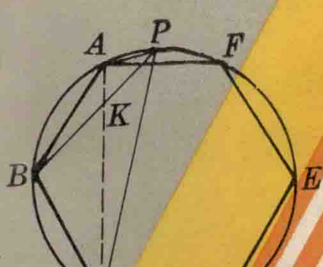
怎样学好数学

数学学习与思考

（初中版）



上海教育出版社

怎样学好数学

数学学习与思考

（初 中 版）

上 海 市 大 同 中 学　姚善源
上海市卢湾区教育学院　周继光　编

上海教育出版社

怎样学好数学
数学学习与思考
（初 中 版）
上 海 市 大 同 中 学　姚管源
上海市卢湾区教育学院　周继光　编
上海教育出版社出版发行
（上海永福路 123 号）
各地新华书店经销　　上海崇明印刷厂印刷
开本 787×1092 1/32　印张 9　字数 197,000
1990 年 10 月第 1 版　1990 年 10 月第 1 次印刷
印数 1—5,700 本
ISBN 7-5320-2025-8/G·1965　定价：2.55 元

前　言

数学是一门逻辑性很强的学科，具有严密、精确的特点．学习数学不仅是为了获得丰富的数学知识，更重要的是为了锻炼我们的思维能力．通过分析和综合、抽象和概括、推理和归纳，能使我们掌握思考问题的逻辑步骤和方法．马克思曾把数学赞为“锻炼大脑的体操”．然而现在不少同学还很不重视这种特殊体操的作用，遇到问题，不敢问，也不会想，采取绕道走的办法，久而久之，大脑的思维功能将受到抑制，严重影响学生的良好的思维品质的形成．为了指导数学学习和思考的方法，帮助初中学生学好数学，我们编写了这本小册子．

在编写过程中，我们注意了以下几点：

一、以思维训练为主线，知识联系为纽带．本书以现行大纲和课本为依据，针对初中学生的学习实际，把初中数学的内容按其内在联系划分成十八单元、四十节，对知识不面面俱到，侧重于揭示知识的联系，方法的归纳，错误的辨析，规律的点拨，努力把变化、联系的观点，分析、转化的方法贯穿全书．

二、与学生认知过程同步，启发学生多想多思．本书的每一节分“想”、“查”、“练”三个栏目，保证读者有学习与思考的主动权．“想”和“查”中分别穿插指点和评析，充分发挥本书的指导作用．

“想”中提出几个富有思考性的问题，着重揭示概念的联系，辨析容易混淆的概念，有重点、有针对性地加以指点，加强前后知识的联系和渗透，力求使知识结构化．

“查”中提出一些典型性、针对性较强的题目，着重于解题思路的分析，对重要的、常用的方法及常见的错误加以评析、归纳和小结，力求起到点拨思维的作用.

“练”中给出一些不同层次的习题，供读者进一步学习与思考. 这些习题一般都不太难，但都有一定的思维量，编排时既注意按由易到难的次序，又尽量使同一题型或有联系的习题相对集中，力求使读者每解一题都有所得.

三、适应不同层次需要，利于因材施教. 本书按大多数学生的知识水平编选内容和习题，为了适应部分思维灵活的学生的需要，每一节都安排几道有一定难度的问题供选用. 在“初中数学综合题选讲”中精选了15个例题、35个习题，这些习题知识容量大、综合性强，对沟通初中数学各分支的横向联系、开阔读者的思路有一定的作用.

本书可供初中学生学习数学时参考，对某些当时还没有学过的内容可以暂时跳过去，待以后回过头来再研究. 本书特别适合初三毕业生总复习时回顾、小结用. 如果教师把本书作为毕业总复习材料，应注意从实际出发，选择适当的内容.

我们希望使用本书的读者都有所得益，但是限于水平，我们的意图未必都能实现. 又因为成书时间仓促，错误不当之处在所难免，祈盼专家、同行及广大读者批评指正.

