高等学校教材

ANALYTIC GEOMETRY TUTORIAL

解析几何教程

蔡国梁 苗宝军 史雪荣 主编

江苏大学出版社
JIANGSU UNIVERSITY PRESS

省级精品课程培育项目教材

解析几何教程

ANALYTIC GEOMETRY TUTORIAL

主编　蔡国梁　苗宝军　史雪荣

江苏大学出版社
JIANGSU UNIVERSITY PRESS
镇　江

内 容 提 要

本教程根据国家教育部提出的“高等教育面向21世纪教学内容和课程教学改革计划”的精神，参考和汲取了现行解析几何教材的优点，结合数十年的教学经验和体会，以及国家省市和学校教改项目的实践成果编写而成. 本教程具有以下特点：① 论述详细，举例丰富，符合高等教育大众化背景下对学生的基本要求. ② 内容全面，可塑性强，适应不同层次的教学要求. ③ 注意与中学平面解析几何的衔接. ④ 结合多年解析几何教学改革经验与成果. ⑤ 注重理论性与应用性相结合. ⑥ 拓宽学生视野，培养综合素质. ⑦ 考虑多媒体等现代化的教学要求.

本教程内容包括空间直角坐标系、向量代数、空间平面与直线、空间曲面和曲线、一般二次曲线理论、空间直角坐标变换和点变换、一般二次曲面理论等. 每章附有应用示例、数学史话、内容小结等，配有习题和自我测验题. 书末附有行列式和矩阵知识，以及习题和自我测验题参考答案.

本教程可作为高等学校数学类各专业方向的解析几何教材，也可作为相关专业的教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

解析几何教程/蔡国梁，苗宝军，史雪荣主编. —镇江：江苏大学出版社，2012.8
ISBN 978-7-81130-359-9

Ⅰ.①解… Ⅱ.①蔡… ②苗… ③史… Ⅲ.①解析几何—高等学校—教材 Ⅳ.①O182

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第194600号

解析几何教程
JIEXI JIHE JIAOCHENG

主　　编/蔡国梁　苗宝军　史雪荣
责任编辑/张小琴　吴昌兴
出版发行/江苏大学出版社
地　　址/江苏省镇江市梦溪园巷30号(邮编：212003)
电　　话/0511-84446464(传真)
网　　址/http://press.ujs.edu.cn
排　　版/镇江文苑制版印刷有限责任公司
印　　刷/扬中市印刷有限公司
经　　销/江苏省新华书店
开　　本/710 mm×1 000 mm　1/16
印　　张/16.25
字　　数/343千字
版　　次/2012年8月第1版　2012年8月第1次印刷
书　　号/ISBN 978-7-81130-359-9
定　　价/29.00元

如有印装质量问题请与本社营销部联系(电话：0511-84440882)

前　言

解析几何、数学分析和高等代数是高等学校数学专业的三大主要基础课程，被称为数学专业学生的看家本领．解析几何是古典数学与近代数学的里程碑，是常量数学与变量数学的分水岭，被恩格斯赞誉为“数学中的转折点”．

为了适应新形势下解析几何课程的要求，编者根据国家教育部提出的“高等教育面向21世纪教学内容和课程教学改革计划”的精神，参考和汲取了现行解析几何教材的优点，结合数十年的教学经验和体会，以及主持和参加国家、省、市和学校教改项目的实践成果，编写出版了本教程．

本教程具有以下特点：① 论述详细，举例丰富，符合高等教育大众化背景下对学生的基本要求．② 内容全面，可塑性强，适应不同层次的教学要求．教程的前3章是基本内容，后3章是选学内容，不同层次高等学校的不同专业可根据具体情况选讲其中一部分或全部内容．打“*”的章节，教师可根据情况选讲或由学生自学，灵活进行处理．③ 重视与中学平面解析几何的衔接．如空间和平面坐标系、空间和平面向量、空间和平面几何图形等，适时进行比较分析，既起到温故知新的作用，又使得学生在原有基础上得以提高，培养学生的空间想象能力和逻辑思维能力．④ 结合多年解析几何教学改革的实践与成果．编者将多年从事教学工作积累的丰富教学经验，主持和参加多项国家、省、市和学校教改课题取得的可喜实践经验和研究成果，融入到本教程的编写中．⑤ 注意理论性与应用性相结合．数学来自于实践而又高于实践，其生命在于实践．本教程通过应用示例等多种形式，把理论知识和实际应用紧密结合，力求达到举一反三、增加学生知识、提高学习兴趣的目的，以培养学生运用所学知识解决实际问题的意识和能力．⑥ 拓宽学生视野，培养综合素质．利用阅读材料数学史话等，使学生了解一些数学发展史，培养学生的综合素质，适应新形势下对学生宽口径综合性的要求．⑦ 顺应多媒体等现代化的教学要求．与教程配套的有相应的电子教材和多媒体电子教学课件，进一步还有网络教学课件，为使用本教程的教师运用多媒体等现代化手段教学奠定了坚实的基础，为学生利用计算机网络等现代化学习工具创

