北京邮电大学高等数学双语教学组◎编

Advanced Mathematics（II）

高等数学（下）

北京邮电大学出版社
www.buptpress.com

013028180

013
524
V2

高等数学(下)

北京邮电大学高等数学双语教学组　编

北京航空航天大学
★ 藏书 ★
图书馆

北京邮电大学出版社
www. buptpress. com

013
524
V2

北航　C1637396

内 容 提 要

本书是根据国家教育部非数学专业数学基础课教学指导分委员会制定的工科类本科数学基础课程教学基本要求编写的教材，全书分为上、下两册，此为下册，主要包括微分方程、向量与空间解析几何、多元函数的微分和应用、重积分、曲线积分与曲面积分．本书对基本概念的叙述清晰准确，对基本理论的论述简明易懂，例题习题的选配典型多样，强调基本运算能力的培养及理论的实际应用．本书可作为高等理工科院校非数学类专业本科生的教材，也可供其他专业选用和社会读者阅读．

图书在版编目(CIP)数据

高等数学．下/北京邮电大学高等数学双语教学组编．--北京：北京邮电大学出版社，2013．1

ISBN 978-7-5635-3367-1

Ⅰ．①高…　Ⅱ．①北…　Ⅲ．①高等数学—双语教学—高等学校—教材　Ⅳ．①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 315855 号

书　　名：高等数学(下)
作　　者：北京邮电大学高等数学双语教学组
责任编辑：赵玉山
出版发行：北京邮电大学出版社
社　　址：北京市海淀区西土城路 10 号(邮编：100876)
发 行 部：电话：010-62282185　传真：010-62283578
E-mail：publish@bupt.edu.cn
经　　销：各地新华书店
印　　刷：北京源海印刷有限责任公司
开　　本：787 mm×960 mm　1/16
印　　张：18.25
字　　数：394 千字
印　　数：1—3 000 册
版　　次：2013 年 1 月第 1 版　2013 年 1 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5635-3367-1　　　　定　价：37.00 元

· 如有印装质量问题，请与北京邮电大学出版社发行部联系 ·

前　言

关于高等数学

高等数学(微积分)是一门研究运动和变化的数学,产生于16世纪至17世纪,是受当时科学家们在研究力学问题时对相关数学知识的需要而逐渐发展起来的.高等数学中微分处理的目的是求已知函数的变化率的问题,例如,曲线的斜率、运动物体的速度和加速度等;而积分处理的目的则是在当函数的变化率已知时,如何求原函数的问题,例如,通过物体当前的位置和作用在该物体上的力来预测该物体的未来位置,计算不规则平面区域的面积,计算曲线的长度等.现在,高等数学已经成为高等院校学生尤其是工科学生最重要的数学基础课程之一,学生在这门课程上学习情况的好坏对其能否顺利学习后续课程有着至关重要的影响.

关于本书

本书是我们编写的英文"高等数学"的中译本,以便于接受双语数学教学的学生能够对照英文教材进行预习、复习或自习.本书的所有作者都在北京邮电大学主讲了多年的双语"高等数学"课程,获得了丰富的教学经验,了解学生在学习双语"高等数学"课程中所面临的问题与困难.本书函数、空间解析几何及微分部分由张文博、王学丽和朱萍三位副教授编写,级数、微分方程及积分部分则由艾文宝教授和袁健华副教授编写,全书由孙洪祥教授审阅校对.此外,本书在内容编排和讲解上适当吸收了欧美国家微积分教材的一些优点.由于作者水平有限,加上时间匆忙,书中出现一些错误在所难免,欢迎并感谢读者通过邮箱(jianhua-yuan@bupt.edu.cn)指出错误,以便我们及时纠正.

致谢

本书在编写过程中得到北京邮电大学、北京邮电大学理学院和国际学院的教改项目资金支持,作者在此表示衷心感谢.同时也借此机会,感谢所有在本书写作过程中支持和帮助过我们的同事和朋友.

致学生的话

高等数学的学习没有捷径可走,它需要你们付出艰苦的努力.只要你能勤奋学习并持之以恒,定能取得成功.希望你们能喜欢这本书,并预祝你们取得成功!

目　　录

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

第 7 章

微分方程

通常,我们在研究事物的变化规律时，首先根据问题的特殊性质及其相关知识建立数学模型. 有关连续量变化规律的数学模型往往是含有函数导数或者微分的关系式，这样的关系式就是微分方程，而所研究的变化规律,就是微分方程满足一定条件的解. 求出满足该微分方程的未知函数就是解微分方程. 在前面讲过的已知导函数 $f(x)$求原函数 $F(x)$的问题,实际上就是用不定积分求解最简单的微分方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x).$$

可以看出,求解微分方程的基本思路主要运用“积分”这一工具. 在本章中我们先介绍微分方程的基本概念，然后重点阐述几类微分方程的积分求解.

