GAODENG SHUXUE

高等数学

（专业版）

主　编　贺海燕
副主编　巫中一　魏　齐

四川大学出版社

GAODENG SHUXUE

高等数学

（专业版）

主　编　贺海燕
副主编　巫中一　魏　齐

四川大学出版社

特邀编辑：唐　飞
责任编辑：毕　潜
责任校对：李思莹
封面设计：墨创文化
责任印制：李　平

图书在版编目(CIP)数据

高等数学：专业版 / 贺海燕主编. —成都：四川大学出版社，2012.6
ISBN 978-7-5614-5958-4

Ⅰ.①高…　Ⅱ.①贺…　Ⅲ.①高等数学－高等学校－教材　Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 139670 号

书名　**高等数学(专业版)**

主　　编	贺海燕
出　　版	四川大学出版社
地　　址	成都市一环路南一段 24 号 (610065)
发　　行	四川大学出版社
书　　号	ISBN 978-7-5614-5958-4
印　　刷	郫县犀浦印刷厂
成品尺寸	185 mm×260 mm
印　　张	11.75
字　　数	267 千字
版　　次	2012 年 8 月第 1 版
印　　次	2012 年 8 月第 1 次印刷
印　　数	0 001～3 000 册
定　　价	20.00 元

◆读者邮购本书，请与本社发行科联系。电 话：85408408/85401670/85408023　邮政编码：610065
◆本社图书如有印装质量问题，请寄回出版社调换。
◆网址：http://www.scup.cn

前　言

数学是人类智慧的结晶. 高等数学是高等职业教育院校大学生的一门必修的基础课程. 在课程体系中，高等数学占有十分重要的地位；在现代科学技术、人文社会科学以及经济生活等领域中，应用也越来越广泛；它的知识和方法已成为学生知识、能力和素质目标培养中不可或缺的重要组成部分，是各个专业的主干基础课程. 对高等数学课程的系统设计研究，不仅是对基础理论系统设计的重要组成部分，而且也是对高职高专人才培养研究的重要组成部分. 此外，《教育部关于推进中等和高等职业教育协调发展的指导意见》（教职成〔2011〕9 号）和《教育部关于推进高等职业教育改革创新引领职业教育科学发展的若干意见》（教职成〔2011〕12 号），提出对高职课程改革的指导性意见，包括积极进行课程重组、改革等. 为此，需要形成适应新的人才培养模式的高等数学教材.

本教材遵循“立足专业，服务专业”的思想，按照突出应用性、实践性的原则，结合专业基础课与专业课重组课程内容和结构，将高等数学内容模块化，在有限的课时内极大地满足了专业对数学知识的需求，又尽可能地保证了数学知识的相对完整性. 根据理工类、财经类、管理类和农医类专业对高等数学知识的需求，我们将高等数学教材分成高等数学（基础版）和高等数学（专业版）. 本书为高等数学（专业版），主要内容有概率论基础、数理统计初步、矩阵与行列式、n 维向量及线性方程组和积分变换.

对本教材的使用，教师可根据不同专业对数学知识的需求，选择不同的知识模块. 同时，针对新的人才培养模式下理论课时数少的现状，教材力求深入浅出，淡化数学严密的证明，尽可能用图像直观地反映问题的本质. 为使学生能用数学的方法和思维理解、解决专业学习中的问题，教材编写了大量与专业、生活有关的例题和习题，希望有助于学生开阔视野、启迪思维，激发学生学数学、用数学的兴趣.

本教材由贺海燕担任主编，巫中一、魏齐担任副主编. 其中，第一、二章由贺海燕编写，第三、四章由魏齐编写，第五章由巫中一编写. 全书由贺海燕统稿. 曾晓兰、贾全、王智勇、廖光荣、黄开定参与了本教材的审稿，并在本教材的编写过程中，提出了许多宝贵意见.

在本教材的编写过程中，我们得到了内江职业技术学院有关领导和学院基础部的大力支持与帮助，在此表示衷心的感谢！

由于编者水平有限和时间仓促，错误和不足之处在所难免，恳请使用和阅读本教材的同仁和学生批评指正，以便我们修订时进行改正.