造了有利条件，以顺应高等教育现代化教学的发展趋势.

本教程由蔡国梁、苗宝军、史雪荣主编. 江苏大学蔡国梁教授编写第 1、第 4 章，许昌学院苗宝军副教授编写第 2、第 5 章，盐城师范学院史雪荣副教授编写第 3、第 6 章，全书由蔡国梁教授统稿. 本教程的编写工作得到了各编写学校的大力支持，江苏大学出版社编辑为本教程的出版倾注了大量的心血，付出了辛勤劳动，谨此表示衷心的感谢！在教程的编写过程中，参考和借鉴了很多现行解析几何教材和有关的教学改革文献，特表示敬意和感谢！

由于编者水平有限，本教程中难免会有不足之处，欢迎广大教师、学生、同行和专家批评指正.

编　者

2012 年 6 月

目　录

1 空间直角坐标与向量代数

解析几何最基本的思想是用代数的方法来研究几何问题，最基本的方法是坐标法，最基本的工具是向量．通过在几何空间中建立坐标系，使得点与坐标 1-1 对应，在几何与代数之间架起桥梁，把它们沟通起来，由此几何问题就可以转化为代数问题，这就是坐标法的基本思想．17 世纪初，法国数学家笛卡尔（Descartes）和费马（Fermat）利用这种思想研究几何图形，创立了解析几何．从此变数被引进了数学，成为数学发展中的转折点，为微积分的创立奠定了基础．本章首先建立空间直角坐标系，然后引入向量的概念，并讨论向量的运算及其规律．

向量代数不仅是研究空间解析几何的重要工具，同时也是力学、物理学和其他工程技术中解决问题的有力工具．

1.1 空间直角坐标

1.1.1 平面直角坐标系的回顾

在平面解析几何中，为了用代数的方法研究平面上的几何问题，建立了二维（平面）直角坐标系．

在平面上，作两条互相垂直且相交于点 O 的数轴 Ox 和 Oy，它们都具有相同的长度单位．它们的交点 O 称为坐标原点，这两条数轴分别称为 x 轴（横轴）和 y 轴（纵轴），统称为坐标轴．这样的两条坐标轴就组成了一个平面直角坐标系，记作 $O\text{-}xy$（如图 1-1 所示）．

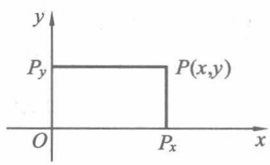

图 1-1

平面直角坐标系是由两两垂直、相交于一点而且带有单位长度的两条有向直线构成．

设 P 是平面上任意一点，过 P 作 x 轴、y 轴的垂线，分别交两轴于点 P_x 和 P_y，这两点在 x 轴、y 轴上的坐标分别为 x,y. 于是，点 P 就唯一确定了一个有序实数组 (x,y)，称有序数组 (x,y) 为点 P 的坐标，记作 $P(x,y)$. 这样，就建立了平面上点与坐标的 1-1 对应关系.

1.1.2 空间直角坐标系

为了用代数方法研究空间图形，首先必须建立空间直角坐标系，空间直角坐标系是平面直角坐标系的自然拓广.

在空间中，作三条互相垂直且相交于点 O 的数轴 Ox，Oy 和 Oz，且都具有相同的长度单位. 它们的交点 O 称为坐标原点，这三条数轴分别称为 x 轴(横轴)，y 轴(纵轴)与 z 轴(竖轴)，统称为坐标轴(如图 1-2 所示). 三个轴的正向按右手螺旋法则确定，即以右手握住 z 轴，当右手四指从 x 轴正向以 $\frac{\pi}{2}$ 角度转向 y 轴正向时，右手大拇指的指向就是 z 轴的正向(如图 1-3 所示). 这样的三条坐标轴就组成了一个右手笛卡尔空间直角坐标系，记作 $O\text{-}xyz$.

