平面解析几何
习题选解

沈阳市中小学教学研究室

说　　明

为了提高中学“平面解析几何”的教学质量，协助中学数学教师和中学生搜集参考资料，我们组织编写了《平面解析几何习题选解》。

这本“选解”是根据全国统编中学数学教学大纲和近两年高等学校招生考试大纲的要求编写的。在选题方面，我们尽量考虑了即配合教材各章节的教学，同时也收集了一些不同类型的综合性问题。在解题方面，由于篇幅所限我们只给出一解，起“抛砖引玉”的作用。希望老师和同学们在使用“选解”时，对有多解的问题要展开考虑，尽量找出最科学、简便的解法，以提高分析问题和解决问题的能力。

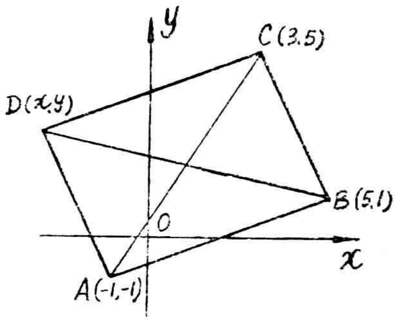
参加这本“选解”编写工作的有：马学斌、康凤岩、关维东、卢惠林等同志。由于我们组织编写这方面材料还没有经验，在选题或解题方面会有不妥或错误的地方，盼望广大教师和同学及时给以指正，甚为感谢！

沈阳市中小学教学研究室

两个基本公式

1、平行四边形ABCD的顶点A、B、C的坐标分别是（-1，-1），（5，1），（3，5）求顶点D的坐标。

解：因为平行四边形对角线互相平分，



设AC的中点为M，依中点坐标公式，得点M的坐标是（1，2）

设所求的点D的坐标是（x，y），由于点M也是BD的中点，所以

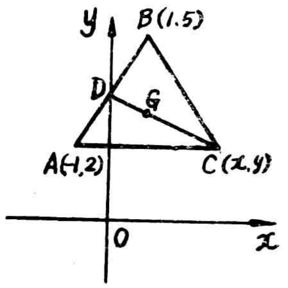
$$\frac{x+5}{2}=1 \qquad \frac{y+1}{2}=2$$

即得D（-3，3）

2、△ABC顶点A、B的坐标分别是（-1，2）、（1，5），它们重心G坐标是（1，3）求顶点C的坐标。

解：设AB的中点为D，则依中点坐标公式得，

$D\left(0, \frac{7}{2}\right)$，



又 $\frac{CG}{GD}=\frac{2}{1}$ 所以

若C（x，y）则：

$$1=\frac{x+2\times 0}{1+2}=\frac{x}{3} \qquad \therefore x=3$$

$$3=\frac{y+2\times\frac{7}{2}}{1+2}=\frac{y+7}{3} \qquad \therefore y=2$$

因此，C（3、2）。

3、已知△ABC中，A(0，0)，B(4，8)，C(6，－4)，AB边的内分点为M且AM：MB＝3：1 AC的内分点P，又知△APM的面积等于△ABC面积的二分之一，求P点的坐标。

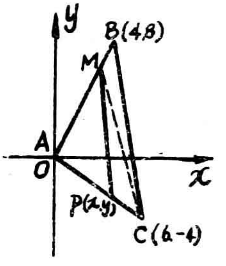
解：连结MC得：

△BCM的面积：△ACM的面积＝1：3 所以

△BCM的面积＝$\frac{1}{4}$△ABC的面积。

而△APM的面积＝$\frac{1}{2}$△ABC的面积。

所以△MPC的面积＝△ABC



3题

的面积$-\frac{1}{4}$△ABC的面积$-\frac{1}{2}$△ABC的面积$=\frac{1}{4}$△ABC的面积。

又因为△APM与△PMC等高，并且

$$\frac{\triangle APM\text{的面积}}{\triangle PMC\text{的面积}}=\frac{\frac{1}{2}\triangle ABC\text{的面积}}{\frac{1}{4}\triangle ABC\text{的面积}}=\frac{2}{1}$$

因此　AP∶PC＝2∶1

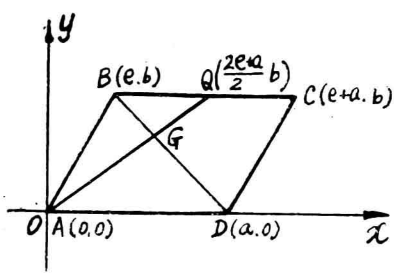
依定比分点公式得

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}=\frac{0+2\times 6}{1+2}=4$$

$$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}=\frac{0+2\times(-4)}{1+2}=-\frac{8}{3}$$

