

转轴的临界速度

丁士鐸編著



机械工业出版社

轉軸的临界速度

丁士鐸編著



机械工业出版社

本书从振动概論的叙述开始，有系統地闡述了轉軸的振动以及計算它的临界速度的各种方法。本书在理論上力求簡明完整，而更偏重于实用；能够帮助讀者系統地認識有关轉軸的振动理論并掌握轉軸的临界速度的計算方法。

本书可作为机械設計人員的参考书，也可作为高等工业学校、技术学校有关軸和振动方面的教学参考用书。

轉軸的临界速度

丁士鐸編著

(根据中国工业出版社紙型重印)

*

机械工业出版社出版 (北京苏州胡同 141 号)

(北京市书刊出版业营业許可証出字第 117 号)

机械工业出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·各地新华书店經售

*

开本 $850 \times 1168 \frac{1}{32}$ · 印張 $11 \frac{1}{2}$ · 插頁 1 · 字数 270 千字

1962 年 5 月北京第一版，印 2,640 册

1965 年 1 月北京新一版·1965 年 1 月北京第一次印刷

印数 0,001—2,700 · 定价 (科六) 1.85 元

*

統一书号: 15033 · 3391

目 次

序言	7
采用符号	8
第一章 振动概論	11
1-1 导言	11
1-2 簡諧运动	12
1-3 一个自由度系統的振动	16
1 自由度的意义(16)——2 一个自由度系統的无阻尼自由振动(17)	
——3 一个自由度系統的阻尼自由振动(22)——4 一个自由度系統的	
无阻尼强迫振动(26)——5 一个自由度系統的阻尼强迫振动(32)	
1-4 二个自由度系統及多个自由度系統的振动	38
1 二个自由度系統的自由振动(38)——2 二个自由度系統的强迫振	
动(42)——3 三个自由度系統的自由振动和强迫振动(43)——4	
多个自由度系統的振动(51)——5 感应系数的求法(53)	
1-5 作为彈性体的梁的橫向振动	59
1 橫向振动的梁的微分方程(59)——2 四种支承情况下梁的自然頻率	
和振动方式(63)——3 克里洛夫解法(67)——4 强迫振动概述(72)	
1-6 多支梁的橫向振动	72
1 带有多圓盘、不考虑梁均布质量的多支梁的橫向振动(72)——2 作	
为彈性体的多支梁的橫向振动(75)——3 带有多圓盘并考虑梁均布	
质量的多支梁的橫向振动(78)	
1-7 支座彈性对梁自然頻率的影响	79
1 不考虑梁的均布质量的情况(79)——2 考虑梁的均布质量的情况	
(83)	
1-8 考虑圓盘轉动慣量时梁的橫向振动	85
1 单圓盘梁的橫向振动(85)——2 双圓盘梁和多圓盘梁的橫向振动(89)	
1-9 軸向力对梁自然頻率的影响	91
第二章 轉軸的临界速度	94
2-1 单圓盘轉軸的临界速度	94
1 轉軸的轉动現象和临界状态(94)——2 从共振观点对轉軸临界状	
态的分析(103)——3 撓性軸和剛性軸(110)	
2-2 多圓盘轉軸的临界速度	113

1 双圆盘轉軸的临界速度 (113)——2 多圆盘轉軸的临界速度 (118)	
——3 多支承轉軸的临界速度 (119)	
2-3 考虑均布质量的轉軸的临界速度	120
1 沿軸长 $e=0$ 轉軸的临界速度 (120)——2 沿軸长 $e=e_0$ 轉軸的临界速度 (123)——3 靜力撓度与临界速度的关系 (127)——4 实心軸和空心軸 (128)	
2-4 考虑圆盘轉动慣量时轉軸的临界速度。迴轉效应	130
1 考虑圆盘轉动慣量时单圆盘轉軸的临界速度 (130)——2 考虑圆盘轉动慣量时多圆盘轉軸的临界速度 (142)——3 旋轉体轉动慣量的計算 (144)	
2-5 影响轉軸临界速度的其他因素	149
1 軸承的类型和軸承的长度 (149)——2 軸承和底座的彈性 (150)——3 輪轂和其他机件的紧配合联接 (151)	
2-6 从振动方面考虑的轉軸的設計	151
第三章 求轉軸临界速度的邓柯萊累加法	155
3-1 决定轉軸临界速度的近似方法	155
3-2 邓柯萊累加法	158
第四章 求轉軸临界速度的雷列能量法	163
4-1 能量法	163
4-2 雷列能量法	166
4-3 求多圆盘轉軸临界速度时雷列能量法的应用	171
1 等断面軸的情况 (171)——2 变断面軸的情况——靜力撓度图解法 (175)——3 雷列逐步近似法 (181)	
4-4 求轉軸临界速度的李滋法	183
1 李滋法 (183)——2 求多圆盘轉軸临界速度时李滋法的应用 (188)	
4-5 求轉軸临界速度的当量质量法	195
第五章 求轉軸临界速度的史托多拉逐步近似法	203
5-1 史托多拉逐步近似法及其計算步驟	203
5-2 求多支承轉軸临界速度时史托多拉法的应用	209
5-3 类似于史托多拉法的一种逐步近似法	213
第六章 求轉軸临界速度的別尔什謙譜函数法	216
第七章 求轉軸临界速度的密克斯达特法	222
7-1 引論	222
7-2 密克斯达特法的計算方法	223

