈忠环　张小华

张明望　陈东海　陈将宏　陈继华

陈　勤　赵守江　赵克健　崔　盛

前 言

本书是为理工科各专业编写的教材，分为上、下两册. 上册包括一元函数微分学、一元函数积分学和微分方程，下册包括空间解析几何与向量代数、多元函数微分学、多元函数积分学和无穷级数论. 这些理论与方法为解决自然科学和工程技术领域的相关问题提供了有力的工具.

本书具有以下特点：

第一，按照精品课程教材的要求，努力反映国内外高等数学课程改革和学科建设的最新成果，从实例出发，引入微积分的一些基本概念，在保持数学学科本身的科学性、系统性的同时，简化了一些概念的叙述和繁琐的数学推理. 同时，对于那些学生必需的基本理论、基本知识和基本技能，我们则不惜篇幅，力求解说清楚，使学生容易接受和理解. 另外，本书还着重介绍了有关理论、方法在科学技术领域的应用，使学生了解数学与实际问题的紧密联系，以及学习数学对后续课程的重要性.

第二，第一章以张景中院士提出的非 ε 极限理论为基础展开编写. 所谓非 ε 极限理论，就是用科学严谨而又易于为学生接受的方式讲述极限概念的一种理论. 这种理论不讲述 ε 语言，讲述方式也不同于 ε 极限理论由极限到无穷小再到无穷大的次序，而是由无穷大到无穷小再到极限的次序来讲述极限理论. 我们的教学实践表明，教学效果良好.

第三，第五章将定积分的基本概念、基本计算方法以及定积分的应用等知识点整合在一起，使教材的结构得到优化.

第四，为了适应大学数学教学改革以及创新人才培养模式的要求，也为了将数学实验引入课堂，本书在每一章中，针对相关内容，引入了 Mathematica 进行微积分的基本计算，并且利用 Mathematica 强大的数值计算功能和图形功能，演示、验证了微积分的概念和理论.

第五，本书的习题按节配备，每章后面有总习题，总习题中有填空题、选择题、计算题以及证明题. 题目遵循循序渐进的原则，既注意到对基本概念、基本理论和基本方法的考查，又注重加强对概念的理解和一些解题技巧的训练. 另外，为了更好地与中学数学教学相衔接，本书将极坐标系简介作为附录，放在本书的最后.

本书不仅可供高等学校理工类学生作为教材使用,也可供其他学科学生选用或参考.

本书由张明望、沈忠环和杨雯靖主编.参加编写的主要人员有:朱永刚、赵克健、张小华,另外,崔盛、陈将宏等也参与了一部分后期的编写工作.全书由杨雯靖、沈忠环副教授负责统稿,张明望教授负责审阅.

三峡大学理学院、教务处和教材供应中心对本书的编写与出版给予了大力支持,对此我们表示衷心的感谢!

由于编者水平有限,书中难免有不妥甚至错误之处,敬请广大读者批评指正.

编　者

2012年5月

目　录

第一章　函数与极限

函数是现代数学的基本概念之一，是高等数学(微积分)的主要研究对象.极限概念是微积分的理论基础，极限方法是高等数学的基本分析方法，因此，掌握、运用好极限方法是学好高等数学的关键.连续是函数的一个重要性态.本章将介绍函数、极限与连续的基本知识和有关的计算方法，为今后的学习打下必要的基础.

第一节　函　　数

一、预备知识

1. 集合

集合是数学中的基本概念之一，几乎所有的数学分支都与集合密切相关，我们所学的这门课与实数集就是紧密相关的.虽然在这里只能给出其描述性定义，但这并不影响它在本课程及其他数学课程中的地位和作用.一般来讲，由事物组成的集体，无论它是由其成员直接表示出来的，还是由成员所具有的某些本质属性表示出来的，都称为集合.例如，能够说“正在这里听课的所有同学的集合”、“所有整数的集合”等.集合也常称为集.