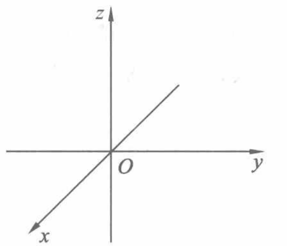

图 1-2

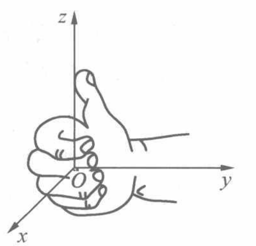

图 1-3

定义 在空间中，由两两垂直、相交于一点而且带有单位长度的三条有向直线构成**空间直角坐标系**，记作 $O\text{-}xyz$.

在空间直角坐标系中，任意两个坐标轴所确定的平面称为坐标平面. 显然，空间直角坐标系中有三个坐标平面，分别称为 xOy 面，yOz 面和 zOx 面，简称 xy 面，yz 面和 zx 面. 这三个坐标平面把空间分成八个部分，每一部分称为一个卦限. 这八个卦限分别用罗马字母Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ，Ⅴ，Ⅵ，Ⅶ，Ⅷ表示(如图 1-4 所示). 并规定Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ卦限在 xy 面上方，含有 x 轴、y 轴、z 轴正半轴的卦限称为第Ⅰ卦限，其余依逆时针方向确定；Ⅴ，Ⅵ，Ⅶ，Ⅷ卦限

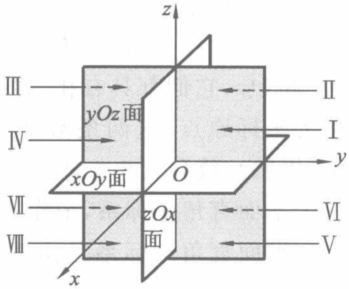

图 1-4

在 xy 面下方，与前面的四个卦限依次对应.

空间直角坐标系的作图通常有两种基本方法：正等测法和斜二测法. 正等测法三个坐标轴的夹角均为$\frac{2\pi}{3}$，各轴单位长度相等；斜二测法如图 1-2 所示，y 轴和 z 轴夹角为$\frac{\pi}{2}$，单位长度为 1，x 轴与 y 轴的夹角为$\frac{3\pi}{4}$，单位长度为 $\cos\frac{\pi}{4}\approx 0.714$.

1.1.3 空间点的坐标

建立空间直角坐标系之后，就可以定义空间点的坐标了.

设 P 为空间直角坐标系中的任意一点，过点 P 分别作与 x 轴、y 轴和 z 轴垂直的平面，它们与三个坐标轴的交点分别记作 P_x, P_y, P_z（如图 1-5 所示）. 这三个点在 x 轴、y 轴、z 轴上的坐标分别为 x，y，z，于是，空间的点 P 就唯一确定了一个有序实数组 (x,y,z).

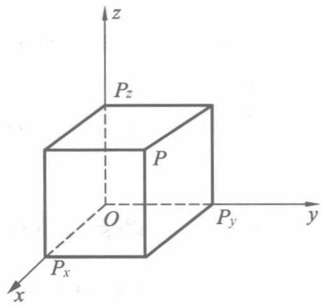

图 1-5

反过来，任给一组有序数组 (x,y,z)，可以先分别在 x 轴、y 轴、z 轴上找到对应的点 P_x, P_y, P_z，然后过此三点分别作 x 轴、y 轴、z 轴的垂面，这三个垂直平面必相交于唯一的一点 P. 这样，通过直角坐标系，就建立了空间的点 P 与一组有序数组 (x,y,z) 之间的 1-1 对应关系. 这组有序实数 (x,y,z) 就称为**空间点 P 的直角坐标**，简称为**点 P 的坐标**，通常记作 $P(x,y,z)$，其中 x,y,z 分别称为点 P 的横坐标、纵坐标和竖坐标.