编　者

一九八九年十二月

目　录

第一章 数 和 式

一 实 数

1 实数的概念

【想】

1. 把我们已经学过的数列成下表对吗?

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{正有理数——小学里学过的数}\\ \text{负有理数}\\ 0\end{cases}\\ \text{无理数}\begin{cases}\text{正无理数}\\ \text{负无理数}\end{cases}\end{cases}$$

2. $-a$ 一定是负数吗?

3. 实数 x 在增大时,它的相反数在增大还是在减小?它的绝对值呢?

指点

在初中阶段,我们先后引进了负有理数和无理数,建立了实数的概念. 在学习实数时应重点掌握以下两点:

1. 要掌握实数分类的方法. 把实数分类,应按一定的标准,做到"不遗漏"和"不重复". 我们知道,凡实数都可以用小数形式来表示.例如 $2=2.0$, $\frac{2}{5}=0.4$, $\frac{1}{3}=0.\dot{3}33\cdots$, $\sqrt{2}=1.414\cdots$. 有限小数、无限循环小数是有理数;无限不循环小数是无理数(注意无限小数不一定都是无理数). 有理数都可以表示为分数形式,无理数则不能. 因此,可以先把实数分

成有理数和无理数两大类，再把每一类按“正”和“负”分类；也可以先把实数按“正”和“负”分成正实数、负实数和零，再把前两类按有理数和无理数来分类. 通过实数分类，即列出实数的数系表，可以帮助我们对各类实数间的从属关系了解得更清楚. 在第1题的数系表中，有理数的分类漏列了零. 零是有理数，但零既不是正有理数，又不是负有理数，这一点在解题中也比较容易被疏忽.

目前我们遇到的式子的值一般都是实数，对用式子形式表示的实数不能仅仅从形式上去判断它们表示什么数. 如 $\sqrt{4}$、$\sqrt[3]{8}$ 等就是有理数，所以带根号的式子的值可能是无理数也可能是有理数. 带负号的式子的值也不一定是负数. 如当 a 是负数和零时，$-a$ 就表示正数或零. 这里的“$-$”仅表示“相反”的意思，即 $-a$ 表示 a 的相反数. 同样，不带负号的式子的值也不一定都是正数，如 $\lg 0.1=-1$，$\cos 120°=-\frac{1}{2}$ 等.

2. 由于实数和数轴上的点是一一对应的，因此我们可以利用数轴来理解相反数、绝对值等重要概念和实数大小比较的法则. 在数轴上，原点表示数零；实数 $a(a\neq 0)$ 在数轴上表示的点到原点的距离，就是 a 的绝对值；实数 $a(a\neq 0)$ 和它的相反数 $-a$ 在数轴上表示的点在原点的两旁，并且与原点的距离相等，即它们关于原点对称. 根据以上所述，容易说明任何一个实数的绝对值总是非负数；两个数的绝对值相等，这两个数不一定相等，也可能是互为相反数. 可见，有了数轴，形和数可以更加紧密地结合起来. 例如第3题，由于在数轴上表示的两个实数，右边的数总比左边的数大，因此当实数 x 在增大时，表示这个数的点在数轴上向右移动，那么想一想这个点关于原点的对称点怎样移动，以及这个点到原点的距离

怎样变化，就不难得出结论．总之，数轴是我们研究实数的有力工具．它直观、形象，有利于“形数结合”，我们要学会应用它．

【查】

1．在实数$-\frac{1}{2}$，0，π，3.14，$0.333\cdots$，$0.303003\cdots$，$\sqrt{9}$，$\sqrt{10}$，$\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$，$\lg\sqrt{10}$，$\cos 30°$，$\sin 150°$中，哪些是有理数？哪些是无理数？

