

■ 面向应用型高等院校“十二五”规划教材

# 结构力学（下） 练习与测试

◎主 审 范钦珊

◎主 编 宋林辉 张丽华

赵 桐 蔡 晶

STRUCTURAL MECHANICS



南京大学出版社

■ 面向应用空间与力学 “一五” 规划教材

# 结构力学（下） 练习与测试

◎主 审 范钦珊

◎主 编 宋林辉 张丽华  
赵 桐 蔡 晶



南京大学出版社

## 图书在版编目(CIP)数据

结构力学(下)练习与测试 / 宋林辉等主编. —南京: 南京大学出版社, 2012. 8

面向应用型高等院校“十二五”规划教材

ISBN 978-7-305-10463-3

I. ①结… II. ①宋… III. ①结构力学—高等学校—习题集 IV. ①0342-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2012) 第 200827 号

出版发行 南京大学出版社  
社 址 南京市汉口路 22 号 邮编 210093  
网 址 <http://www.NjupCo.com>  
出 版 人 左 健

丛 书 名 面向应用型高等院校“十二五”规划教材  
书 名 结构力学(下)练习与测试  
主 编 宋林辉 张丽华 赵 桐 蔡 晶  
责任编辑 胥橙庭 单 宁 编辑热线 025-83686531

照 排 江苏南大印刷厂  
印 刷 南京人文印刷厂  
开 本 787×1092 1/16 印张 8.75 字数 202 千  
版 次 2012 年 8 月第 1 版 2012 年 8 月第 1 次印刷  
ISBN 978-7-305-10463-3  
定 价 20.00 元

发行热线 025-83594756 83686452  
电子邮箱 [Press@NjupCo.com](mailto:Press@NjupCo.com)  
[Sales@NjupCo.com](mailto:Sales@NjupCo.com) (市场部)

---

\* 版权所有, 侵权必究

\* 凡购买南大版图书, 如有印装质量问题, 请与所购  
图书销售部门联系调换

# 前 言

结构力学是力学系列课程中的一门重要课程,也是土木、交通、地下、水利水电等专业重要的专业基础课。在课程体系上,既是理论力学、材料力学课程的深化和延伸,又是后续专业课程如钢筋混凝土结构、钢结构、地基基础和抗震设计等课程的基础,介于基础课和专业课之间,起着承上启下的作用,在整个专业培养计划中占有重要地位。另外还是报考结构工程专业研究生及注册结构工程师资格考试的主要课程。因此,学习和掌握好结构力学的基本概念、基本原理和基本计算、分析方法,对学习后续专业课程以及解决工程实际问题都十分重要。

结构力学是固体力学的一个分支,它主要研究工程结构受力和传力的规律以及如何进行结构优化。结构力学研究的内容包括结构的组成规则,结构在各种效应(外力、温度效应、施工误差及支座变形等)作用下的响应,包括内力(轴力、剪力、弯矩、扭矩)的计算、位移(线位移、角位移)的计算以及结构在动力荷载作用下的动力响应(自振周期、振型)的计算等。总体而言,结构力学是一门教学内容多、理论性强、技巧性高的课程。

根据教学情况来看,学生普遍觉得学习难度大;加之近年来高等学校规模的不断扩大,招生人数大幅度增加,使得学生的整体素质有所下降,并普遍存在基础好、能力强的学生“吃不饱”,基础差、能力弱的学生抄作业、厌学掉队的情况,最终导致学习成绩两极分化严重的现象。如何在同一个班级中实现不同学生的层次化教学,满足各层次学生的学习所需是目前课堂教学亟待解决的问题。

本书结合目前正在实施的“卓越工程师计划”,紧贴课堂,在提炼结构力学各章知识体系的基础上,推出层次化的练习题和测试题。其中的习题分为预练题、基础题和提高题三大类。预练题是让学生评估自己的课前预习水平的,在预习后、上课前的时间段完成;基础题是围绕各章理论知识的基本概念、基本方法设置的,供学生课后进行练习,巩固课堂知识;提高题则是针对喜欢思考、乐于探究的学生设置的习题,有一定的难度和深度。从题型上,练习题又细分为概念判断、简单计算填空和计算题三大类,以便学生全方位、多形式地掌握各章知识。另外,测试题是将各章的基本题型统一为考试试卷的形式,以便学生在学习完本册内容后,可以在固定时间内(120 分钟)对自己的学习水平进行测试。