这样就建立了最基本的空间图形"点"与"数"之间的关系，即给出空间的点 P，就有一个有序数组 (x,y,z) 与之相对应. 例如，原点的坐标为 $O(0,0,0)$，三个坐标轴上正向单位点的坐标分别为 $(1,0,0)$，$(0,1,0)$ 和 $(0,0,1)$. 坐标轴和坐标平面上的点，其坐标也各有一定的特征：坐标轴上的点有两个坐标为零，如 x 轴上点的坐标为 $(x,0,0)$，有 $y=z=0$；坐标平面上的点有一个坐标为零，如 yz 面上点的坐标为 $(0,y,z)$，有 $x=0$. 反之，有两个坐标为零的点一定在坐标轴上，有一个坐标为零的点一定在坐标平面上. 此外，八个卦限中点的坐标的正负号也是各不相同，并有一定规律可循，各卦限中点的坐标的正负号参见表 1-1.

表 1-1

卦限	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ	Ⅴ	Ⅵ	Ⅶ	Ⅷ
符号	(+,+,+)	(−,+,+)	(−,−,+)	(+,−,+)	(+,+,−)	(−,+,−)	(−,−,−)	(+,−,−)

根据空间点的坐标的定义和八个卦限点的坐标的符号，可以分别得到空间中任一点 $P(x,y,z)$关于三个坐标轴、三个坐标平面和原点的对称点的坐标，请读者自行给出答案.

例 1 指出点 $P(2,-1,-3)$所在的卦限，并求出它关于 xz 面、y 轴、原点和点 $M(x_0,y_0,z_0)$的对称点的坐标.

解 点 $P(2,-1,-3)$所在的卦限为第Ⅷ卦限.

它关于 xz 面的对称点的坐标是$(2,1,-3)$；

关于 y 轴的对称点的坐标是$(-2,-1,3)$；

关于原点的对称点的坐标是$(-2,1,3)$；

关于点 M 的对称点的坐标是 $M'(2x_0-2,2y_0+1,2z_0+3)$.

例 2 自点 $N(x_0,y_0,z_0)$分别作 xz 面和 y 轴的垂线，求垂足的坐标.

解 自点 N 作 xz 面的垂线，垂足的坐标是 $N'(x_0,0,z_0)$.

自点 N 作 y 轴的垂线，垂足的坐标是 $N''(0,y_0,0)$.

1.1.4 空间两点之间的距离

建立了空间直角坐标系并规定了点的坐标之后，就可以推导出空间中两点间的距离公式.

设 $P_1(x_1,y_1,z_1)$，$P_2(x_2,y_2,z_2)$为空间中的两个点，它们之间的距离记作 $d=|P_1P_2|$.

过 P_1，P_2 各作三个分别垂直于三条坐标轴的平面，这六个平面围成一个以 P_1P_2 为对角线的长方体(如图 1-6 所示). 根据勾股定理，容易求得长方体对角线的长度.

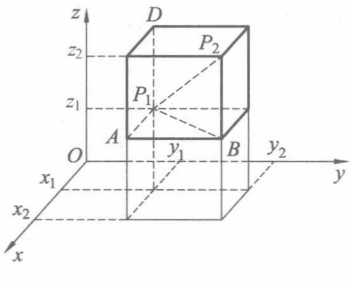

图 1-6

如图 1-6 可知，

$$|P_1A|=|x_2-x_1|,\ |AB|=|y_2-y_1|,\ |BP_2|=|z_2-z_1|,$$

在 $\mathrm{Rt}\triangle P_1AB$ 中，

$$|P_1B|^2=|P_1A|^2+|AB|^2,$$

在 $\mathrm{Rt}\triangle P_1BP_2$ 中，

$$|P_1P_2|^2=|P_1B|^2+|BP_2|^2,$$

于是

$$\begin{aligned} d^2&=|P_1P_2|^2=|P_1A|^2+|AB|^2+|BP_2|^2\\ &=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2, \end{aligned}$$

所以

$$d=|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \tag{1.1-1}$$

这就是**空间中两点间的距离公式**，它是平面上两点间距离公式的推广.

特别地,空间中任一点 $P(x,y,z)$ 到原点 $O(0,0,0)$ 的距离为

$$d=|OP|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}. \tag{1.1-2}$$

与平面解析几何一样,空间中两点间的距离公式是一个重要公式,被称为空间解析几何的基本公式.它是描述空间动点运动轨迹的重要手段,而且很多空间几何问题的讨论都会涉及它.