2．小于3的正整数有哪些？绝对值小于3的整数有哪些？绝对值不大于3的整数有哪些？

3．化简：

(1) $|\sqrt{3}-2|$．

(2) $|x-2|+\left|x+\frac{1}{2}\right|$（其中$0<x<1$）．

4．比较大小：$-\frac{\sqrt{2}}{2}$和$-\frac{\sqrt{3}}{3}$．

5．在下列各组实数里，哪些互为相反数？哪些互为倒数？

$-(-2)$和$-|-2|$，　　-0.3和$-3\frac{1}{3}$，

$\lg 2$和$\lg\frac{1}{2}$，　　$5^{\frac{1}{2}}$和$5^{-\frac{1}{2}}$．

6．(1) 什么数的倒数等于它本身？

(2) 哪些数的相反数减去它本身的差比1大？

评析

1．正确理解实数的有关概念是解题的基础．例如，根据绝对值的定义求一个数的绝对值时，首先要确定这个数是正数还是负数或零，不能轻易把绝对值符号去掉．如第3(1)题，$|\sqrt{3}-2|$的值不是$\sqrt{3}-2$，应是$2-\sqrt{3}$．因为负数的绝对值是它的相反数．同样，化简含绝对值符号的式子时，也要先

确定绝对值符号内式子的值是正数还是负数，然后根据绝对值定义化去绝对值符号，进行计算才能得出结果. 如第3(2)题，根据题目条件 $0<x<1$，可知 $x-2<0$，$x+\frac{1}{2}>0$. 于是

$$\begin{aligned}|x-2|+\left|x+\frac{1}{2}\right|&=-(x-2)+\left(x+\frac{1}{2}\right)\\&=-x+2+x+\frac{1}{2}=2\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

2．实数的概念与其他代数知识是密切相关的. 例如，要判断第1题中这些数是有理数还是无理数，就需要用到根式、对数及三角函数等有关知识. 有些问题，用其他代数知识来解比仅仅用实数的有关概念、法则来解要容易得多. 例如，第4题比较 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 和 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 大小，可以应用法则"两个负数绝对值大的反而小"进行比较外，还可以应用不等式的基本性质进行比较. 在得出 $\frac{\sqrt{2}}{2}>\frac{\sqrt{3}}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}>\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$后，在不等式两边同乘以 -1，即得

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}<-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

第5题除通常根据相反数和倒数的定义直接判别外，还可以根据"$a+b=0\Leftrightarrow a$、b 互为相反数；$a\cdot b=1\Leftrightarrow a$、$b$ 互为倒数"来判别. 如由 $\lg 2+\lg\frac{1}{2}=0$ 推出 $\lg 2$ 与 $\lg\frac{1}{2}$ 互为相反数. 第6题若直接根据相反数或倒数概念进行思考比较困难，且容易疏漏某些答案. 如第6(1)题，只得出1而疏漏了 -1. 若把问题转化成解方程或解不等式的问题，不仅有助于问题的解决，而且还能使我们掌握的知识更加充实，并对这些概念、法则的认识更进一步. 又如第6(2)题，设所求的数为 x，根据

相反数的概念列出不等式$-x-x>1$,解得$x<-\frac{1}{2}$,即可得出比$-\frac{1}{2}$小的数都符合题意的结论.

【练】

1. 写出符合下列条件的实数:

(1) 既不是正数,又不是负数的数是________.

(2) 绝对值最小的实数是________.

(3) 比-0.358小的最大整数是________.

(4) 既不是正数,又不是整数的有理数是________.

(5) 既不是正数,又不是整数的实数是________.

(6) 不小于-2的负整数是________.

2. 用不等号连接下列各组数:

(1) $-\frac{2}{5}$____$-\frac{2}{7}$.

(2) $-\sqrt{3}$____-1.73.

(3) $\sqrt{0.1}$____$\lg 1$.

(4) 2^{-1}____-0.2.

(5) $\cos 59°$____$\cos 95°$.

(6) $|a|$____0. (a为无理数)

3. 当a是什么数时,下列等式成立:

(1) $a=-a$.　　(2) $|a|=|-a|$.

(3) $\frac{|a|}{a}=1$.　　(4) $|a|+a=0$.

4. (1) 数轴上到原点的距离是5个单位的点表示什么数?

(2) 如果$|x|=5$,那么$x=$________.