故　$P\left(4,-\frac{8}{3}\right)$

4、试证平行四边形一顶点至任意一对边中点之连线与对向它的对角线互相分割为1∶2。



解：选坐标系如图。

设点G(x，y)内分AQ成2 ：1

$$\therefore x=\frac{\frac{2e+a}{2}+\frac{1}{2}\times 0}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2e+a}{3}$$

$$y=\frac{b+\frac{1}{2}\times 0}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2b}{3}$$

所以 AQ 的分点$G\left(\frac{2e+a}{3},\ \frac{2b}{3}\right)$

又设点G_1 (x_0，y_0) 内分DB成2 ：1

$$x_0=\frac{e+\frac{1}{2}a}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2e+a}{3}$$

$$y_0=\frac{b+\frac{1}{2}\times 0}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2b}{3}$$

即 $G_1\left(\frac{2e+a}{3}\ \ \frac{2b}{3}\right)$

因此G与G_1重合即说明AQ、BD互相分割为 1：2。

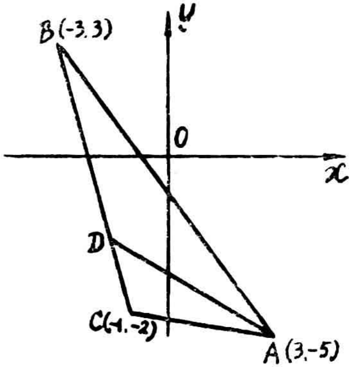
5、已知三角形顶点为A(3，－5)，A(－3，3)和C (－1，－2) 试确定内角A的的平分线之长。

解：依内角平分线定理得：

$$\frac{|DC|}{|DB|}=\frac{|AC|}{|AB|}$$

且 $|AC|=\sqrt{(3+1)^2+(-5+2)^2}=5$

$|AB|=\sqrt{(3+3)^2+(-5-3)^2}=10$



所以 $\dfrac{|CD|}{|DB|}=\dfrac{5}{10}=\dfrac{1}{2}$

依定比分点公式，得D的坐标为：

$$x=\frac{-3+2\times(-1)}{3}=-\frac{5}{3}$$

$$y=\frac{3+2\times(-2)}{3}=-\frac{1}{3}$$

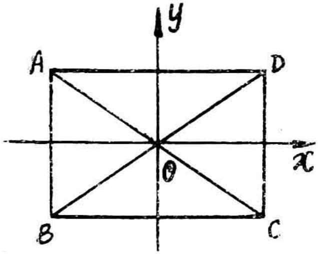
即 $D\left(-\dfrac{5}{3},\ -\dfrac{1}{3}\right)$

依两点间距离公式得：

$$|AD|=\sqrt{\left(3+\frac{5}{3}\right)^2+\left(-5+\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{14}{3}\sqrt{2}$$

因此角分线长为$\dfrac{14}{3}\sqrt{2}$。

6、用解析法证明矩形对角线相等。



证明：设 $|AD| = a$

$|AB| = b$

过矩形 ABCD 的对角形交点O作x轴与AD平行，y轴与AB平行，原点为O，则矩形ABCD各顶点的坐标为：

$A\left(-\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$,

$B\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$，$C\left(\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$，

$D\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$。所以得：

$$|AC|^2 = \left(\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\right)^2 + \left(-\frac{b}{2}-\frac{b}{2}\right)^2 = a^2 + b^2$$

$$|BD|^2 = \left(\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}+\frac{b}{2}\right)^2 = a^2 + b^2$$

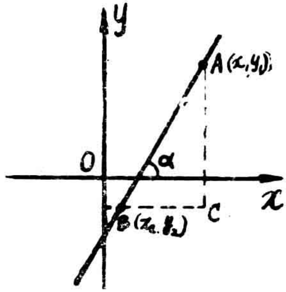
$\therefore$ $|AC|^2 = |BD|^2$　即 $|AC| = |BD|$

故矩形对角线相等。

7、设AB两点的座标分别是 $(x_1、y_1)$ 和 $(x_2、y_2)$，直线AB的倾斜角是α。

求证 $|x_1 - x_2| = \left|\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}\ \cos\alpha\right|$