例 3 试证以 $A(4,1,9)$,$B(10,-1,6)$,$C(2,4,3)$ 为顶点的三角形是等腰直角三角形.

证明

$$|AB|^2=(10-4)^2+(-1-1)^2+(6-9)^2=49,$$
$$|AC|^2=(2-4)^2+(4-1)^2+(3-9)^2=49,$$
$$|BC|^2=(2-10)^2+(4+1)^2+(3-6)^2=98.$$

因为 $|AB|^2+|AC|^2=|BC|^2$,且 $|AB|=|AC|$,

所以 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形.

例 4 在 y 轴上求到点 $A(-3,2,7)$ 和 $B(3,1,-7)$ 等距离的点.

解 因为所求点在 y 轴上,故设该点的坐标为 $P(0,y,0)$,依题意有 $|PA|=|PB|$,即

$$(0+3)^2+(y-2)^2+(0-7)^2=(0-3)^2+(y-1)^2+(0+7)^2,$$

化简得

$$-2y+3=0,$$

解之得

$$y=\frac{3}{2}.$$

故所求点为 $P\left(0,\frac{3}{2},0\right)$.

1.2 向量的概念及线性运算

1.2.1 向量的概念

数学来自于实践而又高于实践.在力学、物理学及日常生活中,经常会遇到许多量.除了像温度、时间、长度、面积、体积等只有大小没有方向的量称为数量外,还有一些比较复杂的量,例如力、力矩、位移、速度、加速度等,它们不但有大小,而且还有方向,这种量就是向量.在中学已经学习了平面向量,本节在其基础上介绍空间向量.在学习中要注意空间向量与平面向量的区别与联系.

定义 1 既有大小又有方向的量称为**向量**,或称**矢量**.

用有向线段来表示向量,有向线段的长度表示向量的大小,有向线段的方向

(即从起点 P_1 到终点 P_2 的方向)表示向量的方向,记作$\overrightarrow{P_1P_2}$,这种表示法称为向量的几何表示法(如图1-7所示).有时也用粗体字母或一个上面加箭头的字母表示向量,如 $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x}$ 或$\vec{a}$,$\vec{b}$,$\vec{x}$ 等.大小和方向称为向量的两个要素.

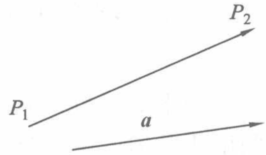

图 1-7

在许多问题中,研究向量时只考虑它的大小和方向,而不考虑它的起点位置,这种向量称为自由向量. 也就是说,自由向量可以任意自由平行移动,移动后的向量仍然代表原来的向量. 在自由向量的意义下,相等的向量都看作是同一个向量. 由于自由向量始点的任意性,按照需要可以选取某一点作为所研究的一些向量的公共始点. 在这种场合,就将那些向量归结到共同的始点. 在本书中,如果不是特别指明,所讨论的向量都是指自由向量.

向量的大小也称为**向量的模**,记作$|\overrightarrow{P_1P_2}|$或$|\boldsymbol{a}|$.模等于 1 的向量称为**单位向量**(或**幺矢**),与 $\boldsymbol{a}$ 具有相同方向的单位向量记作 $\boldsymbol{a}^\circ$.

模为零的向量称为**零向量**,记作 $\boldsymbol{0}$,规定零向量的方向是任意的.相应地,把模不为零的向量称为非零向量.

如果两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的模相等,方向相同,就称这两个向量是**相等向量**,记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.设 $\boldsymbol{a}$ 为一向量,与 $\boldsymbol{a}$ 的模相等而方向相反的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的**负向量**(或**反向量**),记作$-\boldsymbol{a}$.

两个非零向量如果方向相同或者相反,就称这两个向量平行(或共线),记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$.在自由向量的定义下,平行于同一直线的一组向量称为**平行向量**(或**共线向量**).

平行于同一平面的一组向量称为**共面向量**. 显然,零向量与任何共面的向量组共面;一组共线向量一定是共面向量;三个向量中如果有两个向量共线,这三个向量一定也是共面的.