7.1 微分方程的基本概念

7.1.1 微分方程举例

首先,通过两个实例来介绍有关微分方程的基本概念.

例 7.1.1 设 xOy 平面上某一曲线通过点(1,2),且在任意点 $P(x,y)$处的切线斜率都是 $2x$. 求该曲线的方程.

解 由导数的几何意义,所求曲线 $y=f(x)$应该满足

$$\frac{dy}{dx}=2x \quad 或 \quad dy=2x dx. \tag{7.1.1}$$

这一方程涉及了未知函数 $y=f(x)$的导函数(或微分). 将式(7.1.1)两边对 x 积分得

$$y=\int 2x dx = x^2+C, \tag{7.1.2}$$

其中 C 是任意常数.

等式（7.1.2）表示一族曲线.由于所求曲线过点(1,2)，即

$$x=1,\qquad y=2. \tag{7.1.3}$$

将式(7.1.3)代入式(7.1.2)得

$$2=1+C,$$

于是

$$C=1.$$

因此，所求曲线方程为

$$y=x^2+1. \tag{7.1.4}$$

例 7.1.2 设一质量为 m 的质点从高度 H 处自由下落(见图 7.1.1)，其初速度为 V_0. 若空气阻力忽略不计，试求在下落过程中任意时刻 t 质点的高度 $h(t)$.

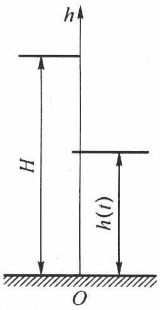

图 7.1.1

解 设质点开始下落的时刻为初始时刻 $t=0$，且在下落过程中任意时刻 t 质点的高度为 $h=h(t)$. 根据牛顿定律，h 满足以下方程：

$$m\frac{\mathrm{d}^2h}{\mathrm{d}t^2}=-mg,$$

或

$$\frac{\mathrm{d}^2h}{\mathrm{d}t^2}=-g. \tag{7.1.5}$$

为求 $h(t)$，将式(7.1.5)两边积分得

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=-gt+C_1. \tag{7.1.6}$$

再次积分得

$$h=-\frac{1}{2}gt^2+C_1t+C_2, \tag{7.1.7}$$

其中 C_1 与 C_2 都是任意常数.

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

所求函数 $h(t)$ 需满足以下两个附加条件，称为**初始条件**：

$$h\big|_{t=0}=H;\quad V\big|_{t=0}=\left.\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=V_0. \tag{7.1.8}$$

将这些条件代入式(7.1.7)得

$$C_1=V_0,\quad C_2=H.$$

因此所求的函数 $h(t)$ 为

$$h(t)=-\frac{1}{2}gt^2+V_0t+H, \tag{7.1.9}$$

式(7.1.9)就是物理学里经典的自由落体运动中物体下落过程中高 h 随时间 t 变化的一般规律.

7.1.2　基本概念

由上述两个实例我们可以得到有关微分方程的几个基本概念.

定义 7.1.3 (微分方程). 微分方程是含有未知函数的导数或微分的方程.

用符号表示，微分方程可写为

$$F(x,y,y',y'',\cdots,y^{(n)})=0.$$

若未知函数 y 是自变量 x 的一元函数，称此微分方程为常微分方程.

7.1.1 节的两个例子中 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x$ 和 $\frac{\mathrm{d}^2h}{\mathrm{d}t^2}=-g$ 就是两个简单的微分方程.

定义 7.1.4(方程的阶). 微分方程的阶是指方程所含的未知函数的最高阶导数或微分的阶数.

例如，方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2x,\ y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y=0,\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2y^2+xy=0$$

都是一阶方程. 而以下方程

$$\frac{\mathrm{d}^2h}{\mathrm{d}t^2}=\mathrm{g},\ y''+3y'+3y=\mathrm{e}^x,\ y''+(y')^3=x$$

的阶数都是 2.

定义 7.1.5(解，通解及初始条件，特解). 微分方程的解是满足微分方程的函数 $y=f(x)$，换句话说就是将函数 $y=f(x)$ 代入微分方程后，微分方程可化为一恒等式，那么函数 $y=f(x)$ 就是该微分方程的解.

