普通高等教育“十二五”规划教材

数学建模教程

梅正阳　韩志斌　主编

科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材

数学建模教程

梅正阳　韩志斌　主编

科学出版社

北京

内容简介

在全国大学生数学建模竞赛的带动下，数学建模课程在各级各类高校内广泛开设，为理工、经管、农林、医学等专业培养了大量的优秀人才. 本教程的数学理论涵盖运筹优化、微分方程、图论网络、概率论和统计分析等，与大学基础课程相衔接，浅显易懂；用优化软件 LINGO 和数学软件 MATLAB 作为编程工具，为及时掌握这两种数学软件，提供入门级附录，配以原始计算程序，清楚易学，可供初学计算机编程者学习和模仿；教程专门用一章的篇幅，介绍数学建模优秀论文，为读者能较快地了解数学建模论文格式要求和基本规范提供参考；章后配有少量的习题，为读者进入数学建模状态、解决小规模的实际问题、写出数学建模论文提供平台.

本教程按数学模型的几个大模块编写，模块与模块之间相互联系又相对独立，自始至终用实例引导，特别适用于初学者自学；每部分都有完整的程序，适合数学建模基础好的读者参考. 本教程可作为大学生数学建模竞赛培训教材，也可作为数学建模课程教材或教学参考书，还可作为数学实验类的教学辅导用书.

图书在版编目(CIP)数据

数学建模教程/梅正阳，韩志斌主编. 一北京：科学出版社，2012. 8

普通高等教育"十二五"规划教材

ISBN 978-7-03-035167-8

Ⅰ.数… Ⅱ.①梅…②韩… Ⅲ.数学模型—高等学校—教材 Ⅳ.O141.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 164292 号

责任编辑：曾 莉/责任校对：董艳辉 蔡 莹

责任印制：彭 超/封面设计：苏 波

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

武汉市首壹印务有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

开本：B5(720×1000)

2012 年 8 月第 一 版 印张：19

2012 年 8 月第一次印刷 字数：368 000

定价：36.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　言

到 2011 年，国家教育部高等教育司和中国工业与应用数学学会联合主办的全国大学生数学建模竞赛活动已届满 20 周年. 20 年来，数学建模竞赛活动得到了全国各级各类高等学校广大师生的热烈响应，参赛高校数量和参赛队伍数量屡创新高；数模竞赛的赛题来源于社会热点、经济管理、工程设计、生物医学、信息科学等方面，使得象牙塔中的数学理论与日常生活实际紧密结合；数学建模从竞赛走进大学课堂，从大学课堂走向社会各行各业，焕发出勃勃生机.

将纷繁复杂的实际问题加以抽象，用量化的数学表达式刻画实际问题内在的本质特征和规律，将数学理论与计算机技术相结合，获得数学问题的结果后，再返回来解释实际问题，并对实际问题进行预测、估计、调整和控制，这个过程就是数学建模. 因此，数学建模是理论与实际的结合，是数学与计算机的结合，是学习与科研的结合，是能力与素质的结合，是个人与团队的结合.

本书的特点是以够用为原则，以实际问题为引例，以数学建模过程为主线，适当介绍数学知识和数学方法，不追求数学理论的严密性和完整性，适当介绍数学软件和计算机程序，也不追求软件程序的高效性和通用性. 问题、建模、理论、程序等贯穿每一章，彼此之间互为映衬、互相补充，读者通过阅读、模仿和动手编程，会逐渐理解数学建模的涵义，并逐步形成具有自身个性特色的思维方式，为进一步的创新和科研做好准备.

全书共分 8 章，另有 2 个附录. 其中第 1 章是运筹优化模型，与中学线性规划知识相联系，容易入门，优化模型采用 LINGO 和 MATLAB 两种数学软件求解；第 2 章是综合评价模型，介绍层次分析法等常见的综合评价方法；第 3 章是微分方程模型，介绍人口增长模型、房室模型、灰色预测模型等；第 4 章是概率决策模型，介绍各类不确定性决策问题；第 5 章是图论网络模型，介绍最短路、最小生成树等问题；第 6 章是模糊数学模型，介绍模糊聚类和模糊综合评判问题；第 7 章是统计分析模型，介绍回归分析、判别分析、主成分分析等统计分析方法和问题；第 8 章是数学建模论文范例，选取 2 篇不同层次的优秀论文，提供数学建模论文写作样例. 然后是 2 个附录，分别介绍 LINGO 软件和 MATLAB 软件，其中 LINGO 软件常常在解优化问题时用到，其他情况下都要用到 MATLAB 软件. 各章都以简单的实例开头，逐步引入各种理论和方法，然后介绍一个或几个中等规模的实际问题，展示数学建模的威力. 每章后练习题为初学者提供解决实际问题的切入点，并可适当扩展到相关领域.