编　者

2012 年 6 月

目　　录

第一章　概率论基础

学习要求：

一、了解随机事件的概念，掌握随机事件间的关系和运算；

二、理解随机事件的频率、概率等概念，掌握概率的基本性质；

三、熟练掌握概率的加法公式、乘法公式；

四、理解随机变量的概念；

五、掌握离散型随机变量的分布列和连续型随机变量的分布密度函数，以及常用分布；

六、理解数字特征的含义，并掌握常用分布的数字特征.

现实世界中出现的一切现象，可以划分为确定性现象和非确定性现象. 所谓确定性现象，是指完成一定条件后必然会发生的现象. 例如，在标准大气压下，将纯净水加热到 100℃ 时必然沸腾；在地球上垂直上抛一重物，该重物会垂直下落等. 所谓非确定性现象，即通常称为偶然现象，是指在完成一定条件后，不能确定其结果的现象. 如明天的天气、医院候诊的人数、战士打靶的环数、掷一颗骰子可能出现的点数等. 我们把现实中数量规律的非确定性现象统称为随机现象. 把在大量随机现象观测中所呈现的规律性，称为随机现象的统计规律性. 概率论就是研究随机现象的统计规律性的数学学科，在生产管理、检验、经济等各个领域应用十分广泛.

§1－1　随机事件与随机事件的概率

一、随机试验与随机事件

对随机现象的一次观察，可以看做是在一定条件下的一次试验. 若某个试验满足下列三个特点，则称为**随机试验**：

(1) 试验可以在相同条件下重复进行；

(2) 每次试验结果不止一个，且所有结果事先是明确的；

(3) 试验前无法预知会发生什么结果，必须当试验完成后，方知其最终结果.

随机试验的任何一个结果称为一个**随机事件**. 例如，考察明天的天气，明天下雨是

一个随机事件，不下雨也是一个随机事件等.

随机事件常简称为事件. 事件一般用大写的英文字母 A，B，C，⋯ 表示.

在随机事件中，必然会发生的事件称为必然事件，记为 Ω. 必然不发生的事件称为不可能事件，记为 $\varnothing$.

此外，我们还常常用一个变量 ξ 取若干确定的值或取某范围的值来对应随机试验下的一个随机事件，我们把这个变量 ξ 称为随机变量.

例 1 彩票问题.

记 ξ 为你所投注的号码中奖的等级，即 $\xi = 1$ 表示号码中一等奖，$\xi = 2$ 表示号码中二等奖，$\xi = 0$ 表示号码未中奖等. 如果仅仅关心此号码是否中奖，可以设置一个简单的随机变量 X，它仅取两个值，即 $X = 1$ 表示此号码中奖，$X = 0$ 表示此号码未中奖.

例 2 产品检验问题.

在 100 台电视机质量检验中，我们可以用 A 表示"全为正品"这个事件，B 表示"恰有一台电视机为次品"这个事件等.

我们也可以设 ξ 为抽检出的次品数，则 $\xi = 0$ 就表示这 100 台电视机"全为正品"；"恰有一台电视机为次品"可以表示为 $\xi = 1$.

那么，请思考当 $\xi < 1$，$\xi > 1$，$1 \leqslant \xi \leqslant 4$ 时，分别表示什么事件？

不能再分解的事件称为基本事件，一个指定试验的全部基本事件构成的集合，称为**样本空间**. 事实上，一个随机试验的全部基本事件构成必然事件. 因此，将一个试验的样本空间记为 Ω. 构成样本空间的基本事件称为**样本点**.

二、随机事件的关系和运算

1. 包含关系

若事件 A 发生必导致事件 B 发生，记为 $A \subset B$ 或 $B \supset A$，读作"事件 A 包含于事件 B"或"事件 B 包含事件 A"，如图 1－1 所示.

对于任一事件 A，都有 $\varnothing \subset A \subset \Omega$.

2. 相等关系(相互包含关系)

$A = B \Leftrightarrow A \subset B$ 且 $B \subset A$.

3. 事件的和(并)

事件 A 与 B 至少有一个发生的事件，称为事件 A 与 B 的**和事件**，记为 $A \cup B$ 或 $A + B$，如图 1－2 所示.