若某事物 a 是集合 A 的一个成员，则称 a 为 A 的一个元素，记作 $a\in A$.若事物 a 不是 A 的元素，记作 $a\notin A$.显然，对于任一个集合 A 和任一元素 a，$a\in A$ 与 $a\notin A$ 有且仅有一个关系成立.

注　若一个集合只有有限个元素，就称为有限集；否则称为无限集.

一个集合认为是已知的，如果对任何事物能判断它是否属于这个集合.若能写出这个集合的所有元素，则可用一个括号将它们括起来表示这个集合，例如由元素 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 组成的集合，可记作

$$A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}.$$

例如，$A=\{1, 3, 7\}$，$B=\{11, 23, 45, 85, 77\}$.这种表示集合的方法称为枚举法.而对不易用枚举法表示的集合，通常用以下记号表示：设集合 A 是由某种性质

P 的元素 x 所组成，就记作

$$A=\{x \mid x\text{ 具有性质 }P\}.$$

例如，$\mathbf{N}=\{n|n\text{ 为自然数}\}$代表全体自然数组成的集合，$\mathbf{R}=\{x|x\text{ 为实数}\}$代表全体实数所组成的集合，$\mathbf{Z}=\{x|x\text{ 为整数}\}$代表全体整数所组成的集合，$\mathbf{Q}=\{x|x\text{ 为有理数}\}$代表全体有理数所组成的集合. 这种表示集合的方法称为描述法. 若集合 A 的任一元素都是集合 B 的元素，即若 $x\in A$，则 $x\in B$，称集合 A 是集合 B 的子集，记作 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$. 若 $A\subseteq B$ 且 $A\neq B$，则称集合 A 是集合 B 的真子集，记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$，例如

$$\mathbf{N}\subset\mathbf{Z},\quad \mathbf{Z}\subset\mathbf{Q},\quad \mathbf{Q}\subset\mathbf{R}.$$

若 $A\subseteq B$，且 $B\subseteq A$，则称集合 A 等于集合 B，记作 $A=B$.

不含任何元素的集合称为空集，记作$\varnothing$. 空集是任何集合的子集. 在研究具体问题时，若考虑的集合总是某个特定集合的子集，则称这个特定的集合为全集.

2. 区间与邻域

区间和邻域是以后常要用到的两个特殊数集. 区间分为有限区间和无限区间.

设 $a,\ b\in\mathbf{R}$，且 $a<b$，有限区间有以下几种形式：

(1) 开区间$(a,\ b)$，即数集 $\{x|a<x<b\}$；

(2) 闭区间$[a,\ b]$，即数集 $\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$；

(3) 半开半闭区间$[a,\ b)$与$(a,\ b]$，分别对应数集 $\{x|a\leqslant x<b\}$，$\{x|a<x\leqslant b\}$.

以上区间对应数轴上的一段线段，如图 1－1 所示.

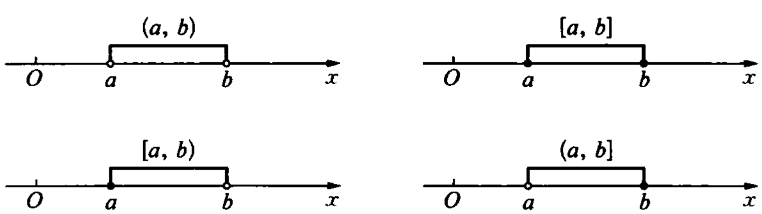

图 1－1

设 $a\in\mathbf{R}$，无限区间有以下几种形式：

(1) 无限开区间$(-\infty,\ a)$与$(a,\ +\infty)$，分别对应数集$\{x|x<a\}$与$\{x|x>a\}$，这里，记号$-\infty$和$+\infty$分别读作“负无穷大”和“正无穷大”；

(2) 无限闭区间$(-\infty,\ a]$与$[a,\ +\infty)$，分别对应数集$\{x|x\leqslant a\}$，$\{x|x\geqslant a\}$；

(3) 全体实数的集合 $\mathbf{R}$ 也常记作区间$(-\infty,\ +\infty)$，它在几何上对应整个

数轴.