本教程可作为大学生数学建模课程教材或大学生数学建模竞赛培训教材，也可以作为数学建模爱好者的自学辅导书，各章之间既相互联系又相对独立，各例题的求解基本构成一个相对完整的数学建模论文，特别是例题中的程序，如果读者能够亲自动手操作，一定会加深读者对数学软件的了解和使用，同时，适当修改和改进相关程序，可以对类似的数学模型求解.

本书第 3 章由韩志斌编写，其他各章由梅正阳编写. 由于科学出版社编辑的鼓励和支持，才有了写书的计划和相关资料的积累；在成书过程中，还得到了华中科技大学数学与统计学院刘斌、王以治、何南忠、路志宏等老师的大力协助，在此一并向他们表示感谢！

由于时间仓促，作者水平有限，加之对数学建模精髓的理解不透，对数学建模教学和数学建模竞赛的经验不足，书中错漏之处在所难免，敬请读者批评指正.

编　者

2012 年 5 月 19 日

于启明学院

目　　录

第 1 章　运筹优化模型

运筹优化模型是数学建模常见的模型，相应于实际中的数学规划问题. 线性规划是最基本的数学规划问题，在中学数学就已经学习过简单的线性规划问题. 在运筹学中，除线性规划外，还有整数规划、0-1 规划、非线性规划、目标规划、动态规划等. 本章先介绍一个简单的引例，然后介绍优化问题的基本概念和基本理论，只给出相关的定理结论，不作证明，接下来给出两个案例，介绍数学建模的完整过程，最后适当介绍线性规划之外的其他规划问题.

1.1　优化模型简例

例 1.1　奶制品厂用牛奶加工生产两种奶制品，甲车间生产 A 种奶制品，乙车间生产 B 种奶制品，两车间的加工能力和产量以及两产品的获利情况见表 1.1. 假设工厂每天只能得到 50 桶牛奶供应，每天正式工人总的劳动时间为 480 h. 试制定生产计划，使每天获利最大，并讨论三个附加问题.

表 1.1　例 1.1 生产情况表

	产量	耗时	利润	最大加工量
甲车间 A 产品	3 kg/ 桶	12 h/ 桶	24 元 /kg	100 kg
乙车间 B 产品	4 kg/ 桶	8 h/ 桶	16 元 /kg	无限大
每天总资源	50 桶牛奶，480 h			

(1) 若用 35 元可买到 1 桶牛奶，是否要购买？若购买，每天应购买多少桶牛奶？

(2) 若聘用临时工人可以增加劳动时间，付给临时工人的工资最多是每小时几元？

(3) 如果市场需求增加，A 产品获利增加到 30 元 /kg，问是否应该改变生产计划？

步骤一　问题假设

为制订生产计划，需作如下假设：

假设 1：市场需求不变，不增加临时工人；

假设 2：甲车间每天加工 x_1 桶产品 A，乙车间每天加工 x_2 桶产品 B；

假设 3：只考虑 1 天的生产情况.

步骤二　建立数学模型

目标：每天获利最大，利润 = 单位 A 产品的利润 × A 产量 + 单位 B 产品的利

润 × B 产量，即

$$f = 24 \cdot 3x_1 + 16 \cdot 4x_2$$

原料供应约束：两车间的原料使用量不超过总供应量，即 $x_1 + x_2 \leqslant 50$；

时间资源约束：生产两种产品耗时不超过总时间量，即 $12x_1 + 8x_2 \leqslant 480$；

最大加工能力约束：甲车间的加工量不超过最大加工量，即 $3x_1 \leqslant 100$.

综合得到奶制品生产计划的数学模型：

$$\max f = 72x_1 + 64x_2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 50 \\ 12x_1 + 8x_2 \leqslant 480 \\ 3x_1 \leqslant 100 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

步骤三　模型求解

方法 1：图解法. 因为只有两个变量，且是线性规划问题，可以按照中学图解法求解（略）.