1 具有自由端的轉軸(224)——2 兩端為鉸座的轉軸(232)——3 有外伸的雙鉸座轉軸(235)——4 多支承轉軸(237)	
7-3 考慮迴轉效應時密克斯達特法的应用.....	243
第八章 求轉軸臨界速度的庫舒耳法	247
8-1 引論.....	247
8-2 轉軸彈性綫的微分方程和截段間的联接条件.....	248
1 轉軸彈性綫的微分方程(248)——2 截段間的联接条件(249)	
8-3 長机件在各种固定情况下的联接条件.....	253
8-4 截段微分方程的通解.....	258
8-5 相鄰截段間的轉換公式.....	262
1 橫断面变化(263)——2 橫断面变化,并固定有外伸的長机件(264)——3 橫断面变化,有可動鉸座支承(266)——4 橫断面变化,長机件右端為固定端,左端為可動鉸座(268)——5 橫断面变化,長机件兩端為可動鉸座(271)——6 橫断面变化,長机件兩端為固定端(273)	
8-6 臨界速度的計算方法.....	274
8-7 应用庫舒耳方法求精紡机錠子臨界速度的計算举例.....	281
1 引論(281)——2 錠子臨界速度的計算(282)——3 有关錠子計算的一些說明(297)	
8-8 計算方法的选择.....	299
第九章 轉軸通过共振時的臨界速度	302
第十章 轉軸的副臨界速度	306
10-1 引論	306
10-2 勁度不均的水平轉軸所致的副臨界速度	307
10-3 不平衡的水平轉軸所致的副臨界速度	312
第十一章 轉軸的自激振動	315
11-1 引論	315
11-2 由于摩擦所引起的轉軸的自激振動	317
11-3 由于材料的內摩擦所引起的轉軸的自激振動.....	319
1 材料的彈性滯后(319)——2 由于材料的彈性滯后所引起的轉軸的甩轉(321)——3 由于緊配合联接所引起的轉軸的甩轉(324)	
11-4 由于軸承中油膜作用所引起的轉軸的自激振動.....	326
1 引論(326)——2 油击現象的解釋(327)——3 軸承参数对油击的影响。油击的糾治方法(330)	
第十二章 消除机器工作时所产生振动的措施	333

12-1 引論	333
12-2 机器振动根源的消除方法	333
12-3 設計时对可能发生的振动采取的預防措施	334
1 合理选择机器的类型和布置条件(335)——2 振动的隔絕。减振器 (336)	
12-4 减少振动有害影响的措施	338
1 采用改建机器基础的方法(338)——2 动力止振器的采用(340)	
附录	343
I 数学	343
II 互換定理	352
III 自然頻率和临界速度算式汇编	353
IV 函数 $\cos\alpha$ 、 $\sin\alpha$ 、 $\operatorname{ch}\alpha$ 、 $\operatorname{sh}\alpha$ 和 $S(\alpha)$ 、 $T(\alpha)$ 、 $U(\alpha)$ 、 $V(\alpha)$ 的数 值表	356
参考文献	368

序 言

轉軸在其速度等于临界速度时要发生强烈振动的現象，很早就为人們所注意到了。而在机器速度大大提高并正在不断提高中的今天，关于轉軸振动的探討和它的临界速度的决定，就显得更其重要和突出。显然，只有在确定軸的临界速度并从振动方面驗算轉軸以后，才能使軸的設計趋于完整，从而免除軸在运转速度范围内有发生严重振动的可能性。

对軸的振动和临界速度問題，不仅要求設計人員須加以充分掌握，同时也希望工厂中的技术和管理人員能够很好了解，这样，对軸在运转中可能发生的毛病的及时和正确的补救，尤其对这些毛病的起因作事先的防止和消除，是有所帮助的。

本书写作的宗旨便是企图將轉軸的振动和决定軸的临界速度的方法作較為詳尽的介紹。本书先行叙述振动的基本原理以及轉軸的振动，接着便以較大的篇幅詳細說明各种計算临界速度的方法，最后是轉軸振动的一些特殊現象的討論。