全书共分三个部分,第一部分的各章学习指导由赵桐编写,第二部分的练习题和第三部分的测试模拟题由张丽华(概念判断和填空)、宋林辉和蔡晶(计算题)编写,全书由范钦珊教授主审,并提出了很多宝贵意见。本书可作为高等院校土木工程专业的课堂学习辅导教材,尤其适合作为工科类大学的课后练习册。

本书广泛吸收了优秀的《结构力学》教材和教学辅导书的精华,引用了部分观点、例题和习题,在此谨向文献的作者致以由衷的谢意,同时也对关心该书出版的同行专家和广大读者表示感谢。

由于作者的水平有限,书中可能存在不妥和疏漏,恳请读者批评指正。

编 者

2012 年 7 月

# 目 录

|                          |     |
|--------------------------|-----|
| <b>第一部分 各章学习指导</b> ..... | 1   |
| 教学大纲.....                | 3   |
| 第 9 章 矩阵位移法.....         | 5   |
| 第 10 章 结构的动力计算.....      | 12  |
| 第 11 章 结构的稳定计算.....      | 19  |
| 第 12 章 结构的极限荷载.....      | 22  |
| <b>第二部分 各章练习题</b> .....  | 27  |
| 第 9 章 矩阵位移法 .....        | 29  |
| 第 10 章 结构的动力计算.....      | 47  |
| 第 11 章 结构的稳定计算.....      | 79  |
| 第 12 章 结构的极限荷载.....      | 97  |
| <b>第三部分 测试模拟试卷</b> ..... | 109 |
| 测试模拟试卷(1) .....          | 111 |
| 测试模拟试卷(2) .....          | 117 |
| 测试模拟试卷(3) .....          | 121 |
| 测试模拟试卷(4) .....          | 127 |
| <b>参考文献</b> .....        | 133 |

## 第一部分

---

# 各章学习指导



# 教学大纲

《结构力学》是土木工程专业的一门主要的专业基础课,具有较强的理论性及应用性。按照教育部 2008 年审定的《结构力学课程教学基本要求(A 类)》,结合国家正在实施的“卓越工程师”培养要求,特制定本教学大纲。

## 一、教学目的

本课程的教学目的是使学生在理论力学、材料力学、结构力学(上)的基础上,进一步掌握分析杆件结构体系在动荷载作用下的强度和刚度问题、稳定性和极限荷载的基本原理和方法,加强对学生分析能力、计算能力和自学能力的培养,为他们后续专业课程的学习以及结构设计和科研工作地开展打下必要的力学基础。

## 二、教学内容和要求

1. 结构矩阵分析:掌握矩阵位移法的原理和杆件结构在荷载作用下的计算。了解平面杆系结构矩阵位移法计算程序的原理、结构和数据输入、输出的内容,通过上机实习掌握其应用。

2. 结构的动力计算:掌握动力分析的基本方法,掌握单自由度和两个自由度体系的自由振动以及在简谐荷载作用下受迫振动的计算方法,了解阻尼的作用。

3. 结构的极限荷载:理解极限弯矩、极限荷载的概念和比例加载时判定极限荷载的一般定理,会计算超静定梁的极限荷载。

4. 结构的稳定计算:理解结构失稳的两种基本形式,掌握静力法和能量法计算临界荷载的基本原理,会计算简单杆件结构的临界荷载。

## 三、教学课时安排

| 章节      | 讲课 | 习题课 | 上机课 |
|---------|----|-----|-----|
| 矩阵位移法   | 8  | 2   | 6   |
| 结构的动力计算 | 16 | 2   |     |
| 结构的稳定计算 | 6  | 1   |     |
| 结构的极限荷载 | 6  | 1   |     |