方法 2：单纯形法求解. 单纯形法是比较完善的求解线性规划方法.

方法 3：采用优化软件求解. 常用的优化软件有很多，本教程介绍 LINGO 软件.

求解结果：$x_1 = 20$ 桶，$x_2 = 30$ 桶，利润 $f = 3360$ 元.

附 LINGO 程序和运行结果，如图 1.1 和图 1.2 所示.

```
Model:              !奶制品加工问题Lingo模型;
max=72*x1+64*x2;    !利润目标函数;
x1+x2<=50;          !牛奶资源约束;
12*x1+8*x2<=480;    !时间资源约束;
3*x2<=100;          !甲车间最大加工量约束;
end                 !模型结束;
```

图 1.1　LINGO 程序

```
Global optimal solution found.
Objective value:                              3360.000
Total solver iterations:                             2


                 Variable           Value        Reduced Cost
                       X1        20.00000            0.000000
                       X2        30.00000            0.000000

                      Row    Slack or Surplus      Dual Price
                        1        3360.000            1.000000
                        2        0.000000            48.00000
                        3        0.000000            2.000000
                        4        10.00000            0.000000
```

图 1.2　LINGO 程序运行结果

步骤四　附加问题分析

由 LINGO 程序运行的结果发现：

(1) 模型第 2 行牛奶资源约束的"Dual Price"即"影子价格"为 48，即增加 1 桶牛奶资源可以带来 48 元的利润. 48 大于 35，也就是说，如果市场上 35 元能买 1 桶牛奶，应该去购买.

(2) 模型第 3 行时间资源约束的"Dual Price"为 2，即增加 1 小时工时资源可以带来 2 元的利润，所以，如果增加临时工人，则临时工人每小时的工资不超过 2 元.

(3) 如果产品 A 的利润增加到 30 元 /kg，重新计算，发现利润增加到 3720 元，但 A，B 的生产计划不变，仍然是 20 桶牛奶生产 A，30 桶牛奶生产 B.

步骤五　进一步分析

至步骤四，已经解决了题目所提出的问题，但是，"数学建模"的任务还没有完成，还应该进一步深入分析，例如：① 到市场上购买 35 元 1 桶的牛奶，最多购买几桶？② 如果市场上牛奶 40 元 1 桶，最多又该购买几桶？即应该分析出：在生产计划不变的前提下，给出市场上不同价格牛奶的不同购买量. 同样应该分析时间资源问题，分析单位产品利润发生变化情况下的应对策略.

另外，同样的模型也可以用数学软件 MATLAB 求解，程序和结果如图 1.3 和图 1.4 所示.

```
clear;      %清理内存
c=[72;64];%目标函数系数矩阵
a=[1,1;12,8;0,3];%不等式约束系数阵
b=[50;480;100];  %不等式约束右端阵
%调用线性规划求解函数
x=linprog(-c,a,b,[],[],zeros(2,1))
f=c'*x              %输出目标函数值
```

图 1.3　MATLAB 程序

```
>> myex1_1_1
Optimization terminated.
x =
   20.0000
   30.0000
f =
  3.3600e+003
>>
```

图 1.4　MATLAB 程序运行结果

1.2　线性规划基本理论

随着科学技术的不断发展，在人们的生产生活、经济管理和社会实践中，经常会遇到如何合理地利用有限的人力、物力、资金等资源来安排生产，以尽可能低的成本获得尽可能大的经济效益等问题. 此类问题构成了运筹学的一个重要分支——数学规划. 数学规划包括线性规划、非线性规划、整数规划、目标规划、动态规划等，其中线性规划(Linear Programming，简记为 LP) 是数学规划中最简单、最重要和最成熟的分支之一. 自从 1947 年 G. B. Dantzig 提出求解线性规划的单纯形方法以来，线性规划在生产实际中的使用日益广泛. 特别是在计算机技术不断发展的今

天,各种求解数学规划的软件不断涌现,这些软件能处理具有成千上万个约束条件和决策变量的线性规划和非线性规划问题,数学规划的适用领域越来越广泛.在数学建模中,数学规划是常见的问题之一,本节简要介绍线性规划的基本理论结果,不作严格的证明,有兴趣的读者可以查找相关的参考资料.