本书叙述在数学上力避深奥，讀者具有初步的微积分学和微分方程的知識，即可順利閱讀。基于同样的原因，在叙述各种計算临界速度的方法时，对数学較為深邃的一些計算方法，概加割爱。应该指出：本书除对理論部分力求簡明外，更偏重于实用。为此，书中列举很多計算例題，使讀者在了解理論之际，能更好掌握計算的方法，以便于在解决实际問題时得以灵活运用。这一点在全书尤其在叙述临界速度計算方法的各章中，曾加以突出。

最后，限于作者的水平和能力，书中肯定存在着不少的謬誤和缺点；挂一漏万，更所难免。这些都有待同志們的批評和指正。

丁士鐸

一九五九年于华东紡織工学院

采用符号

- t —— 时间, 秒
 T —— 周期, 秒
 f —— 周频率, 周/秒
 ω —— 角频率 (圆频率), 弧度/秒
 f_n —— 自然周频率, 周/秒
 ω_n —— 自然角频率, 弧度/秒
 ω_{nd} —— 阻尼自然角频率, 弧度/秒
 φ —— 相角, 弧度
 m —— 质量, 公斤秒²/厘米
 x —— 振动的直线位移, 厘米
 v —— 振动的直线速度, 厘米/秒
 a —— 振动的直线加速度, 厘米/秒²
 x_0 —— 振动的振幅, 厘米
 δ_{st}, x_{st} —— 弹簧的静力伸长, 厘米
 k —— 弹簧常数和梁的劲度, 公斤/厘米
 g —— 重力加速度, 厘米/秒²
 c —— 阻尼因数, 公斤秒/厘米
 c_c —— 临界阻尼因数
 S —— 阻尼力, 公斤
 α —— 感应系数和支承弹性系数, 厘米/公斤
 P —— 外力, 离心力, 公斤
 P_0 —— 外力幅, 公斤
 T —— 弦的张力, 公斤
 δ —— 弦的挠度, 厘米
 y —— 梁、轴挠度, 厘米
 y_{st} —— 梁、轴静力挠度, 厘米
 y_0 —— 转轴挠度幅, 厘米
 E —— 材料弹性模数, 公斤/厘米²
 I —— 断面惯性矩, 厘米⁴
 l —— 梁、轴长度, 厘米

M ——梁、軸彎矩，公斤厘米
 Q ——梁、軸切力，公斤
 ρ ——梁、軸單位長度質量，公斤秒²/厘米²
 q ——梁、軸單位長度上所受載荷，公斤/厘米
 G ——圓盤重量，公斤
 γ ——材料密度，公斤/厘米³
 R ——梁、軸支反力，公斤
 J_0 ——迴轉體極轉動慣量，公斤厘米秒²
 J_d ——迴轉體直徑轉動慣量，公斤厘米秒²
 M' ——加于梁、軸上的外力矩和迴轉力矩，公斤厘米
 θ ——梁、軸偏轉角，弧度
 L ——動量矩，公斤厘米秒
 ω_K ——軸的臨界速度，弧度/秒
 n ——軸每分轉數
 n_K ——軸的臨界轉數，轉數/分
 p ——考慮圓盤轉動慣量軸系的振動自然頻率，弧度/秒
 r ——轉軸轉動所成圓的半徑，厘米
 d ——軸徑，厘米
 d_1 ——空心軸內徑，厘米
 F ——軸橫斷面積，厘米²
 e ——軸系和圓盤偏心距，厘米
 T ——動能，公斤厘米
 U ——位能，公斤厘米
 f, f_φ ——幅度係數
 g, g_φ ——幅度係數
 σ_φ ——彎曲應力，公斤/厘米²

第一章 振动概論

1-1 导 言

早在十九世紀中叶，就已經发现轉軸的某种特殊現象。当轉軸的轉速达到某一定值时，轉軸变成不稳定而开始振动，軸的形状也有显著的弯曲；但当轉軸轉速繼續提高，則上述現象消逝。如軸的轉速再繼續提高到另一新的定值时，此項現象又重新出現。发生上述这种現象时軸的速度，便叫做軸的临界速度。

轉軸临界速度的决定非常重要。因为轉軸的运转速度如与其临界速度相符合或与之接近，則轉軸可能发生严重的振动，結果会使軸或軸上机件以至整个机器遭到損害甚至毀坏。如能求出軸的临界速度，便可选定軸的运转速度使其远离此临界速度。如果軸的运转速度不能任意变动的話，則可采用改变軸或軸系的尺寸等方法来改变临界速度数值，务使該軸新的临界速度远离子其运转速度。这样，在軸的运转速度範圍內，便不会有严重的振动发生，因而确保軸和軸系以至整个机器的正常运转和寿命。