证明：由A点作 x轴的垂线与由B点作 y轴的垂线相交于C。



则 △ABC为直角三角形

∵ AB的倾斜角是α

∴ $\angle ABC=\alpha$

在直角△ABC中，

$$|BC|=|AB|\cdot|\cos\alpha|$$

$$|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

$$\therefore\ |x_1-x_2|=\sqrt{(x_1-x_2)+(y_1-y_2)^2}\cdot|\cos\alpha|.$$

直　　线

8、在直线 $4x+3y-12=0$ 上，求出一点，使它与两点（-1，-2）及（1，4）成等距。

解：设所求的点P（x，y）

若P（x，y）到两已知点（-1，-2）和（1，4）成等距

则有 $\sqrt{(x+1)^2+(y+2)^2}=\sqrt{(x-1)^2+(y-4)^2}$

即 $x^2+2x+1+y^2+4y+4$

$=x^2-2x+1+y^2-8y+16$

整理，得 $x+3y-3=0$

∵ P点在直线 $4x+3y-12=0$ 上，

所以P点坐标是方程组

$$\begin{cases}x+3y-3=0\\4x+y-12=0\end{cases}$$ 的解。

解方程组得 $x=3$　　$y=0$

∴ 所求的点为（3，0）

9、一直线经过P（2，－3）点，它的倾斜角等于直线 $y=\frac{1}{2}x$的倾斜角的2倍，求这条直线的方程。

解：设θ为直线$y=\frac{1}{2}x$的倾斜角，则 $\operatorname{tg}\theta=\frac{1}{2}$

$$\because\quad \operatorname{tg}2\theta=\frac{2\operatorname{tg}\theta}{1-\operatorname{tg}^2\theta}\qquad\therefore \operatorname{tg}2\theta=\frac{4}{3}$$

所以经过P（2、－3）点，倾斜角为2θ的直线方程为 $y+3=\frac{4}{3}(x-2)$

即 $4x-3y-17=0$。

10、已知直线在两轴上的截距之和为2，并且经过（－2，3）点，求这直线的方程。

解：设这直线的方程为

$$\frac{x}{a}+\frac{x}{b}=1.$$

在两轴的截距之和为2，

$$\therefore\quad a+b=2\qquad(1)$$

又它经过（－2，3）点，

$$\therefore\quad -\frac{2}{a}+\frac{3}{b}=1\qquad(2)$$

由（1），（2）联立的方程组得

$$\begin{cases}a_1=-4\\b_1=6\end{cases}\qquad\begin{cases}a_2=1\\b_2=1\end{cases}$$

故所求直线方程为

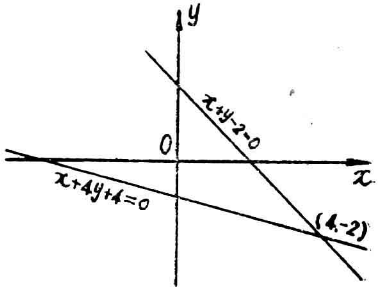
$$3x-2y+12=0$$

或 $x+y-1=0$。

11、一直线经过点（4，—2），并且和两轴所成三角形的面积为2平方单位，求此直线的方程。

解：依题意设直线方程为：$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

并得方程组：



$$\frac{4}{a}+\frac{-2}{b}=1$$

$$\frac{a\cdot b}{2}=2$$

由方程组得：

$$\begin{cases}a_1=2\\b_1=2\end{cases}\quad\begin{cases}a_2=-4\\b_2=-1\end{cases}$$

故得直线方程为：

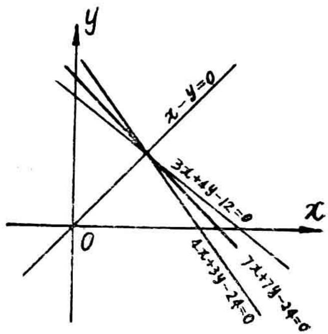
$x+y-2=0$　或　$x+4y+4=0$

12、求经过二直线 $7x+7y-24=0$ 和 $x-y=0$ 的交点且与两轴在第一象限内围成的周界是12的直线方程。

解：由方程组

$$\begin{cases}7x+7y-24=0\\x-y=0\end{cases}$$

得交点坐标为：$\left(\frac{12}{7},\frac{12}{7}\right)$



设所求直线方程为：

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

则有：$\frac{12}{7a}+\frac{12}{7b}=1$

$$a+b+\sqrt{a^2+b^2}=12$$

由方程组解得：

$$\begin{cases} a_1 = 4 \\ b_1 = 3 \end{cases} \quad \text{及} \quad \begin{cases} a_2 = 3 \\ b_2 = 4 \end{cases}$$