1.2.1　线性规划基本概念

对于例 1.1 的奶制品生产计划数学模型(1.1):

$$\max f = 72x_1 + 64x_2$$
$$\text{s. t.}\begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 50 \\ 12x_1 + 8x_2 \leqslant 480 \\ 3x_1 \leqslant 100 \\ x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

引入**松弛变量**(slack variable) 或**剩余变量**(surplus variable),将不等式化为等式,得到标准化的形式为

$$\max f = 72x_1 + 64x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5$$
$$\text{s. t.}\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 50 \\ 12x_1 + 8x_2 + x_4 = 480 \\ 3x_1 + x_5 = 100 \\ x_i \geqslant 0, i = 1,2,\cdots,5 \end{cases}$$

一般情况下,线性规划问题(LP) 的**标准化数学模型**为

$$\max\ (\min) f = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \Rightarrow f = \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{X} \tag{1.2}$$

$$\text{s. t.}\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{AX} = \boldsymbol{b} \tag{1.3}$$

$$x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, \cdots, x_n \geqslant 0 \Rightarrow \boldsymbol{X} \geqslant \boldsymbol{0} \tag{1.4}$$

其中 $\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 称为**决策变量**(decision variable),一般取非负实数值,每一组值都表示一个具体方案;$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ 和 $\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} = (b_1, b_2, \cdots, b_m)$ 分别为(1.3) 的系数矩阵和右端项矩阵.

线性规划模型的共同特点:

(1) 都可以用一组变量表示,这组未知变量即决策变量,它们的不同线性组合

表示一个具体方案；

(2) 都有一个目标要求，即目标函数，按研究的问题不同，要实现目标函数的最大值或最小值；

(3) 都有人力、物力、资金等限制，这些限制可以用一组线性等式或不等式表达，即约束条件；

(4) 都必须完整地用数学语言描述出来，即通常所说的线性规划问题的数学模型(1.2) ~ (1.4).

称(1.2) 为**目标函数**(object function)，即需要被优化(最大化或最小化) 的线性函数，此函数一般与所有的决策变量都有关，极少数情况下只涉及部分决策变量，最大化和最小化之间可以通过 $f' = -f$ 进行转化；$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} = (c_1, c_2, \cdots, c_n)$ 为目标函数的系数矩阵(向量).

称(1.3) 为**约束条件**(constraint condition)，由一组线性的等式和不等式构成，表示实际问题受人力、物力、时间等资源的限制，决策的结果不能超越的条件；任何不等式约束都可以通过增加松弛变量修改为等式约束.

称(1.4) 为决策变量的**非负约束**，即决策变量的取值必须非负，最少是 0；实际问题中决策变量如果要求取负值，也可以利用 $y_i = -x_i$ 进行转化，LINGO 软件也可以放松该假设.

满足(1.3) 和(1.4) 的解称为(LP) 的**可行解**；所有可行解的集合称为**可行集**或**可行域**；满足(1.2) 的可行解称为**最优解**.

1.2.2　线性规划基本性质

(1) **线性性**. 即目标函数(1.2) 和约束条件(1.3) 都必须是决策变量的线性形式，如果(1.2) 或(1.3) 中的任何一个约束不满足决策变量的线性关系，那么这个规划问题就称为非线性规划.

(2) **可分割性**. 在一个可接受的解决方案中，决策变量的取值要满足线性约束条件，小数解可以接受. 如果不允许决策变量取小数或分数，只能取整数，那么这样的规划问题就称为整数规划；如果决策变量只允许取 0 或 1，那么这样的规划问题就称为 0-1 规划；如果部分变量有特殊要求，则称为混合规划.

(3) **确定性**. 目标函数和约束条件中的所有系数都必须是确定的，这是一个很强的假设；在求出问题的解后，我们可以讨论参数的变化对最优解的影响，但这并不意味着系数是不确定的；如果目标函数的系数或约束条件中的系数具有不确定性或模糊性，那么这样的问题将属于随机规划问题或者模糊规划问题，需要相关的知识进行求解.

(4) **可行性**. 线性规划问题不能保证一定可以找到最优解，软件求解常见的结果是解决方案无界(unbounded) 或不可行(infeasible)，有时甚至可行解集为空集.