由此可見，定出軸的临界速度对軸的設計來說是具有如何重大的意义。

近年来，机器速度提高的趋势特別强烈，并正在不断提高之中。例如，新型的高速車床具有最高轉数达3000转/分，离心机轉数达1000至1500转/分，各种細磨机轉数达4000至5000转/分，各种用途的分离机轉数为6000至8000转/分或更高，超离心机轉数达15000至20000轉/分或更高，精紡机錠子轉数达14000转/分或更高，汽輪机轉数达3000转/分；又如离心泵、渦輪压力机等也是如此。对这些高速机械，轉軸振动現象的研討和其临界速度的决定就更加重要了。

應該指出，上述轉軸的特殊現象只有根据振動理論，才可得到完整的說明和解釋。也只有在振動理論的基礎上才能定出各種計算轉軸臨界速度的方法，並從而指出對軸和軸上轉動機件合理設計的途徑。因此，在討論軸的臨界速度問題以前，有把振動理論加以說明的必要。為此，本章對與轉軸振動有關的振動理論作一概括的敘述。

1-2 簡諧運動

振動一般說來是一個周期運動，換言之，是一個在一定時間之後一切又行重複的運動。這個時間間隔 T 我們叫做振動的周期，單位為秒。它的倒數即每單位時間內運動的周數叫做振動的頻率，以 f 表示。

最簡單的周期運動是簡諧運動。我們可以這樣來說，物體振動的方式不是簡諧運動，便是不同頻率和不同振幅的多個簡諧運動的疊合。因此要闡明振動，首先須對簡諧運動作較詳的說明。