以上无限开区间和无限闭区间在数轴上如图 1-2 所示.

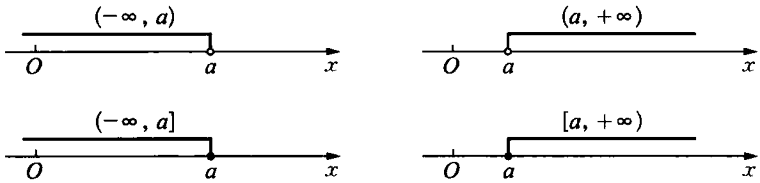

图 1-2

邻域也是一个经常用到的概念. 设 $a \in \mathbf{R}$，$\delta \in \mathbf{R}$ 且 $\delta > 0$，数集 $\{x \mid |x-a| < \delta\}$ 称为点 a 的 δ 邻域，记作 $U(a, \delta)$. 点 a 叫做该邻域的中心，δ 叫做该邻域的半径，如图 1-3.

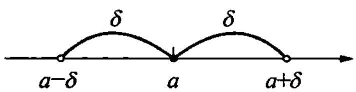

图 1-3

因为 $|x-a|$ 表示点 x 与点 a 的距离，所以 $U(a, \delta)$ 表示与点 a 距离小于 δ 的一切点 x 的集合. 点 a 的 δ 邻域去掉中心后，称为点 a 的去心邻域，记作 $\mathring{U}(a, \delta)$，即

$$\mathring{U}(a, \delta) = \{x \mid 0 < |x-a| < \delta\}.$$

为方便以后的应用，称数集

$$\{x \mid x < -a\} \cup \{x \mid x > a\} \ (a > 0)$$

为无穷邻域，记作 $U_a(\infty)$，它也是两个区间 $(-\infty, a)$ 与 $(a, +\infty)$ 的并集：$(-\infty, a) \cup (a, +\infty)$. 对应的两个区间 $(-\infty, a)$ 与 $(a, +\infty)$ 分别称为左无穷邻域与右无穷邻域，并分别记作 $U_a(-\infty)$ 和 $U_a(+\infty)$.

二、函数的概念

1. 变量与函数

在介绍函数概念之前，先来介绍变量. 所谓变量，就是在某一过程中可以取不同值的量. 相反，若在某一过程中保持不变的量称为常量. 通常用字母 a，b，c 等表示常量，用字母 x，y，z，u，v，t 等表示变量.

在自然现象中，对同一个问题，往往同时出现几个变量，而这些变量又是相互联系、相互依赖的. 以下就两个变量的情形举几个例子（多于两个变量的情形将在第七章讨论）.

例 1-1　在自由落体运动中，路程 s 随时间 t 的变化而变化，它们之间的依赖

关系由公式 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 表示,当 t 在$[0,+\infty)$内任意取定一个数值时,由上式就可确定 s 的相应数值.

例 1-2 设有半径为 r 的圆,考虑圆内接正 n 边形的周长 S_n(如图 1-4 所示),由初等数学知识易知 $S_n=2nr\sin\frac{\pi}{n}$,于是此式表达了圆内接正 n 边形周长 S_n 与边数 n 之间的相互依赖关系.

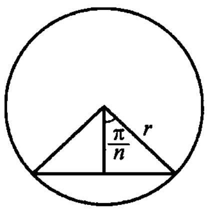

图 1-4

上面两个例子都反映了同一过程中有着相互联系的两个变量,当一个量在某个数集中变化时,按一定的规则,另一个量有唯一的一个值与它对应,函数概念正是从这一事实中抽象出来的.