5. (1) 什么数小于它的绝对值?

(2) 一个数能大于它的绝对值吗?为什么?

6. (1) 如果$\lg a$和$\lg b$互为相反数，那么a、b两数有什么关系？

(2) 如果2^m和2^n互为倒数，那么m、n两数有什么关系？

2 实数的运算

【想】

1. 在实数范围内，实数a^2能不能开平方？如果能，a^2的平方根是什么？算术平方根是什么？

2. 你能说出下列运算错在哪里吗？

(1) $\frac{6}{7}+\frac{1}{7}\div\frac{1}{8}=1\div\frac{1}{8}=8$.

(2) $-625\div5\times\frac{1}{5}=-625\div1=-625$.

3. 怎样计算$7.2^8\div3.6^8$比较简便？

指点

1．进行实数运算时，对运算结果的存在性和唯一性应予以注意．在实数范围内，加法、减法、乘法(包括乘方)和除法(除数不为零)总是可以实施的，其结果是唯一确定的；开方则不同，以开平方为例，负数就没有平方根，只有非负实数才能够开平方，而且其结果也并不唯一．任何一个正数有两个平方根，它们互为相反数．由于a^2总是非负数，所以a^2能开平方，它的平方根是$\pm a$．对一个正实数的两个平方根，我们把其中正的那个平方根叫做算术平方根．有人以为a^2的算术平方根是a即$\sqrt{a^2}=a$，那就错了．因为算术平方根总是非负数，而a不一定表示非负数，所以a^2的算术平方根应该是$|a|$．具体地说，当$a\geqslant0$时，a^2的算术平方根是a；$a<0$时，a^2的算术

平方根是$-a$. 这就是根式中一个很重要的公式:

$$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a & (a\geqslant 0),\\ -a & (a<0).\end{cases}$$

这里要特别强调:"$\sqrt{a}$"并不表示"a开平方",它表示非负实数a的算术平方根. 对于$\sqrt{a}$要注意三点: (1) "$\sqrt{\ }$"是一个运算符号,如同符号"+"、"−"、"·"、"÷"一样; (2) 被开方数a必须是非负数; (3) $\sqrt{a}$其实是$+\sqrt{a}$省略了"+"号. 因此算术平方根的全部含义都包含在$\sqrt{a}$ $(a\geqslant 0)$中. 由此可见,学习二次根式$\sqrt{a}$,关键在于弄清算术平方根的概念和性质.

2. 实数运算是一切运算的基础. 除了掌握实数的各种运算的法则外,还须注意运算的顺序. 一般应先算乘方、开方(第三级运算), 再算乘除(第二级运算), 最后算加减(第一级运算); 对同级运算, 则从左到右依次进行; 如有括号,一般先算括号里面的. 第2题的错误都在于没有按照上述正确的运算顺序进行计算而造成的. 请读者自行改正. 正确的答案是2和-25.

3. 在实数运算中,要善于灵活应用代数式恒等变形的知识. 例如,按规定的顺序计算 $7.2^8\div 3.6^8$ 将非常麻烦, 如果反过来应用分式的乘方性质: $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$,即应用

$$a^n\div b^n=\left(\frac{a}{b}\right)^n$$

将原式转化为计算$(7.2\div 3.6)^8$, 就简便得多. 这道题给我们一个启示: 必要时可以适当改变运算的顺序,使计算简便. 为此需要采用适当的方法将计算的式子变形. 因为数的运算是式的运算的特例, 所以可应用代数式有关的性质和公式对式子进行恒等变形,以达到简化数的计算的目的.

【查】

1．填空：

(1) 已知正数 M 的一个平方根是 m(这里 $m<0$)，那么 $\sqrt{M}=$________.

(2) ________的平方根等于它本身，________的算术平方根等于它本身.

2．计算：

$-3^2-[(3-0.5^3\times3)\div(-3)^2-|-3|]$.