对于任一事件 A，都有 $A + A = A$.

和事件的概念可以推广到有限个事件的和，即 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 至少有一个发生的事件，称为这 n 个事件的和事件，记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$.

4. 事件的积(交)

事件 A 与 B 同时发生的事件，称为事件 A 与 B 的**积事件**，记为 $A \cap B$ 或 AB，如图

1－3 所示.

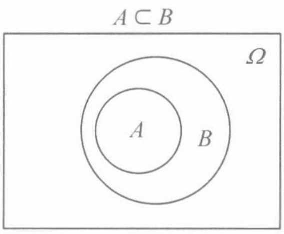

图 1－1

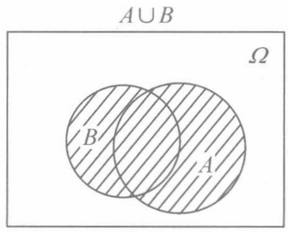

图 1－2

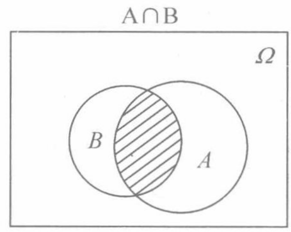

图 1－3

对于任一事件 A，都有 $AA=A$.

积事件的概念可以推广到有限个事件的积，即 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 同时发生的事件，称为这 n 个事件的积事件，记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ 或 $A_1A_2\cdots A_n$.

对于任一事件 A，有

$$A+\Omega=\Omega,\ A\Omega=A,\ A+\varnothing=A,\ A\varnothing=\varnothing.$$

注意：(1) 事件求交(积)，越“交”越“小”；事件求并(和)，越“并”越“大”.

即有

$$AB\subset A+B,\ AB\subset B\subset A+B;$$

(2) 若事件 A 与 B 有包含关系 $A\subset B$，则有

$$A+B=B,\ AB=A.$$

5. 事件的差

事件 A 发生且事件 B 不发生的事件，称为事件 A 与 B 的**差事件**，记为 $A-B$，如图 1－4 所示. 易知，

$$A-B=A\bar{B}.$$

$A-B$ 由属于事件 A 而不属于事件 B 的基本事件构成.

6. 互斥的事件(互不相容)

若 $AB=\varnothing$，称 A 与 B 互斥，如图 1－5 所示.

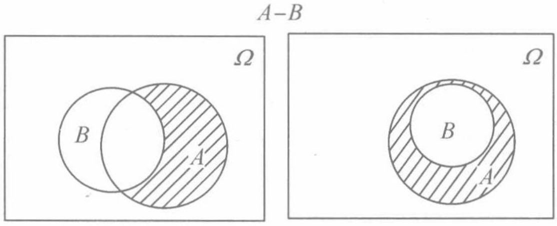

图 1－4

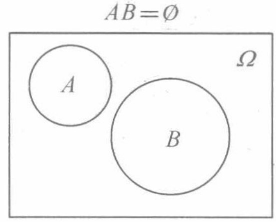

图 1－5

7. 互逆的事件(对立)

若 $A\cup B=\Omega$ 且 $AB=\varnothing$，称事件 A 与 B **互逆**，如图 1－6 所示.

互逆事件与互斥事件的区别：如果两个事件 A 与 B 必有一个事件发生，且至多有一个事件发生，则事件 A 与 B 为互逆事件；如果两个事件 A 与 B 不能同时发生，则事件 A

与 B 为互斥事件. 因此，互逆必定互斥，互斥未必互逆. 区别两者的关键是，当样本空间只有两个事件时，且一个事件包含另一事件，如 $A \subset B$，包含的事件 B 可看做样本空间，两事件才可能互逆；而互斥适用于多个事件的情形. 作为互斥事件在一次试验中两者可以都不发生，而互逆事件必发生一个且只发生一个，即两互逆的和事件一定是样本空间，而两互斥事件的和事件就不一定是样本空间.