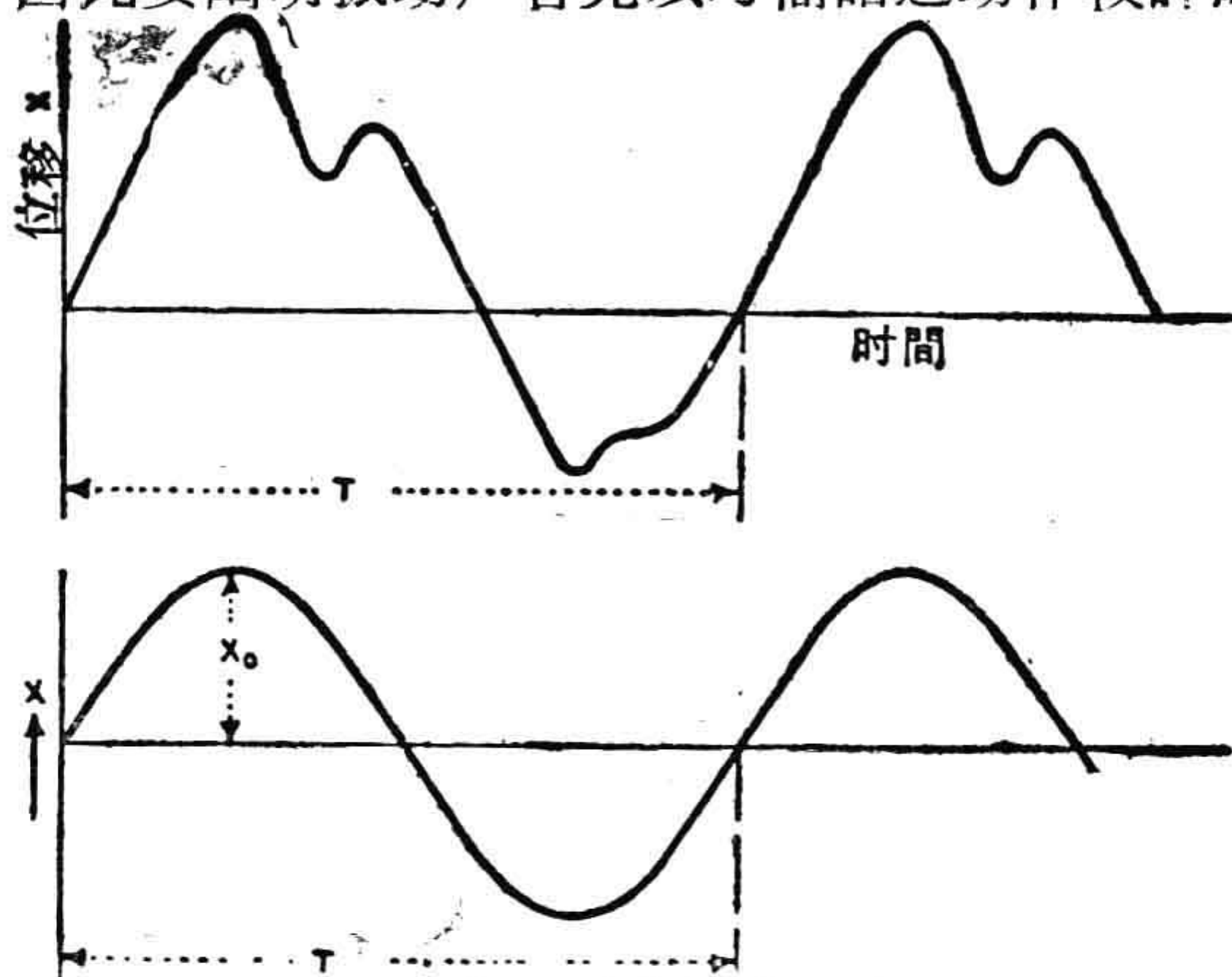


圖1-1 周期運動和簡諧運動。

圖 1-1 上方所示為表示周期運動的曲綫，曲綫的橫座標為時間 t ，直座標為位移 x 。下方所示曲綫即為簡諧運動，其位移 x 與時間 t 的關係可由下式表示：

$$x = x_0 \sin \omega t, \quad (1-1)$$

式中 x_0 代表最大位移, 叫做振幅, 而 ω 叫做角频率或圆频率, 单位为弧度/秒。在一般振动的叙述中, 频率常用 ω 这个量, 因为物体的简谐振动用旋转矢量来代表较为便捷, 这在下面就要讲到。

自式 (1-1) 和图 1-1, 显然, 在 ωt 转过 360 度或 2π 弧度后, 恰好经历振动的一个整周。因此, 当 $\omega t = 2\pi$ 时, $t = T$ 。由此,

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \text{ 秒}, \quad (1-2)$$

而

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \text{ 周/秒}。 \quad (1-3)$$

简谐运动的位移既由 $x = x_0 \sin \omega t$ 表示, 则其速度可由位移依时间微分求出, 故

$$v = \frac{dx}{dt} = \dot{x} = x_0 \omega \cos \omega t。 \quad (1-4)$$

其加速度则为

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} = -x_0 \omega^2 \sin \omega t。 \quad (1-5)$$