故得直线方程为：

$$3x + y - 12 = 0 \text{ 及 } 4x + 3y - 12 = 0$$

13、已知直线在 x轴上的截距为 a，在 y 轴的的截距为 b，斜率为 k，原点到直线的距离为d，求证：

（1） $b = -ak$；

（2） $a^2k^2 = d^2(1 + k^2)$；

（3） $\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} = \dfrac{1}{d^2}$。

证明：直线方程为 $Ax + By + C = 0$，则

$$a = -\frac{C}{A},\quad b = -\frac{C}{B},\quad k = -\frac{A}{B},\quad d = \frac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

故

（1） $-ak = -\left(-\dfrac{C}{A}\right)\left(-\dfrac{A}{B}\right) = -\dfrac{C}{B} = b$

（2） $a^2k^2 = \left(-\dfrac{C}{A}\right)^2\left(-\dfrac{A}{B}\right)^2 = \dfrac{C^2}{B^2}$

$$d^2(1 + k^2) = \frac{C^2}{A^2 + B^2}\left(1 + \frac{A^2}{B^2}\right) = \frac{C^2}{B^2}$$

$\therefore\ d^2(1 + k^2) = a^2k^2$

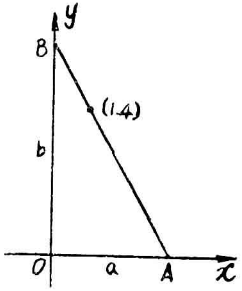
(3) $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{A^2}{C^2}+\frac{B^2}{C^2}=\frac{A^2+B^2}{C^2}$

而

$$\frac{1}{d^2}=\left(\frac{\sqrt{A^2+B^2}}{|C|}\right)^2=\frac{A^2+B^2}{C^2}$$

$\therefore\quad \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{d^2}$ 。

14、过点（1，4）引一直线与两坐标轴正向围成的三角形面积为最小，求这条直线的方程。



（14题）

解：设所求直线方程为

$y=k(x-1)+4\ (k<0)$

则直线在 x轴上截距为

$$a=\frac{k-4}{k},$$

在y轴上的截距为 $b=4-k$。

$\therefore\ S_{\triangle ABO}=\frac{1}{2}ab$

$$=\frac{1}{2}\left[-\frac{(4-k)^2}{k}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[(-k)+\frac{16}{-k}+8\right]$$