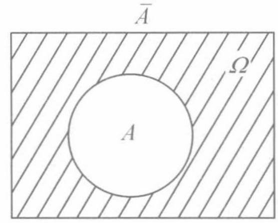

图 1－6

事件间运算所满足的运算律如下：

交换律　$A \cup B = B \cup A$，$AB = BA$；

结合律　$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$，$(AB)C = A(BC)$；

分配律　$(A \cup B)C = (AC) \cup (BC)$，$(AB) \cup C = (A \cup C)(B \cup C)$；

反演律　$\overline{\overline{A}} = A$；

德·摩根(De Morgan)律(即对偶律)　$\overline{A \cup B} = \bar{A}\bar{B}$，$\overline{AB} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

例 3　甲、乙、丙三人各向目标射击一发子弹，以 A，B，C 分别表示甲、乙、丙命中目标. 试用 A，B，C 的运算关系式表示下列事件：

(1) 至少有一人命中目标；(2) 恰有一人命中目标；(3) 恰有两人命中目标；(4) 最多有一人命中目标；(5) 三人均命中目标；(6) 三人均未命中目标.

解　(1) 至少有一人命中目标：$A + B + C$；

(2) 恰有一人命中目标：$A\bar{B}\bar{C} + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}\bar{B}C$；

(3) 恰有两人命中目标：$AB\bar{C} + A\bar{B}C + \bar{A}BC$；

(4) 最多有一人命中目标：$\bar{A} + \bar{B} + \bar{C}$；

(5) 三人均命中目标：ABC；

(6) 三人均未命中目标：$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$.

三、概率的定义

随机事件在一次试验中，可能发生也可能不发生，具有偶然性. 但是，人们从长期的、大量的实践中认识到，在相同的条件下，进行大量的重复试验中，试验的结果具有某种内在的规律性，即随机事件发生的可能性是有规律的，其大小也是可以比较的. 例如，在投掷一枚均匀的骰子试验中，事件 A 表示“掷出偶数点”，事件 B 表示“掷出 2 点”，显然事件 A 比事件 B 发生的可能性要大.

对于一个随机试验，我们不仅想知道它可能出现哪些结果，更重要的是研究各种结果发生的可能性的大小. 是否可以用一个数字度量其发生的可能性大小，从而揭示其内在的规律性呢?以下给出关于概率的公理化定义、统计定义、古典定义和几何定义.

1. 概率的公理化定义

简单地说，概率就是随机事件发生的可能性大小的数量表征. 对于事件 A，通常用 $P(A)$ 来表示事件 A 发生的可能性大小，即事件 A 发生的概率. 这就是概率的公理化定

义.

定义 1　设 Ω 为样本空间，A 为该样本空间的某一事件，对于每一个事件 A 赋予一个确定实数 $P(A)$ 与之对应，并且满足以下条件：

(1) 非负性：$P(A) \geqslant 0$；

(2) 规范性：$P(\Omega) = 1$；

(3) 可列可加性：对于两两互不相容的可列无穷多个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，有

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n),$$

则称实数 $P(A)$ 为随机事件 A 发生的**概率**(Probability).

2. 概率的统计定义

定义 2　事件 A 在 n 次重复试验中出现 n_A 次，称比值 $\frac{n_A}{n}$ 为事件 A 在 n 次重复试验中出现的**频率**，记为 $f_n(A)$，即 $f_n(A) = \frac{n_A}{n}$.

事件 A 发生的频率 $f_n(A)$ 表示在 n 次重复试验中事件 A 发生的频繁程度，频率越大，事件 A 发生就越频繁，发生的可能性也就大，反之亦然. 但是，用 $f_n(A)$ 表示事件 A 在一次试验中发生可能性的大小却是行不通的. 这是因为试验具有随机性，即使在相同条件下进行 n 次试验，$f_n(A)$ 的值也不一定相同. 但大量试验证实，随着重复试验次数 n 的增加，频率 $f_n(A)$ 会逐渐稳定于某个常数附近，且偏离的可能性很小，说明频率具有“稳定性”. 基于这一事实，说明了刻画事件 A 发生可能性大小的数值 —— 概率，具有一定的客观存在性（严格说来，这是一个理想的模型，因为我们在实际上并不能绝对保证在每次试验时条件都保持完全一样，这只是一个理想的假设).

历史上有一些著名的试验，如德 · 摩根(De Morgan)、蒲丰(Buffon) 和皮尔逊(Pearson) 的掷硬币试验，他们通过大量掷硬币得到如表 1 − 1 所示的结果.