自上两式, 可见两者亦均为简谐的, 前者的最大值为 ωx_0 而后者的最大值则为 $\omega^2 x_0$ 。

图 1-2 显示两个分别由式 $x_1 = a \sin \omega t$ 和 $x_2 = b \sin (\omega t + \varphi)$

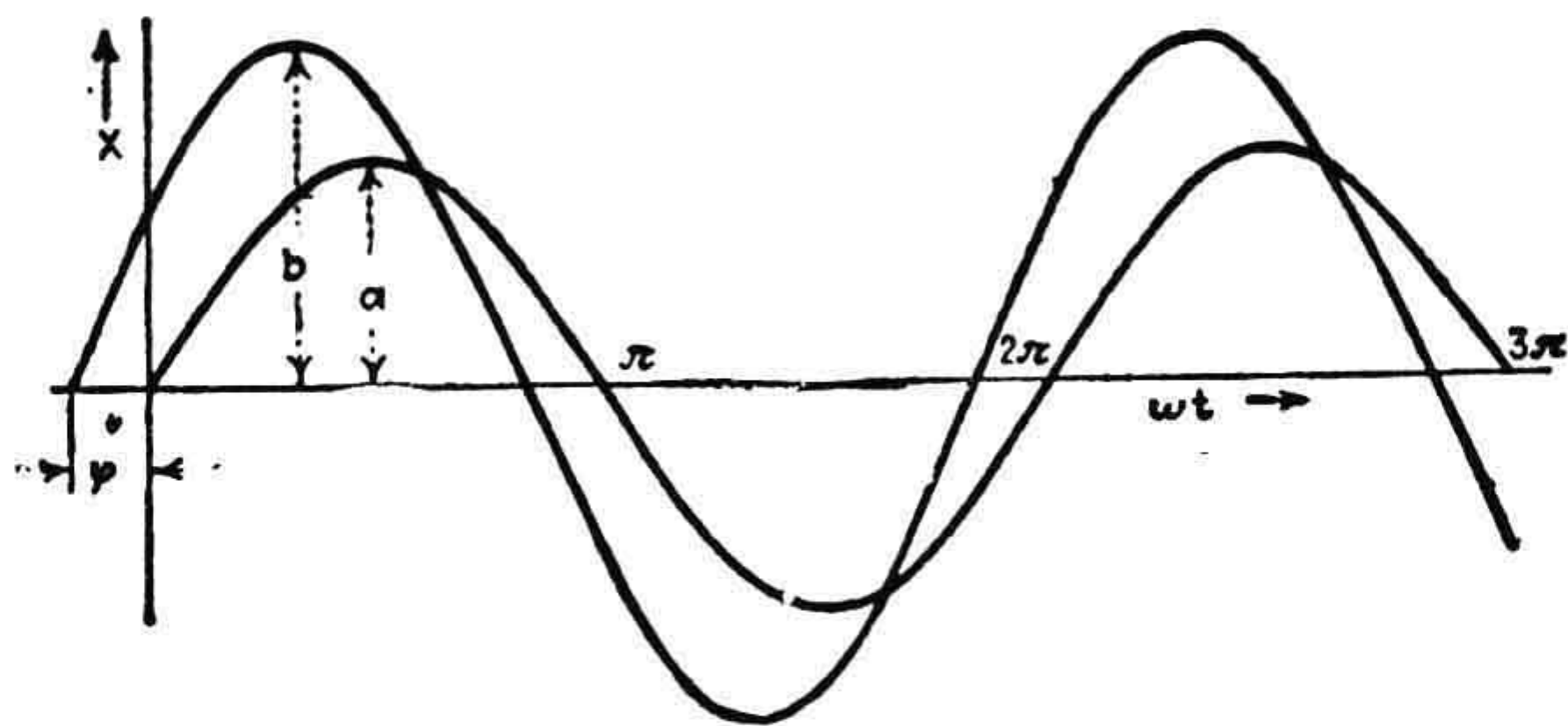


图1-2 具有位相差 φ 的两个同期的简谐运动。

表示的简谐运动。由于两者之间有 φ 角的位相差, 最大位移不可能在同时到达, 其一落后于另一运动 φ / ω 秒。此 φ 角称为两种振动的相角或位相差。假若两运动频率相同, 如此二式所示, 则相

角保持不变, 此时 φ 角方有意义; 如两者频率不同, 显然, 相角便时时变动, 也就没有什么意义了。

简谐运动可以方便地用旋转矢量表示。图 1-3 示长度为 x_0 的矢量以等角速度 ω 绕中心点 O 反时针向旋转。如时间以矢量的水平位置作为起点开始起算的话, 则在 t 秒的时间以内, 矢量所旋转的角度为 ωt 。这时矢量的垂直投影为 $x_0 \sin \omega t$, 此与式(1-1) 正相符合。同样, 矢量的水平投影 $x_0 \cos \omega t$ 也可代表简谐运动。因此, 无论是矢量的水平投影或者垂直投影, 均能代表简谐振动。以下讨论, 一概采用其水平投影来代表简谐振动。

此种用旋转矢量代表简谐振动的方法就导出 ω 称为圆频率的概念。 ω 为矢量的角速度, 单位仍为弧度/秒, 而频率 f 的单位在这里便为 转数/秒。可以看到, $\omega = 2\pi f$ 。