$\because\quad (-k)\cdot\frac{16}{-k}=16$ 为定值，且 $-k>0$ $\frac{16}{-k}>0$,

$\therefore$ 当 $-k=\frac{16}{-k}$，即 $-k=4$ 时，S_{ABO} 为最小，

故所求直线方程为 $y=-4(x-1)+4$，

即　$4x+y-8=0$。

另解：设所求直线方程为$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$　则

$$\frac{1}{a}+\frac{4}{b}=1.$$

∵　$a>0$，$b>0$，则　$\frac{1}{a}>0$，$\frac{4}{b}>0$，

且　$\frac{1}{a}+\frac{4}{b}=1$　为定值，

∴　当$\frac{1}{a}=\frac{4}{b}$，即　$4a=b$ 时，$\frac{4}{ab}$有最大值，

则 ab有最小值，从而S_{ABO}有最小值

解方程组

$$\begin{cases}\frac{1}{a}+\frac{4}{b}=1\\ 4a=b\end{cases}$$

得　$a=2$，$b=8$。

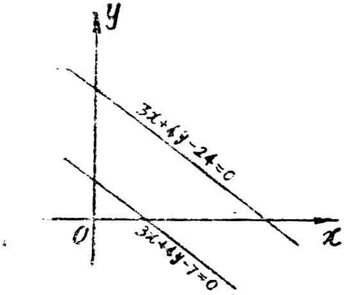
∴　所求直线方程为　$\frac{x}{2}+\frac{y}{8}=1$，

即　$4x+y-8=0$。

15、求与直线　$3x+4y-7=0$ 平行，并且和两轴交在第Ⅰ象限所成的三角形的面积是24的直线方程。

解：平行与直线　$3x+4y-7=0$　的直线系方程是

$$3x+4y-c=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$



这直线的横截距为$\frac{C}{3}$，纵截距为$\frac{C}{4}$，根据题设条件

有 $\frac{1}{2}\cdot\frac{C}{3}\cdot\frac{C}{4}=24$，

即 $C=\pm 24$

因为三角形在第一项限内，C取正值，

∴ $C=24$ 代入方程（1）得

$3x+4y-24=0$ 即为所求直线方程。

16、过点P（0，1）引直线，使它包含在二直线 $x-3y+10=0$ 与 $2x+y-8=0$ 间线段被P点平分，求该直线方程。

解：设所求直线和两已知直线的交点坐标分别是 $A(x_0, y_0)$，$B(x_1, y_1)$

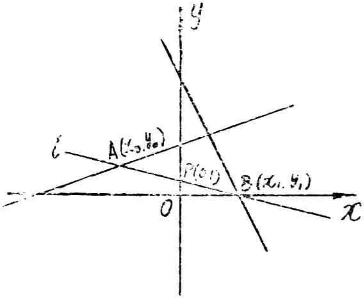
根据题意：

$$x_0-3y_0+10=0$$

$$2x_1+y_1=8$$

$$\frac{x_0+x_1}{2}=0$$

$$\frac{y_0+y_1}{2}=1$$



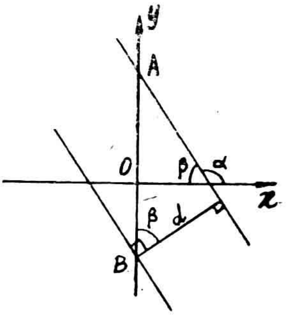
解此方程组得：

$A(-4, 2)$，$B(4, 0)$

依两点式得直线方程为：

$x+4y-4=0$

17、求两平行直线 $3x+2y-3=0$ 和 $3x+2y+2=0$ 之间的距离。



解：L_1：$y=-\frac{3}{2}x+\frac{3}{2}$

L_2：$y=-\frac{3}{2}x-1$

由图知 L_1与L_2之间的距离 $d=|AB|\cos\beta$

由于 $tg\alpha=k_1=-\frac{3}{2}$

$$\therefore\quad tg\beta=tg(\pi-\alpha)=-tg\alpha=\frac{3}{2}$$

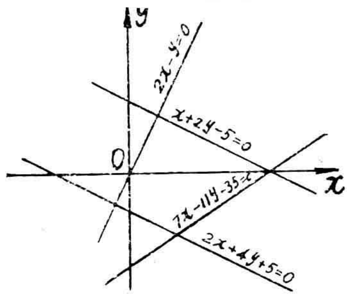
$$\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\beta}}=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{3}{2}\right)^2}}=\frac{2}{\sqrt{13}}$$

而 $|AB|=\frac{3}{2}-(-1)=\frac{5}{2}$

$$\therefore\quad d=|AB|\cos\beta=\frac{5}{2}\cdot\frac{5}{\sqrt{13}}=\frac{25}{26}\sqrt{13}\ 。$$

18、求证由直线 $x+2y-5=0$，$2x+4y+5=0$，$2x-y=0$，$7x-11y-35=0$ 围成的四边形是一个直角梯形。

解：由$x+2y-5=0$



知 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$

∴ $k_1=-\frac{1}{2}$

又 $2x+4y+5=0$

$y=-\frac{1}{2}x-\frac{5}{2}$

∴ $k_2=-\frac{1}{2}$

$2x-y=0 \quad y=2x \quad k_3=2$

$7x-11y-35=0 \quad y=\frac{7}{11}x-\frac{35}{11} \quad k_4=\frac{7}{11}$ 。

∵ $k_1=k_2$ ∴ 直线 $x+2y-5=0$平行直线 $2x+4y+5=0$

又∵ $k_1=-\frac{1}{2}=-\frac{1}{k_3}$ ∴ 直线$2x-y=0$垂直于直线 $x+2y-5=0$

同理直线 $2x-y=0$垂直于直线 $2x+4y+5=0$

且直线$2x-y=0$和直线$7x-11y-35=0$不平行。

∴ 这四条直线所围成的四边形为直角梯形。

19、求证四边形四边中点是一个平行四边形的四个顶点。

证明：设四边形ABCD顶点坐标为 A（x_1、y_1），B（x_2、y_2），

C（x_3、y_3），D（x_4、y_4）

则其四边中点的座标为