如果微分方程的解包含有任意常数，且其中独立的任意常数的个数等于该方程的阶数，

则这样的解被称微分方程的**通解**．通常，n 阶微分方程的通解指由 n 个相互独立的常数决定的一族解．

若所有的常数都已给出，则称此解为微分方程的**特解**．

确定一个具体的特解的条件称为**初始条件**．一般地，它们可反映运动的初始位置或所求曲线在给定点的性质，并可用来确定通解中任意常数的值，从而得出一特解．例如，解(7.1.2)与(7.1.7)分别是方程(7.1.1)与方程(7.1.5)的通解；方程(7.1.3)与方程(7.1.8)分别是方程(7.1.1)与方程(7.1.5)的初始条件；解(7.1.4)与(7.1.9)分别是方程(7.1.1)与方程(7.1.5)的特解．

$h=-\frac{1}{2}gt^2+C_1t$ 与 $h=-\frac{1}{2}gt^2+C_1+2C_2$ 都是方程$\frac{\mathrm{d}^2h}{\mathrm{d}t^2}=-g$的解，但它们都不是方程的通解，因为前者只包含一个任意常数，而后者看似有两个任意常数，但它们可以化成一个常数 $C=C_1+2C_2$．

例 7.1.6　验证 $y=\frac{1}{x+C}$是微分方程 $y'+y^2=0$ 的通解．

解　将 $y'=-\frac{1}{(x+C)^2}$与 $y=\frac{1}{x+C}$代入所给微分方程可得

$$-\frac{1}{(x+C)^2}+\left(\frac{1}{x+C}\right)^2=0.$$

因此，函数 $y=\frac{1}{x+C}$是微分方程 $y'+y^2=0$ 的通解．

7.1.3　一阶微分方程的几何解释

微分方程的解在几何上表示曲线，称它为微分方程的积分曲线．通解表示一族积分曲线，而特解则是由定解条件确定的积分曲线中的某一特定曲线．我们通过例 7.1.1 对微分方程及其解作简单的几何解释．

微分方程(7.1.1) 表明在平面 xOy 上 任一点 $P(x,y)$，有且仅有一个值 $2x=y'|_{(x,y)}$，它是线性元（或线段）在 P 处的斜率．几何学上，诸如式(7.1.2)的微分方程描述了如图 7.1.2(a) **所示的一段线性元．**

求解方程(7.1.1)就是找出这些抛物线 $y=x^2+C$，使得在任一点 P，对应抛物线的切线刚好与线性元在 P 点处一致．由图 7.1.2(b)可看出有无穷多条抛物线，它们可由常数 C 确定．这些抛物线族代表方程的通解．任意给定点 $P_0(x_0,y_0)$代表一个初始条件，且满足初始条件 $y|_{x=x_0}=y_0$ 的特解，即过点 $P_0(x_0,y_0)$的抛物线．例如，满足初始条件 $y|_{x=1}$的特解是抛物线 $y=x^2$．

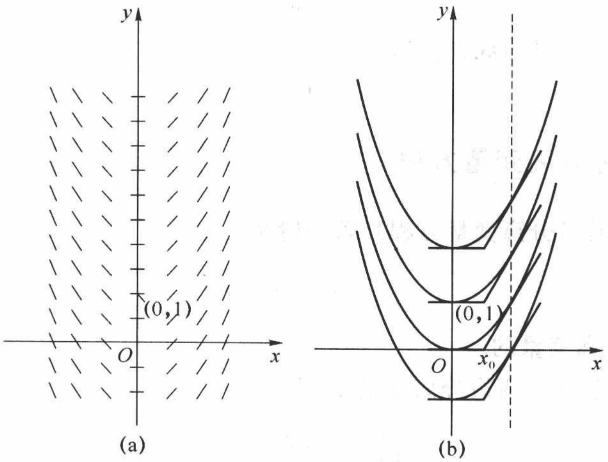

图 7.1.2

习题 7.1

1. 指出下列微分方程的阶：

(1) $y'-2y=x+2$；　　(2) $x^2y''-3xy'+y=x^4\mathrm{e}^x$；

(3) $(1+x^2)(y')^3-2xy=0$；　　(4) $xy'''+\cos^2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=\tan x$；

(5) $x\ln x\mathrm{d}y+(y-\ln x)\mathrm{d}x=0$；　　(6) $L\dfrac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2}+R\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}+\dfrac{Q}{C}=0$.

2. 函数 y 是否是所给微分方程的解？

(1) $xy'=2y, y=5x^2$；　　(2) $y''+y=0, y=3\sin x-4\cos x$；

(3) $y''-2y'+y=0, y=x^2\mathrm{e}^x$；　　(4) $y''-(\lambda_1+\lambda_2)y'+\lambda_1\lambda_2(y')^2+yy'-2y'=0, y=\ln(x)$.

3. 求下列曲线的方程：

(1) 曲线上任一点 $P(x,y)$处的切线都是 x^2.

(2) 曲线上任一点 $P(x,y)$到原点的距离等于点 P 与点 Q 之间的距离，其中 Q 点是曲线上过点 P 的切线与 x 轴的交点.