定义 1-1 设 $\varnothing\subseteq D\subseteq\mathbf{R}$,若有一个对应规则 f,使得对于 D 内每一个实数 x,都能由 f 唯一地确定一个实数 y,则称对应规则 f 为定义在 D 上的一个函数,记为

$$y=f(x),\quad x\in D,$$

其中 x 称为自变量,y 称为因变量. 数集 D 称为函数的定义域,记为 $D(f)$. $f(x)$称为 x 所对应的函数值,全体函数值的集合称为函数的值域,记为 $R(f)$,即

$$R(f)=\{y\,|\,y=f(x),x\in D\}.$$

如上述例 1-1 中确定了一个定义在区间$[0,+\infty)$上的一个以 t 为自变量的函数,例 1-2 确定了数集 $\{n\,|\,n\in\mathbf{N},\ n\geqslant 3\}$ 上以 n 为自变量的函数.

注 如果一个函数是用一个数学式子给出的,则其定义域约定为使这个式子有意义的自变量所取值的全体. 所谓两个函数相同,是指它们有相同定义域和对应法则.

对函数 $y=f(x)$,任取 $x\in D(f)$,对应函数值 $y=f(x)$,这样,以 x 为横坐标、y 为纵坐标就确定了 xOy 平面上的一点,点集

$$C=\{(x,\ y)\,|\,y=f(x),\ x\in D(f)\}$$

一般描述出一条平面曲线,称为 $f(x)$的图形(如图 1-5).

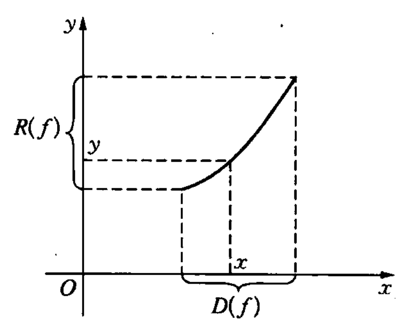

图 1-5

2. 函数的表示法

表示函数的方法主要有三种.

(1) 解析法. 当函数的对应法则用方程式给出时,称这种表示函数的方法为解析法(分析法). 如上述例 1-1 和例 1-2,这种方法是表示函数的主要方法.

有时一个函数在其定义域的不同部分用不同的解析式表示，如以下例子：

$$f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

此函数称为符号函数，其定义域 $D(f) = (-\infty, +\infty)$，值域 $R(f) = \{1, 0, -1\}$，见图 1－6.

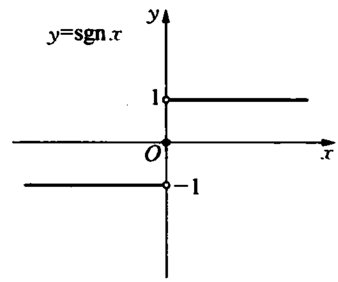

图 1－6

这种在自变量的不同变化范围中，对应法则用不同数学式子表示的函数，称为分段函数.

(2) 列表法. 若函数 $f(x)$ 可用一个含有自变量 x 与对应的函数值 $f(x)$ 的表格来表示，则称为列表法. 通常所用的三角函数表、对数表等可视为用列表法表达的函数.

(3) 图像法. 由图像给出函数的对应法则的方法称为图像法.

有些函数不能用上述三种方法表示，只能给予描述(参见下面的狄利克雷函数).