表 1 — 1　匀称硬币在投掷中正面朝上的频率

试验者	掷硬币次数	出现正面次数	出现正面的频率
德 · 摩根	2048	1061	0.5181
蒲丰	4040	2048	0.5069
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005

试验表明,硬币出现正面的频率总在 0.5 附近摆动，随着试验次数的增加，它逐渐稳定于 0.5. 这个 0.5 就反映了正面出现的可能性的大小.

每个事件都存在一个这样的常数与之对应，因而可将频率 $f_n(A)$ 在 n 无限增大时逐渐趋于稳定的这个常数定义为事件 A 发生的概率. 这就是概率的统计定义.

事件 A 在 n 次重复试验中发生的次数为 n_A，当 n 很大时，频率 $f_n(A)=\frac{n_A}{n}$ 在某一数值 p 的附近摆动，而随着试验次数 n 的增加，发生较大摆动的可能性越来越小.

定义 3 当 $n\to\infty$ 时，频率 $f_n(A)=\frac{n_A}{n}\to p$(其中 p 为常数). 当 n 很大时，$p(A)=p\approx f_n(A)$,称为事件 A 的**统计概率**.

需要注意的是，上述定义并没有提供确切计算概率的方法. 因此，我们不可能依据它确切地定出任何一个事件的概率. 事实上，我们不可能对每一个事件都做大量的试验，况且我们不知道 n 取多大才行；如果 n 取很大，不一定能保证每次试验的条件都完全相同. 而且也没有试验证明，取试验次数为 $n+1$ 来计算的频率总会比取试验次数为 n 来计算的频率更准确，更逼近所求的概率.

3. 概率的古典定义

定义 4 若构成样本空间基本事件数为有限个，且每个基本事件发生的可能性相等，该试验称为古典概型(等可能概型)的试验，则事件 A 发生的概率为

$$P(A)=\frac{\text{事件 } A \text{ 中所含基本事件数}}{\text{样本空间 } \Omega \text{ 中的基本事件总数}}=\frac{k}{n}=\frac{k(A)}{n}.$$

例 4 从标号为 1，2，…,10 的 10 个同样大小的球中任取一个，求下列事件的概率：A 表示“抽中 2 号”，B 表示“抽中奇数号”，C 表示“抽中的号数不小于 7”.

解 令 A_i 表示“抽中 i 号”，$i=1,2,\cdots,10$，则

$$\Omega=\{1,2,3,\cdots,10\},$$

故

$$P(A)=\frac{1}{10}=0.1000,\ P(B)=\frac{5}{10}=0.5000,\ P(C)=\frac{4}{10}=0.4000.$$

4. 概率的几何定义

古典概型的概率计算，只适用于具有等可能性的有限样本空间，若试验结果无穷多，它显然已不适合. 为了克服有限的局限性，可将古典概型的计算加以推广.

定义 5 设试验具有以下特点：

(1) 样本空间 Ω 是一个几何区域，这个区域大小可以度量(如长度、面积、体积等)，并把 Ω 的度量记 $m(\Omega)$.

(2) 向区域 Ω 内任意投掷一个点，落在区域内任一个点处都是“等可能的”. 设落在 Ω 中的区域 A 内的可能性与 A 的度量 $m(A)$ 成正比，与 A 的位置和形状无关.

不妨也用 A 表示“掷点落在区域 A 内”的事件，那么事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{m(A)}{m(\Omega)}.$$

例 5 两人相约某天下午 2:00 ～ 3:00 在预定地方见面，先到者要等候 20 分钟，过时则离去. 如果每人在这指定的 1 小时内任一时刻到达是等可能的，试求约会的两人能会面的概率.