#### 四、考核方式

总评成绩=平时成绩(30%)+期末考试成绩(70%)。

## 第9章 矩阵位移法

### 一、教学目标

1. 熟练掌握两种坐标系中的单元刚度矩阵,结构的整体刚度矩阵,等效结点荷载的形成,已知结点位移求单元杆端力的计算方法,整体刚度矩阵和结构结点荷载的集成过程。
2. 理解单元刚度矩阵和整体刚度矩阵中的元素的物理意义。
3. 了解不计轴向变形时矩形刚架的整体分析。

### 二、内容概要

#### 1. 矩阵位移法的基本思路

先将结构离散成有限个单元,然后再将这些单元按一定条件集成整体。这样,就使一个复杂结构的计算问题转化为有限个简单单元的分析与集成问题。矩阵位移法以传统的结构力学作为理论基础,以矩阵作为数学表达形式,以电子计算机作为计算手段,是三位一体的分析方法。

#### 2. 矩阵位移法与传统位移法

相同之处:以结构的结点位移为基本未知量。

差异:一般计入所有杆件的轴向变形;全部杆件归入一类基本构件——两端固定杆件(进一步规格化,便于计算机程序的编制)。

#### 3. 矩阵位移法的三个基本环节

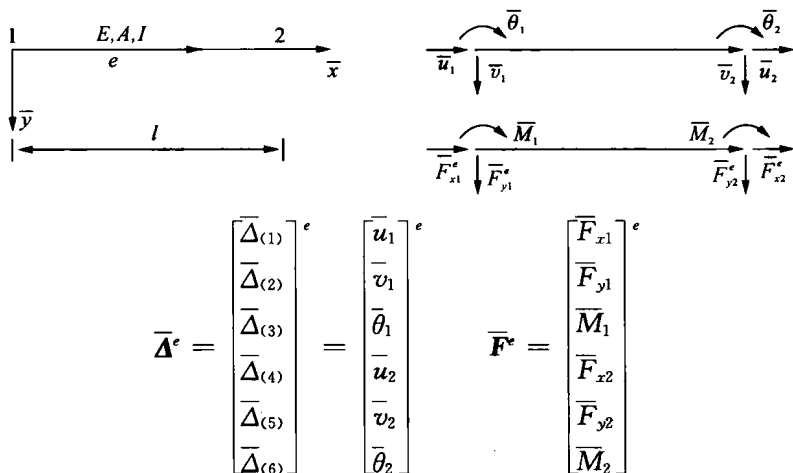
- (1) 单元划分:一根等截面直杆作为一个单元,单元间由结点相连。
- (2) 单元分析:建立单元刚度方程,形成单元刚度矩阵(物理关系)。
- (3) 整体分析:由单元刚度矩阵形成整体刚度矩阵,建立结构的位移法基本方程(几何关系、平衡条件)。

#### 4. 单元刚度矩阵(局部坐标系)

单元刚度矩阵是用来表示杆端力与杆端位移之间的物理关系的,不是新东西,但有点新考虑:重新规定正负规则,以矩阵的形式表示,讨论杆件单元的一般情况。

#### 5. 杆端局部编码与局部坐标系

局部坐标系中的杆端位移分量与杆端力分量:



## 6. 单元刚度方程

单元杆端位移与杆端力之间的关系式,即单元的刚度方程:

$$\begin{bmatrix} \bar{F}_{x1} \\ \bar{F}_{y1} \\ \bar{M}_1 \\ \bar{F}_{x2} \\ \bar{F}_{y2} \\ \bar{M}_2 \end{bmatrix}^e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix}^e \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{v}_1 \\ \bar{\theta}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{v}_2 \\ \bar{\theta}_2 \end{bmatrix}^e$$

即

$$\bar{F}^e = \bar{k}^e \bar{\Delta}^e$$

## 7. 单元刚度矩阵的性质

- (1) 单元刚度矩阵是杆端力用杆端位移来表达的联系矩阵;
- (2) 其中每个元素称为单元刚度系数,表示由于单元杆端位移引起的杆端力;
- (3) 单元刚度矩阵是对称矩阵;
- (4) 第  $k$  列元素分别表示当第  $k$  个杆端位移为 1 时引起的六个杆端力分量;
- (5) 一般单元的单元刚度矩阵是奇异矩阵,不存在逆矩阵,因此可通过单元刚度方程由杆端位移唯一确定杆端力。