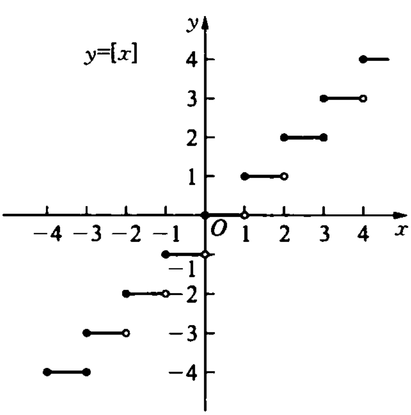

图 1－7

3. 几个特殊的函数

(1) 取整函数 $y = [x]$，其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数. 对于取整函数 $[x]$(见图 1－7)，可以证明：对任意的实数 x，有不等式

$$[x] \leqslant x < [x] + 1.$$

(2) 狄利克雷(Dirichlet)函数：

$$y = D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ 是有理数}, \\ 0, & x \text{ 是无理数}. \end{cases}$$

狄利克雷函数与我们初等数学中熟悉的函数有所不同，它不是用一个解析表达式给出的，也无法画出它的图形，但它的确反映了函数的本质：函数是变量与变量之间的对应关系.

三、函数的主要性质

1. 有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 $D(f)$，$D \subseteq D(f)$，若存在常数 M，对一切 $x \in D$，总

有 $f(x)\leqslant M(f(x)\geqslant M)$，则称 $f(x)$在 D 上有上界(下界)，称数 M 为它的上界(下界). 若函数 $f(x)$在 D 上既有上界又有下界，则称 $f(x)$是 D 上的有界函数，否则，称 $f(x)$是 D 上的无界函数. 因此，若 $f(x)$是 D 上的有界函数，则存在某正数 M，使得对一切 $x\in D$，恒有 $|f(x)|\leqslant M$ 成立.

例如，函数 $f(x)=\sin x$，$g(x)=\operatorname{sgn} x$ 在$(-\infty, +\infty)$上是有界函数，而函数 $f(x)=x^3$ 在$(-\infty, +\infty)$上是无界函数，函数 $f(x)=x^2$ 在$(-\infty, +\infty)$上仅有下界.

有界函数图像的特点是它完全落在平行于 x 轴的两条直线 $y=\pm M$ 之间.

2. 单调性

若函数 $f(x)$的定义域为 $D(f)$，$D\subseteq D(f)$，如果对任意 x_1，$x_2\in D$，且 $x_1<x_2$，都有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$ (或 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$)，则称函数 $f(x)$在 D 上是单调增加(或单调减少)的，或者称 $f(x)$在 D 上是单调递增(或单调递减)函数，单调递增和单调递减函数统称为单调函数.

若上述定义中的 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$ 换成 $f(x_1)<f(x_2)$，则相应地称函数 $f(x)$ 在 D 上是严格单调增加的，或者称 $f(x)$在 D 上是严格单调递增函数. 同样可以定义严格单调递减函数. 严格单调递增和严格单调递减函数统称为严格单调函数.

例如，函数 $y=x^2$ 在$(-\infty, 0)$上严格单调减少，在$(0, +\infty)$上严格单调增加，而在$(-\infty, +\infty)$上不是单调的，如图 1-8 所示. 函数 $y=x^3$ 在$(-\infty, +\infty)$上是严格单调增加的，如图 1-9 所示. 符号函数和取整函数均为递增函数，但不是严格单调递增函数.

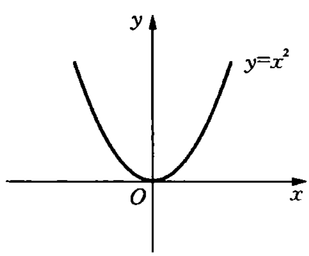

图 1-8

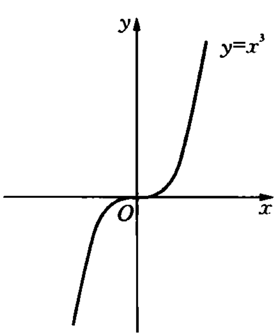

图 1-9

3. 奇偶性

设函数 $f(x)$的定义域 $D(f)$为关于原点对称的数集，即若 $x\in D(f)$，则 $-x\in D(f)$. 如果对于任一点 $x\in D(f)$ 有

$$f(-x)=f(x),$$

则称函数 $f(x)$是偶函数;如果对于任一 $x \in D(f)$，有

$$f(-x) = -f(x),$$

则称函数 $f(x)$是奇函数.