例 1 如图 1-8 所示,设$\triangle ABC$ 和$\triangle A'B'C'$分别是三棱台 ABC-$A'B'C'$的上、下底面,试在向量$\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{BC}$,$\overrightarrow{CA}$,$\overrightarrow{A'B'}$,$\overrightarrow{B'C'}$,$\overrightarrow{C'A'}$,$\overrightarrow{AA'}$,$\overrightarrow{BB'}$,$\overrightarrow{CC'}$中找出共线向量和共面向量.

解 共线向量有 3 组:$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{A'B'}$;$\overrightarrow{BC}$和$\overrightarrow{B'C'}$;$\overrightarrow{CA}$和$\overrightarrow{C'A'}$.

共面向量有 7 组:$\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{BC}$,$\overrightarrow{CA}$,$\overrightarrow{A'B'}$,$\overrightarrow{B'C'}$和$\overrightarrow{C'A'}$;$\overrightarrow{AA'}$,$\overrightarrow{CC'}$,$\overrightarrow{CA}$和$\overrightarrow{C'A'}$;$\overrightarrow{AA'}$,$\overrightarrow{BB'}$,$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{A'B'}$;$\overrightarrow{BB'}$,$\overrightarrow{CC'}$,$\overrightarrow{BC}$和$\overrightarrow{B'C'}$;$\overrightarrow{CA}$,$\overrightarrow{C'A'}$和$\overrightarrow{BB'}$;$\overrightarrow{BC}$,$\overrightarrow{B'C'}$和$\overrightarrow{AA'}$;$\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{A'B'}$和$\overrightarrow{CC'}$.

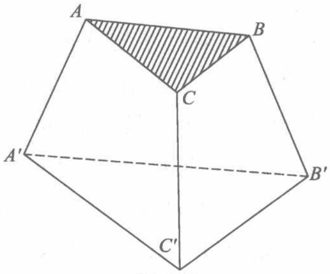

图 1-8

1.2.2 向量的加减法

1）向量加法的平行四边形法则和三角形法则

定义 2 已知两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，取定一点 O，作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，以$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$为邻边作平行四边形 $OACB$（如图 1-9 所示），则对角线向量$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$ 称为**向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的和**，记作 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$.

这样得到两个向量和的方法称为向量加法的**平行四边形法则**，它源自于力学上求合力的平行四边形法则. 平行四边形法则的核心思想是以两个向量为邻边作平行四边形.

定义 3 已知两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，取定一点 O，作$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，以$\overrightarrow{OA}$的终点 A 为起点作$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$，连结 OC，得 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}=\overrightarrow{OC}$（如图 1-10 所示）.

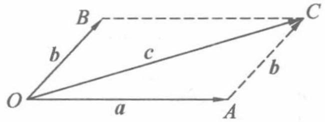

图 1-9

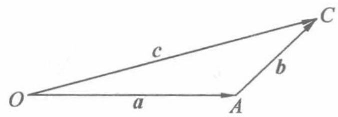

图 1-10

这种方法称为两个向量加法的**三角形法则**，它源自于物理学中求两个位移的合成. 三角形法则的核心思想是以两向量为邻边作三角形.

向量的加法满足下列运算规律：

（1）**交换律**：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；

（2）**结合律**：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

事实上，按照向量加法的三角形法则，由图 1-9 可见

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}.$$

另一方面，在图 1-9 中，由于 $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{BC}$，

故
$$\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}.$$

从而得交换律成立.

对于结合律，如图 1-11 所示，先作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 再加上 $\boldsymbol{c}$，即得和$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$；如以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ 相加，则得相同的结果，所以结合律成立.

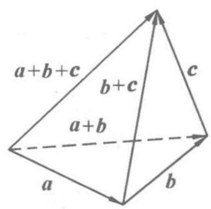

图 1-11

2）多个向量求和的多边形法则

由于向量的加法满足交换律和结合律，三角形法则可以推广到有限个向量 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，…，$\boldsymbol{a}_n$ 的和. 从任意点 O 开始，依次引$\overrightarrow{OA_1}=\boldsymbol{a}_1$，$\overrightarrow{A_1A_2}=\boldsymbol{a}_2$，…，$\overrightarrow{A_{n-1}A_n}=\boldsymbol{a}_n$，得一折线 $OA_1A_2\cdots A_n$（如图 1-12 所示），则向量$\overrightarrow{OA_n}=\boldsymbol{a}$ 就是 n 个向量的和：