解　设 x，y 为两人到达预定地点的时刻，那么，两人到达时间的一切可能结果落在边长为 60 的正方形内，这个正方形就是样本空间 Ω，而两人能会面的充要条件是 $|x-y| \leqslant 20$，即

$$x-y \leqslant 20 \text{ 且 } y-x \leqslant 20.$$

令事件 A 表示"两人能会面"，这个区域如图 1－7 中的阴影部分所示，则

$$P(A)=\frac{m(A)}{m(\Omega)}=\frac{60^2-40^2}{60^2}=\frac{5}{9}=0.5556.$$

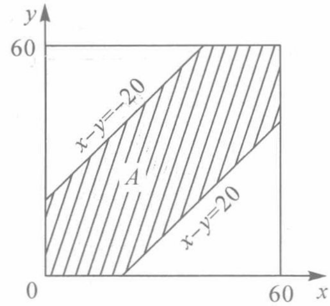

图 1－7

四、概率的基本性质

由以上概率的公理化定义、统计定义、古典定义和几何定义均可得出日常生活中常用到的概率的性质.

性质 1(非负性)　对于任一事件 A，有 $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.

性质 2(规范性)　$P(\Omega)=1$，$P(\varnothing)=0$.

注意：(1) 必然事件是在一定条件下必然发生的事件，不可能事件是在一定条件下必然不发生的事件. 它们都不具有随机性，是确定性的现象，但为研究的方便，把它们看做特殊的随机事件.

(2) 任何事件的概率都是 0 到 1 之间的实数，一般精确到小数点后 4 位，因此，必然事件的概率为 1，不可能事件的概率为 0，反之不成立. 概率很小的事件称为小概率事件. 我们认为小概率事件几乎不发生，而不可能事件是一定不发生.

性质 3(概率的有限可加性)　若 A_1，A_2，…，A_n 是两两互不相容的，则有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

性质 4　设 A，B 是两个事件，若 $A \subset B$，则有

$$P(B-A)=P(B)-P(A),$$

或

$$P(A) \leqslant P(B).$$

证　由 $A \subset B$ 知

$$B=A \cup (B-A) \text{ 且 } A \cap (B-A)=\varnothing,$$

再由概率的有限可加性有

$$P(B)=P[A \cup (B-A)]=P(A)+P(B-A),$$

即

$$P(B-A)=P(B)-P(A).$$

又由

$$P(B-A) \geqslant 0,$$

得

$$P(A) \leqslant P(B).$$

例 6　彩票问题：

传统型彩票问题的规则是每次从 0 ～ 9 的 10 个号码中随机地摇出 1 个，共摇 7 次(各

号码可以重复). 人们购买彩票时自愿选择 7 个号码按一定次序构成一注，如果摇出来的号码及次序和你选的号码完全一样，你就中大奖了. 那么,你花 2 元钱购买一注彩票中大奖的概率有多大？多买是否可以提高中奖率？买多少注可以使中奖率达到 10%？

解 设 A 表示“购买一注彩票中大奖”，则购买一注彩票中大奖的概率为

$$P(A)=\frac{1}{10^7}=0.0000.$$

购买一注彩票中大奖的事件是一个小概率事件，小概率事件几乎不发生. 多买是否能提高中奖率呢？

如果你购买 n 注不同号码的彩票，记事件 A_i 为第 i 注彩票中大奖($i=1,2,\cdots,n$)，事件 B 为 n 注不同号码的彩票至少有一注中大奖，则 A_1，A_2，$\cdots$，A_n 是两两互不相容的，且

$$B=\bigcup_{i=1}^{n}A_i,$$

故
$$P(B)=P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)=\frac{n}{10^7}.$$

由于分母比分子大得多，多买不可能对提高中奖率有多大帮助.

当 $n=1000000$ 时，$P(B)=0.1$，即为了使中奖概率达到 10%，必须购买一百万注. 你的投资是多少呢？

习题 §1－1

1. 写出下列构成随机试验样本空间 Ω 的所有基本事件：

(1) 从甲、乙、丙、丁 4 位学生中推选 2 位参加技能竞赛，其中一位参加省级竞赛，另一位参加全国竞赛；

(2)3 枚硬币同时投掷一次.

2. 设 A，B，C 为三个事件. 试用 A，B，C 的运算关系式表示下列事件：

(1) A 发生，B 与 C 都不发生；

(2) A 与 B 发生，C 不发生；

(3) A，B，C 都发生；

(4) A，B，C 至少有一个发生；

(5) A，B，C 都不发生；

(6) A，B，C 不都发生；

(7) A，B，C 至多有 2 个发生；

(8) A，B，C 至少有 2 个发生.