3．查表计算：

$-99.23^2-(-21.51)^3-\sqrt[3]{-8810}-|-\sqrt{8001}|$.(结果精确到 1)

4．计算：

(1) $517.8\times(-243.2)+5178\times4.32$.

(2) $-240\times\left[-3\frac{1}{2}-2\frac{2}{3}+10\frac{7}{12}-4\frac{5}{6}\right]$.

5．计算：

(1) $(-0.75)^5\times\left(-\frac{8}{9}\right)^3\div(-0.625)$.

(2) $\sqrt{25.5^2-10.8^2}$.

6．已知样本为 54, 48, 52, 50, 51，求这个样本的平均数、方差和标准差.

评析

进行实数混合运算时，除了正确应用有关法则按规定的顺序进行运算外，还应注意以下几点：

1．算式中如果有括号(如第 2 题)，可以先算括号里的，"从里到外"顺次去掉括号(如解法一)，也可以按多项式的去括号法则先去括号再计算(如解法二).读者可以作一比较，哪一种解法比较简便，并想一想为什么.

解法一　$-3^2-[(3-0.5^3\times3)\div(-3)^2-|-3|]$

$$=-9-\left[\left(3-\frac{3}{8}\right)\div 9-3\right]$$

$$=-9-\left(\frac{21}{8}\div 9-3\right)$$

$$=-9-\left(\frac{7}{24}-3\right)$$

$$=-9-\left(-2\frac{17}{24}\right)$$

$$=-6\frac{7}{24}.$$

解法二 原式$=-9-\left[\left(3-\frac{3}{8}\right)\div 9-3\right]$

$$=-9-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{24}-3\right)\text{(应用乘法分配律)}$$

$$=-9-\frac{1}{3}+\frac{1}{24}+3$$

$$=-6-\frac{7}{24}\text{(应用加法交换律和结合律)}$$

$$=-6\frac{7}{24}.$$

2．应用运算定律和运算性质，能使计算简便．如第 **4(1)** 题，应用乘法分配律在算式中提取公因数 517.8，确实能使计算简便，但须注意应用恰当，否则达不到简化计算的目的．如第 4(2) 题像解法一那样应用乘法分配律并不简便，而解法二在恰当的地方运用分配律，就显出它的优越性了，读者可以作一比较．

解法一 $-240\times\left(-3\frac{1}{2}-2\frac{2}{3}+10\frac{7}{12}-4\frac{5}{6}\right)$

$$=-240\times\left(-\frac{7}{2}\right)-240\times\left(-\frac{8}{3}\right)$$

$$-240\times\frac{127}{12}-240\times\left(-\frac{29}{6}\right)$$

$$=840+640-2540+1160$$

$$=2640-2540$$

$$=100.$$

解法二

$$原式=-240\times\left(1-\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{7}{12}-\frac{5}{6}\right)$$

$$=-240\times\left(1-2+\frac{7}{12}\right)(应用加法结合律)$$

$$=-240\times(-1)-240\times\frac{7}{12}(应用乘法分配律)$$

$$=240-140$$

$$=100.$$

3．应用指数法则、乘法公式及因式分解也能使计算简便．如计算 98^2，可以把原式写成 $(100-2)^2$，应用乘法公式进行计算；也可以把原式写成 $98^2-2^2+2^2$，应用因式分解进行计算即 $98^2=(98-2)\times(98+2)+4$．计算与 10^n 接近的数的平方，用这两种方法计算都很简便．第 5 题应用上述法则和公式，可大大简化计算．具体解法如下：

(1) $$原式=-\left(\frac{3}{4}\right)^5\times\left(\frac{8}{9}\right)^3\times\frac{10^3}{5^4}$$

$$=-\frac{3^5}{2^{10}}\times\frac{2^9}{3^6}\times\frac{2^3\times5^3}{5^4}$$

$$=-\frac{2^2}{3\times5}$$

$$=-\frac{4}{15}.$$

(2) $$原式=\sqrt{(25.5+10.8)(25.5-10.8)}$$

$$=\sqrt{36.3\times14.7}$$