## 8. 特殊单元

特殊单元的某个或某些杆端位移值已知为零,如梁单元、轴力单元。

特殊单元的单元刚度矩阵可由一般单元的单元刚度矩阵删除与零杆端位移对应的行和列得到。梁单元刚度矩阵可由一般单元刚度矩阵划掉第 1、4 行和第 1、4 列得到;轴力

单元刚度矩阵可由一般单元刚度矩阵划掉第 2、3、5、6 行和第 2、3、5、6 列得到;某些特殊单元的刚度矩阵是可逆的。

### 9. 整体坐标系与局部坐标系

(1) 两种坐标系建立的必要性: 连续梁不必进行坐标变换, 桁架、刚架必须进行坐标变换。

(2) 整体坐标系: 各个单元共同参考的坐标系(结构坐标系)。

(3) 局部坐标系: 专属某一个单元的坐标系(单元坐标系)。

### 10. 单元刚度矩阵(整体坐标系)

选整体坐标系是为了按一个统一的坐标系来建立各单元的刚度矩阵, 以便进行整体分析。由于结构中各杆方向不尽相同, 桁架、刚架必须进行坐标变换。

单元坐标转换矩阵:

$$T = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^e$$

单元坐标转换矩阵  $T$  是一正交矩阵:  $T^{-1} = T^T$ 。

两种坐标系下的杆端力、杆端位移的关系:

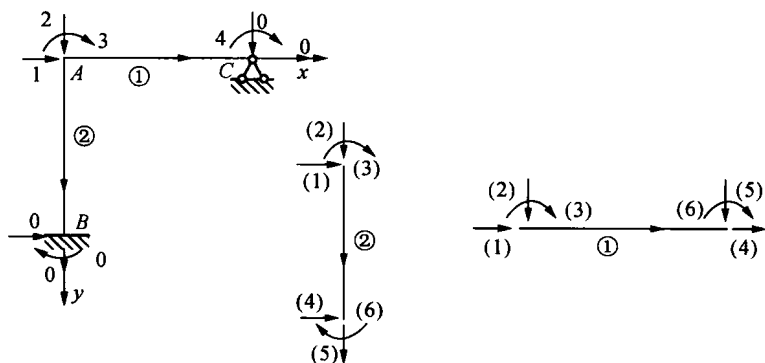
$$(1) \bar{F}^e = T F^e; \bar{\Delta}^e = T \Delta^e;$$

$$(2) F^e = T^T \bar{F}^e, \Delta^e = T^T \bar{\Delta}^e.$$

整体坐标系中的单元刚度矩阵:  $k^e = T^T \bar{k}^e T$ 。

### 11. 单元定位向量

首先要注意同一个结点位移在整体中和在各单元中两种编码的不同。在单元分析中按单元两端结点位移单独编码, 称为局部码。在整体分析中结点位移分量的统一编码称为总码。结构总码的顺序就是结构位移和结点力的顺序。

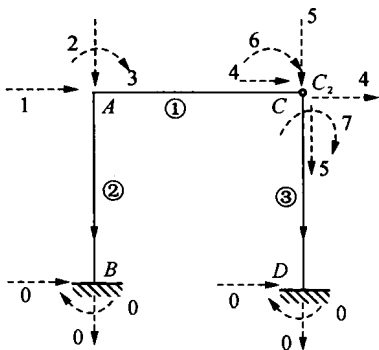


$$\text{结点位移列阵: } \Delta = (\Delta_1 \quad \Delta_2 \quad \Delta_3 \quad \Delta_4)^T = (u_A \quad v_A \quad \theta_A \quad \theta_C)^T;$$

结点力列阵:  $F = (F_1 \ F_2 \ F_3 \ F_4)^T$ ;