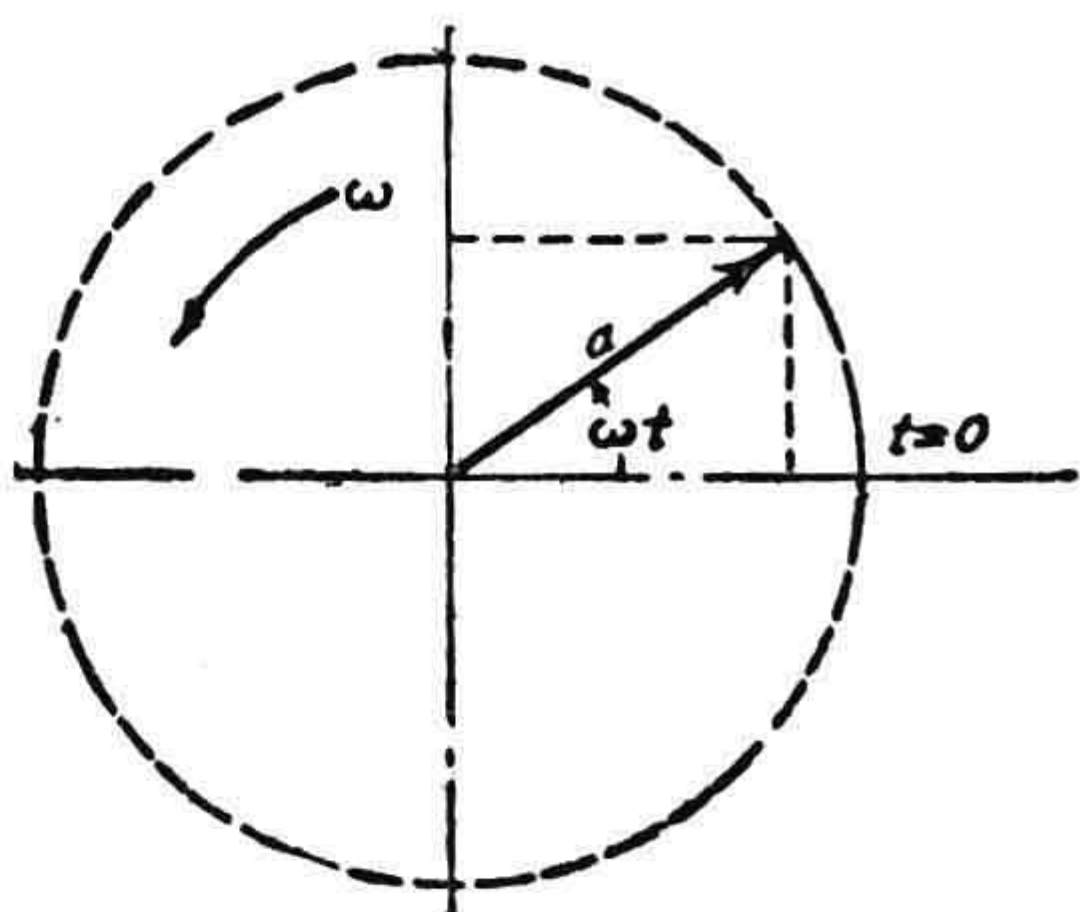


图1-3 简谐振动用一个旋转矢量的投影来代表。

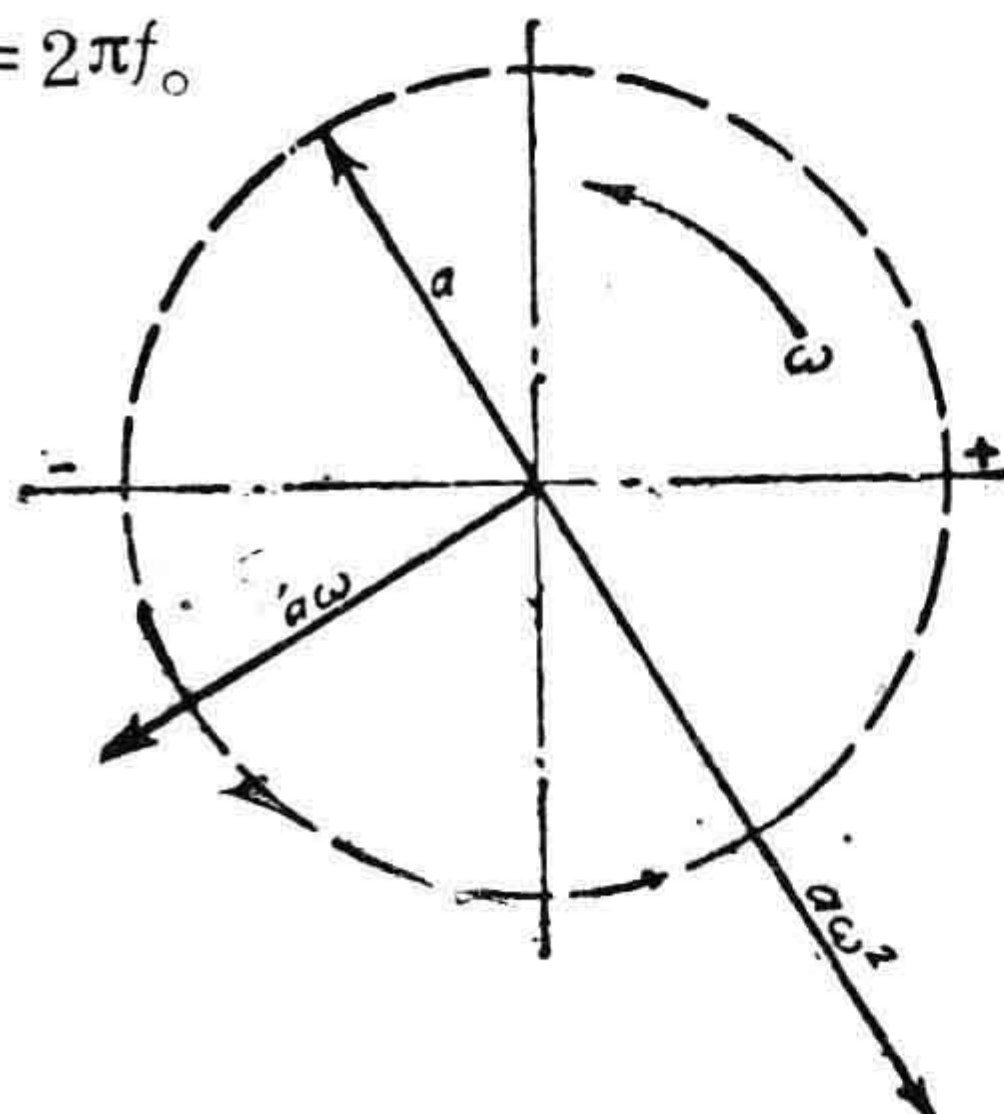


图1-4 位移、速度和加速度矢量的相互位置。

运动 $x = x_0 \cos \omega t$ 的速度, 如前, 为

$$\dot{x} = -x_0 \omega \sin \omega t,$$

它可以用长度为 $x_0 \omega$ 的矢量的水平投影来代表, 此矢量以与位移矢量相同的角速度 ω 旋转并永远比位移矢量超前 90° 。至于加速度 $\ddot{x} = -x_0 \omega^2 \cos \omega t$ 则可以用长度为 $x_0 \omega^2$ 的矢量的水平投影来代表, 此矢量亦以与位移矢量相同的 ω 旋转并永远比位移矢量超前 180° 。图 1-4 示三者的相互位置。

一点如受两个同频率而相角为 φ 的运动, 其合成运动虽可用