3. 袋中有 10 个球，分别编有 1 至 10 的号码. 从中任取一球，设 A 表示“取得球的号码是偶数”，B 表示“取得球的号码是奇数”，C 表示“取得球的号码小于 5”. 试问下述运算表示什么事件：

(1)$A \cup B$；(2)AB；(3)AC；(4)$\bar{A}\bar{C}$；(5) $\overline{B \cup C}$.

4. 已知 A 与 B 是样本空间 Ω 中的两个事件，且

$$\Omega = \{x \mid 2 < x < 9\}, A = \{x \mid 4 \leqslant x < 6\}, B = \{x \mid 3 < x \leqslant 7\}.$$

试求：(1) $\overline{AB}$；(2)$\bar{A} + B$；(3)$A - B$；(4) $\bar{A}\bar{B}$.

5. 从52张扑克牌中任意取出13张. 试求有5张黑桃、3张红心、3张方块、2张梅花的概率.

6. 从一批由45件正品、5件次品组成的产品中任取3件. 试求其中至少有一件次品的概率.

7. 袋中有白球5只，黑球6只，陆续取出3球. 试求：(1) 顺序为黑白黑的概率；(2) 取出2只黑球的概率.

8. 甲、乙两人相约7点到8点之间在某地会面，先到者等候另一人10分钟，过时就离开. 如果每个人可在指定的1小时内任意时刻到达，试求二人能会面的概率.

§1－2　随机事件概率的计算

在概率计算中，因某些随机事件较为复杂，此时利用事件间的运算，将该随机事件分解为几个相对简单的随机事件，先求简单随机事件的概率，再利用相关的法则处理，可将计算问题简化. 下面，我们介绍有关的法则.

一、概率的加法定理

定理1(加法公式)　对于任意两个事件 A 与 B，有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

特别地，(1) 若 $AB = \varnothing$，即 A 与 B 互斥，有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

(2) 若 $A \cup B = \Omega$ 且 $AB = \varnothing$，即 A 与 B 互逆，有

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}).$$

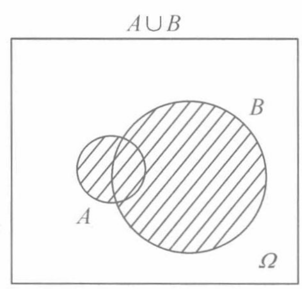

图1－8

证　因为　$A \cup B = A \cup (B - AB)$ 且 $A(B - AB) = \varnothing$，

由性质3和性质4得

$$P(A \cup B) = P[A \cup (B - AB)] = P(A) + P(B - AB)$$
$$= P(A) + P(B) - P(AB).$$

读者还可用几何概率(见图1－8)，得出加法定理的正确性，并可推广到三个事件的情形. 设 A_1，A_2，A_3 为任意三个事件，则有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1A_2) - P(A_1A_3) - P(A_2A_3) + P(A_1A_2A_3).$$

一般地，设 A_1，A_2，…，A_n 为任意 n 个事件，可由归纳法证得

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} P(A_iA_j) + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} P(A_iA_jA_k) - \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1A_2\cdots A_n).$$

例 1 设 A 与 B 为两事件，$P(A)=0.5$，$P(B)=0.3$，$P(AB)=0.1$. 试求：

(1) A 发生但 B 不发生的概率；

(2) A 不发生但 B 发生的概率；

(3) 至少有一个事件发生的概率；

(4) A，B 都不发生的概率；

(5) 至少有一个事件不发生的概率.

解 (1) $P(A\bar{B}) = P(A-B) = P(A) - P(AB) = 0.4$；

(2) $P(\bar{A}B) = P(B-A) = P(B-AB) = P(B) - P(AB) = 0.2$；

(3) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0.7$；

(4) $P(\bar{A}\bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 0.3$；

(5) $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{AB}) = 1 - P(AB) = 0.9$.