单元定位向量:  $\lambda^{\text{①}} = (1 \ 2 \ 3 \ 0 \ 0 \ 4)^T, \lambda^{\text{②}} = (1 \ 2 \ 3 \ 0 \ 0 \ 0)^T$ 。

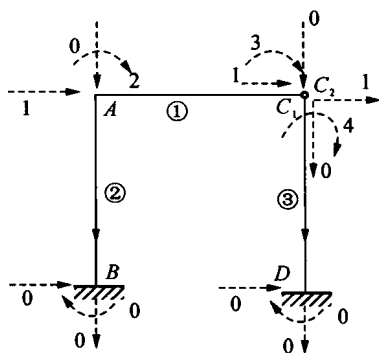
单元结点位移总码按局部码顺序排列而成的向量称为单元定位向量,它是由单元的结点位移总码组成的向量。



铰结点的处理: 总码中铰结点处的两杆端结点应看做半独立的两个结点, 即它们的线位移相同, 角位移不同, 线位移采用同码, 角位移采用异码。

12. 刚架忽略轴向变形时的情况

结点位移分量的统一编码——总码, 如图所示。



13. 整体刚度矩阵的建立

直接刚度法是根据单元的结点位移分量的局部码和总码之间的对应关系, 由单元刚度矩阵集成结构整体刚度矩阵。

在单刚中元素按局部码排列, 在总刚中元素按总码排列。因此, 由单刚集成总刚时, 将各单元的单刚的行列局部码  $(i)$ 、 $(j)$  换成对应的结点位移总码  $\lambda_i$ 、 $\lambda_j$ , 按此行列总码将单刚元素代入总刚。

14. 等效结点荷载

整体刚度方程  $F=K\Delta$  表示由结点位移  $\Delta \rightarrow F$  结点力的关系式, 反映了结构的刚度性质, 不涉及结构上的实际荷载。

等效结点荷载为基本体系附加约束中的约束力, 且等于各单元固端力之和的负值。故应该先求出单元的等效结点荷载, 再集成结构等效结点荷载。

依次将各单元的等效结点荷载中的元素按单元定位向量在结构的等效结点荷载  $\mathbf{P}$  中进行定位并累加, 就得到结构的等效结点荷载  $\mathbf{P}$ 。

#### 15. 矩阵位移法分析计算步骤

- (1) 整理原始数据, 进行局部编码和整体编码;
- (2) 形成局部坐标系中的单元刚度矩阵;
- (3) 形成整体坐标系中的单元刚度矩阵;
- (4) 用单元集成法形成整体刚度矩阵  $\mathbf{K}$ ;
- (5) 形成整体结构的等效结点荷载  $\mathbf{P}$ ;
- (6) 解方程  $\mathbf{K}\Delta = \mathbf{P}$ , 求出结点位移  $\Delta$ ;
- (7) 求各杆杆端力。

$$\bar{\mathbf{F}}^e = \mathbf{k}^e \bar{\Delta}^e + \bar{\mathbf{F}}_p^e$$

#### 16. 桁架的整体分析

单元的刚度方程(局部坐标):

$$\begin{bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \end{bmatrix}^e = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{v}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{v}_2 \end{bmatrix}^e$$

坐标转换矩阵:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

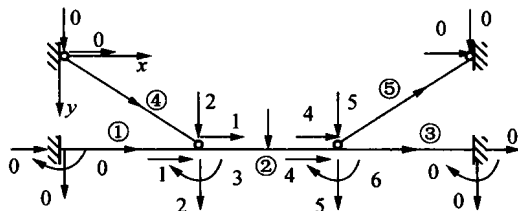
单元的刚度方程(整体坐标):  $\mathbf{k}^e = \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{k}}^e \mathbf{T}$ 。

注意: ① 桁架单元的结点转角不是基本未知量; ② 荷载为结点集中力无需求等效结点荷载; ③ 杆端力全由结点位移产生。

#### 17. 组合结构的整体分析

计算组合结构时注意:

(1) 区分梁式杆和桁杆。对梁式杆采用一般单元的刚度方程及相应的计算公式; 对桁杆采用桁架单元的刚度方程及相应的计算公式。



(2) 梁式杆杆端有三个位移分量, 桁杆杆端有两个位移分量。组合结点各杆端线位移编同码。

### 三、典型例题及解题标准步骤

L-9.1 试求图示连续梁的整体刚度矩阵  $K$ 。

解 (1) 编码

凡给定为零的结点位移分量, 其总码均编为零。

(2) 单元定位向量

$$\lambda^{\textcircled{1}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \lambda^{\textcircled{2}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \lambda^{\textcircled{3}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(3) 求单刚

$$k^{\textcircled{1}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4i_1 & 2i_1 \\ 2i_1 & 4i_1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \quad k^{\textcircled{2}} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4i_2 & 2i_2 \\ 2i_2 & 4i_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix} \quad k^{\textcircled{3}} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4i_3 & 2i_3 \\ 2i_3 & 4i_3 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 0 \end{matrix}$$

(4) 求总刚

$$[K] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4i_1 & 2i_1 & 0 \\ 2i_1 & 4i_1 + 4i_2 & 2i_2 \\ 0 & 2i_2 & 4i_2 + 4i_3 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}$$

L-9.2 试求图示结构的等效结点荷载  $P$ 。

解 (1) 求单元固端力

单元①:

$$\bar{F}_P^{\textcircled{1}} = (0 \quad -12 \quad -10 \quad 0 \quad -12 \quad 10)^T$$

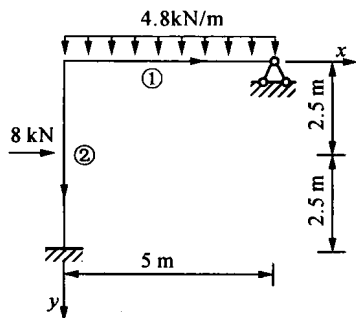
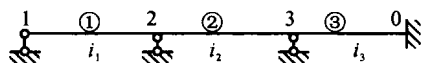
单元②:

$$\bar{F}_P^{\textcircled{2}} = (0 \quad 4 \quad 5 \quad 0 \quad 4 \quad -5)^T$$

(2) 求各单元在整体坐标系中的等效结点荷载

单元①的倾角  $\alpha_1 = 0$ :

$$P^{\textcircled{2}} = -T^{\textcircled{2}T} \bar{F}_P^{\textcircled{2}} = -\bar{F}_P^{\textcircled{1}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 12 \text{ kN} \\ 10 \text{ kN} \cdot \text{m} \\ 0 \\ 12 \text{ kN} \\ -10 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{Bmatrix}$$



单元②的倾角  $\alpha_2 = 90^\circ$ :

$$\mathbf{P}^{\textcircled{2}} = -\mathbf{T}^{\textcircled{2}\text{T}} \bar{\mathbf{F}}_{\text{P}}^{\textcircled{2}} = - \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 0 & & & \\ 1 & 0 & 0 & & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ & & & 0 & -1 & 0 \\ & 0 & & 1 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 4 \\ 5 \\ 0 \\ 4 \\ -5 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 4 \text{ kN} \\ 0 \\ -5 \text{ kN} \cdot \text{m} \\ 4 \text{ kN} \\ 0 \\ 5 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{array} \right\}$$

(3) 求刚架的等效结点荷载  $\mathbf{P}$

$$\boldsymbol{\lambda}^{\textcircled{1}} = (1 \quad 2 \quad 3 \quad 0 \quad 0 \quad 4)^{\text{T}} \quad \boldsymbol{\lambda}^{\textcircled{2}} = (1 \quad 2 \quad 3 \quad 0 \quad 0 \quad 0)^{\text{T}}$$

$$\mathbf{P} = \left\{ \begin{array}{c} [0+4] \text{ kN} \\ [12+0] \text{ kN} \\ [10+(-5)] \text{ kN} \cdot \text{m} \\ -10 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 4 \text{ kN} \\ 12 \text{ kN} \\ 5 \text{ kN} \cdot \text{m} \\ -10 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{array} \right\}$$