例如函数 $y = x^2$，$y = |x|$ 是偶函数;函数 $y = x^3$，$y = \operatorname{sgn} x$ 是奇函数;函数 $y = [x]$ 既不是奇函数也不是偶函数;既奇又偶的函数只有 $y = 0$.

奇函数的图像关于原点对称,偶函数的图像关于 y 轴对称,如图 1－10 和图 1－11 所示.

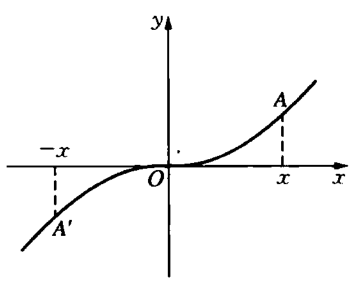

图 1－10

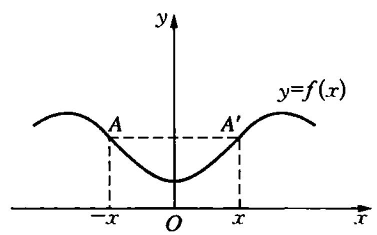

图 1－11

4. 周期性

设函数 $f(x)$的定义域为 $D(f)$,如果存在正数 T,使得对任意 $x \in D(f)$，有 $x \pm T \in D(f)$，且

$$f(x \pm T) = f(x)$$

成立,则称 $f(x)$为周期函数,称 T 为 $f(x)$的周期. 由定义知道,若 T 为 $f(x)$的周期,则 nT 也为其周期. 通常,称 T 为 $f(x)$的周期,是指 T 是 $f(x)$的最小正周期. 例如三角函数 $\sin x$，$\cos x$ 是以 2π 为周期的函数,三角函数 $\tan x$，$\cot x$ 是以 π 为周期的函数. 除三角函数外,还有许多其他周期函数,例如前面介绍的狄利克雷函数也是周期函数. 事实上,不难验证,任何正有理数都是它的周期.

周期函数在每个周期上的图形相同.

四、反函数与复合函数

1. 反函数

在函数的定义中,有两个变量,一个自变量,一个因变量. 然而在实际问题与数学问题中,哪个是自变量,哪个是因变量,并不是绝对的,应按所研究的具体问题而

定.例如,自由落体运动,其运动方程为

$$s=\frac{1}{2}gt^2,\quad t\in[0,\ T],\tag{1-1}$$

其中 g 为常量,于是由时间 t 可算出路程 s.可是,如果问题是由路程 s 来确定所需要的时间 t,那么就要由(1-1)解出 t,把它表示为 s 的函数

$$t=\sqrt{\frac{2s}{g}},\quad s\in[0,\ H],\tag{1-2}$$

这里 H 是物体开始下落时与地面的距离.

这表明,在一定的条件下,函数的自变量与因变量可以相互转化.这样得到的新函数,就称为原来那个函数的反函数,例如(1-2)是(1-1)的反函数.

定义 1-2 设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $D(f)$,值域为 $R(f)$,若对每一个 $y\in R(f)$, $D(f)$ 中有唯一值 x 使得 $f(x)=y$,于是在 $R(f)$ 上确定了一个函数,此函数称为函数 $y=f(x)$ 的反函数,记作

$$x=f^{-1}(y),\quad y\in R(f).\tag{1-3}$$

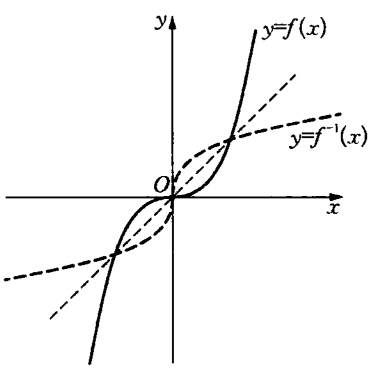

图 1-12

注 若 $y=f(x)$ 有反函数,则按 f 建立了 $D(f)$ 与 $R(f)$ 之间的一一对应关系.