7.2　一阶微分方程

一阶微分方程的一般形式为

$$F(x,y,y')=0.$$

若此方程可以解出 y'，则可写成如下形式：

$$y'=f(x,y).$$

7.2.1　一阶可分离变量方程

定义 7.2.1（一阶可分离变量方程）. 若一阶微分方程 $y'=f(x,y)$有如下形式：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=g(x)h(y). \tag{7.2.1}$$

则称该微分方为**可分离变量的.**

若 $h(y)\neq 0$，通过 $h(y)$两边分离变量，可得

$$\frac{\mathrm{d}y}{h(y)}=g(x)\mathrm{d}x. \tag{7.2.2}$$

设 $y=y(x)$ 是方程(7.2.1)的解. 将其代入方程(7.2.1)或等价方程(7.2.2) 可得

$$\frac{y'(x)\mathrm{d}x}{h[y(x)]}=g(x)\mathrm{d}x.$$

两边积分得

$$\int\frac{y'(x)}{h[y(x)]}\mathrm{d}x=\int g(x)\mathrm{d}x+C.$$

这里，为了达到强调任意常数的目的，通常明确将其写出. 通过代入得

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{h(y)}=\int g(x)\mathrm{d}x+C. \tag{7.2.3}$$

由方程(7.2.3)确定的隐函数 $y=y(x,C)$是方程(7.2.1)的通解. 这种通过分离变量来求解微分方程的方法称为**分离变量法** .

若 $h(y)$ 有零点 y_0，即 $h(y_0)=0$，则 $y=y_0$ 也是方程 (7.2.1)的解. 方程 (7.2.1)**全部解**为

$$\begin{cases} y=y(x,C), \\ y=y_0. \end{cases}$$

在许多情况下，解 $y=y_0$ 有可能包含在通解中.

例 7.2.2　求方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2xy$ 的通解.

解　容易看出该方程为可分离变量的. 设 $y\neq 0$ 并分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=2x\mathrm{d}x.$$

两边积分

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{y}=\int 2x\mathrm{d}x+C_1,$$

所以

$$\ln|y|=x^2+C_1,$$

因此

$$|y|=e^{x^2+C_1}=e^{C_1}e^{x^2},$$

或

$$y=Ce^{x^2},$$

其中 $C=\pm e^{C_1}$，是任意非零常数.

显然 $y=0$ 也是所求方程的解，若常数 C 可取零，它包含在通解 $y=Ce^{x^2}$ 中．因此，所求方程的通解为 $y=Ce^{x^2}$，其中 C 是任意常数，并且通解也是所求方程的全部解.

例 7.2.3　求方程 $xy\mathrm{d}x+(x^2+1)\mathrm{d}y=0$ 满足初始条件 $y|_{x=0}=1$ 的特解.

解　分离变量可得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=-\frac{x}{x^2+1}\mathrm{d}x.$$

两边积分得

$$\ln|y|=-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C_1,$$

因此方程的通解为

$$y=\frac{C}{\sqrt{x^2+1}},$$

其中 $C=\pm e^{C_1}$.

将初始条件 $y|_{x=0}=1$ 代入到通解中可得

$$C=1.$$

因此，所求特解为

$$y=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

7.2.2　一阶齐次微分方程

定义 7.2.4　具有如下形式的一阶微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{7.2.4}$$

称为**齐次微分方程**.

例如，方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=3\left(\frac{y}{x}\right)^2$ 与 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{2y}{x}+5$ 都是齐次微分方程，方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{5x+6y}{x-3y}$ 也是齐次微分方程，因为它可以退化为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{5+6\,\dfrac{y}{x}}{1-3\,\dfrac{y}{x}}.$$

齐次微分方程可通过变量转换化成可分离变量的微分方程.

设 $u=\dfrac{y}{x}$,即 $y=ux$,因此

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}.$$

将其代入方程 (7.2.4)有

$$u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f(u),$$

或

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f(u)-u.$$

它是可分离开变量的微分方程.通过分离变量得到它的解 $u=u(x,C)$之后,方程(7.2.4)的通解可由代换 $u=\dfrac{y}{x}$或 $y=xu(x,C)$求得.

例 7.2.5 求方程 $x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-y=2\sqrt{xy}$的通解.

解 两边同除以 x 并移项得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{x}+2\sqrt{\frac{y}{x}}. \tag{7.2.5}$$

该方程化为一个齐次微分方程.设 $u=\dfrac{y}{x}$,或 $y=xu$,则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}.$$

代入方程(7.2.5)得

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=2\sqrt{u}. \tag{7.2.6}$$

分离变量有

$$\frac{\mathrm{d}u}{2\sqrt{u}}=\frac{\mathrm{d}x}{x},(u\neq 0).$$

两边积分,可得

$$\sqrt{u}=\ln|x|+C_1 \text{或 } \mathrm{e}^{\sqrt{u}}=Cx.$$

根据变换 $u=\dfrac{y}{x}$,可得所求方程的通解为

$$\mathrm{e}^{\sqrt{\frac{y}{x}}}=Cx \text{ 或 } y=x(\ln Cx)^2. \tag{7.2.7}$$

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com