例 2 在大学里一个寝室住 4 名学生，那么一个寝室至少有 2 名同学的生日在同一个月份的概率有多大呢？

解 设 $A=\{$至少 2 名同学的生日在同一个月份$\}$，则

$$\bar{A} = \{4\text{ 名同学的生日都不同月}\}.$$

$$P(\bar{A}) = \frac{P_{12}^4}{12^4} = 0.5729,$$

故

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 0.4271.$$

这个结果说明近一半的 4 人寝室中都有人生日在同一个月的.

二、概率的乘法定理

1. 条件概率

定义 1 如果事件 A 与 B 是随机试验的两个事件，且 $P(B)>0$，则称 $P(A \mid B)$ 为事件 B 发生的条件下事件 A 发生的**条件概率**，如图 1－9 所示.

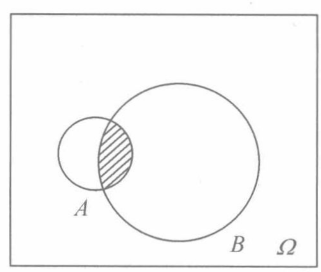

图 1－9

而 $P(A)$ 称为**无条件概率**，为在样本空间 Ω 上求出的概率.

2. 条件概率的计算公式

由图 1－9 不难得出，设 $P(B)>0$，则

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)};$$

同理可得，设 $P(A)>0$，则

$$P(B \mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}.$$

例 3　某电子元件厂有职工 180 人，其中男职工有 100 人，女职工有 80 人，男、女职工中非熟练工人分别有 20 人与 5 人. 现从该厂中任选一名职工，试求：(1) 该职工为非熟练工人的概率；(2) 若已知被选出的是女职工，她是非熟练工人的概率.

解　(1) 设 A 表示"任选一名职工为非熟练工人"，则

$$P(A)=\frac{25}{180}=\frac{5}{36}=0.1389.$$

(2) 由于增加了一个附加的条件，已知被选出的是女职工，记"选出女职工"为事件 B，则题(2) 就是要求出"在已知 B 事件发生的条件下 A 事件发生的概率"，这就要用到条件概率公式，有

$$P(A \mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{5}{180}\div\frac{80}{180}=\frac{1}{16}=0.0625.$$

此题也可考虑用缩小样本空间的方法来做. 既然已知选出的是女职工，那么男职工就可排除在考虑范围之外，因此"事件 B 已发生条件下的事件 A"就相当于在全部女职工中任选一人，并选出了非熟练工人. 从而 Ω_B 样本点总数不是原样本空间 Ω 的 180 人，而是全体女职工人数 80 人，而上述事件中包含的样本点总数就是女职工中的非熟练工人数 5 人，因此所求概率为

$$P(A \mid B)=\frac{5}{80}=\frac{1}{16}=0.0625.$$

例 4　某种动物出生之后活到 20 岁的概率为 0.7，活到 25 岁的概率为 0.56. 试求现年为 20 岁的动物活到 25 岁的概率.

解　设 A 表示"活到 20 岁以上"，B 表示"活到 25 岁以上"，则有

$$P(A)=0.7,\ P(B)=0.56(\text{且 } B \subset A),$$

得

$$P(B \mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)}{P(A)}=\frac{0.56}{0.7}=0.8000.$$

3. 乘法定理

定理 2　(乘法公式)　当 $P(B)>0$ 时，有 $P(AB)=P(A)P(B \mid A)$.

类似地，当 $P(A)>0$ 时，有 $P(AB)=P(B)P(A \mid B)$.

乘法公式只需将条件概率的计算公式变形即可. 乘法公式可以推广到有限个事件同时发生的情形，如对于三个事件 A_1, A_2, A_3，当 $P(A_1A_2)>0$ 时，则有

$$P(A_1A_2A_3)=P(A_1A_2)P(A_3 \mid A_1A_2)=P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1A_2).$$

一般情况下，对于 n 个事件 $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$，当 $P(A_1A_2A_3\cdots A_{n-1})>0$ 时，乘法公式为

$$P(A_1A_2A_3\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1A_2)\cdots P(A_n \mid A_1A_2A_3\cdots A_{n-1}).$$

例 5　一批彩电共 100 台，其中有 10 台次品，采用不放回抽样依次抽取 3 次，每次抽一台. 试求：(1) 第 3 次才抽到合格品的概率；(2) 3 次内抽到合格品的概率.