由定义可知,$f(x)$ 也是函数 $f^{-1}(y)$ 的反函数,或者说它们互为反函数,而且前者的定义域与后者的值域相同,前者的值域与后者的定义域相同.

由于习惯上用 x 表示自变量,用 y 表示因变量,故式(1-3)又常记为

$$y=f^{-1}(x),\quad x\in R(f).\tag{1-4}$$

因为式(1-3)与式(1-4)有相同的定义域 $R(f)$ 和相同的对应关系 f^{-1},故它们表示同一函数.

在同一坐标系中,$y=f(x)$ 的图像与 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称,见图 1-12.

2. 复合函数

先看一个实例,运动物体的动能是速度的函数:$E=\frac{1}{2}mv^2$,而速度 v 又是时

间 t 的函数，对于自由落体运动，这个函数是 $v=gt$，于是动能 E 是时间 t 的函数 $E=\frac{1}{2}mg^2t^2$.

一般地，两个函数的复合函数的定义如下：

定义 1-3　设 $y=f(u)$，$u\in D(f)$ 和 $u=\varphi(x)$，$x\in D(\varphi)$ 是两个已知函数，且 $D(f)\cap R(\varphi)\neq\varnothing$，则称函数

$$y=f[\varphi(x)],\quad x\in\{x\mid\varphi(x)\in D(f)\}$$

为由函数 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数，其中 $f(u)$ 称为外层函数，$\varphi(x)$ 称为内层函数，y 称为因变量，x 称为自变量，而 u 称为中间变量.

由定义可知，复合函数 $f[\varphi(x)]$ 的定义域为 $\{x\mid\varphi(x)\in D(f)\}$. 例如 $y=u^2$，$u=\sin x$，得复合函数 $y=\sin^2 x$，其定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

当且仅当 $D(f)\cap R(\varphi)\neq\varnothing$ 时，两个函数才能进行复合，如 $y=\arccos u$，$u\in[-1,1]$ 与 $u=2+x^2$，$x\in(-\infty,+\infty)$ 就不能进行复合.

一般地，书写复合函数时不一定写出其定义域，默认对应的函数链顺次满足构成复合函数的条件. 函数也可以由三个或者三个以上函数复合而成. 例如，$y=\sqrt{u}$，$u=\tan v$，$v=\frac{x}{2}$，则得复合函数 $y=\sqrt{\tan\frac{x}{2}}$.

与函数复合过程相反，有时需要分析所给函数可看成由哪些函数的复合而成，例如 $y=\sqrt{1-x^2}$ 可以看做两个函数 $y=\sqrt{u}$，$u=1-x^2$ 复合而成；$y=\sqrt{1+\sin^2 x}$ 可以看做三个函数 $y=u^{\frac{1}{2}}$，$u=1+v^2$，$v=\sin x$ 复合而成.

五、初等函数

中学数学课程中已经讨论过下列几类函数：

(1) 幂函数 $y=x^\alpha$ (α 为常数)；

(2) 指数函数 $y=a^x$ ($a>0$，$a\neq 1$)；

(3) 对数函数 $y=\log_a x$ ($a>0$，$a\neq 1$)，在科技中常用的以 e 为底的对数函数 $y=\log_e x$ 叫做自然对数函数，简记作 $y=\ln x$；

(4) 三角函数有 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=\cot x$，$y=\csc x$，$y=\sec x$ 等；

(5) 反三角函数有 $y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\operatorname{arccot} x$ 等.

以上五类函数统称为基本初等函数. 虽然在中学已经学过它们的概念、性质及其图像，但在高等数学中仍然非常重要，且影响深远.

由常数及基本初等函数经过有限次的加、减、乘、除四则运算或有限次的函数