三角方法求出,但极繁瑣。如用矢量代表該两运动,則此点的合成运动极易从两矢量的相加得出。举一特殊情况作例子來說,如两运动分别为 $a \sin \omega t$ 和 $b \cos \omega t$, 此时相角 φ 适为 90° 。如以矢量表示,則此两矢量互相垂直,如图 1-5 所示。自图,立即可以得出其合成运动为

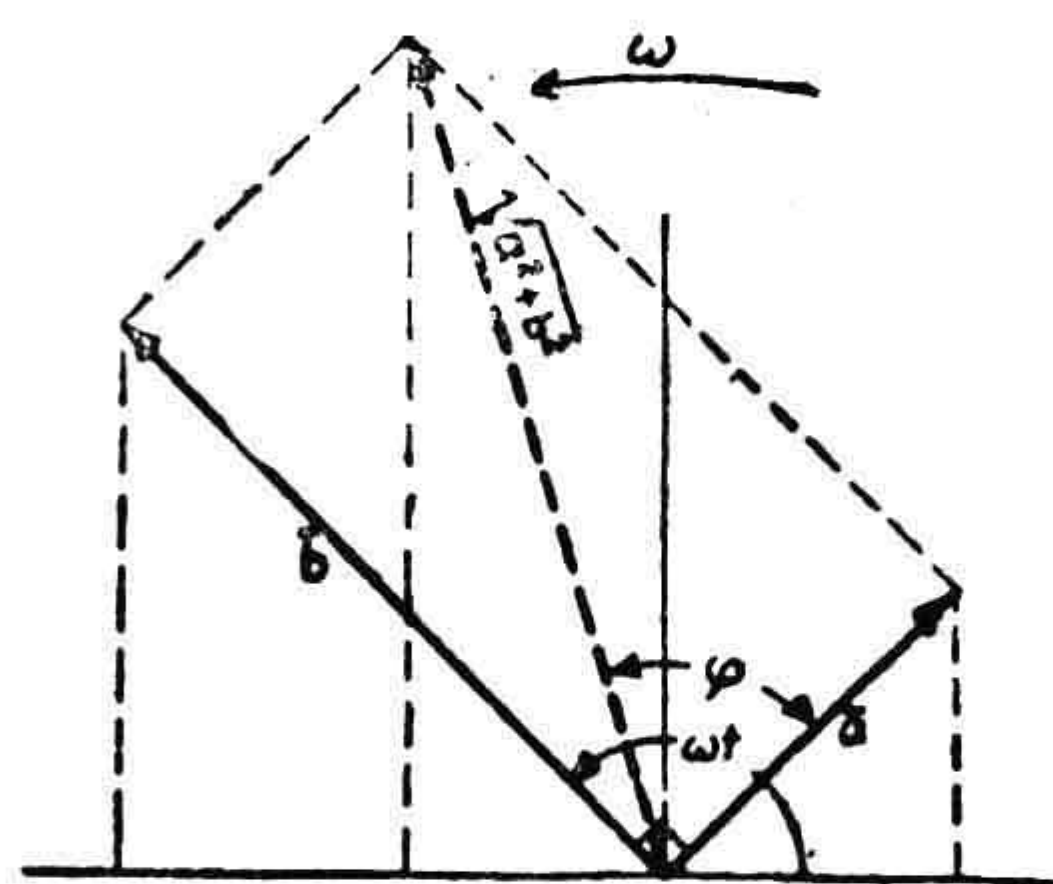


图1-5 不同振幅的正弦曲綫和余弦曲綫的相加。

$$a \sin \omega t + b \cos \omega t = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\omega t + \varphi), \quad (1-6)$$

式中 $\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}$ 。此式在以后常見应用。

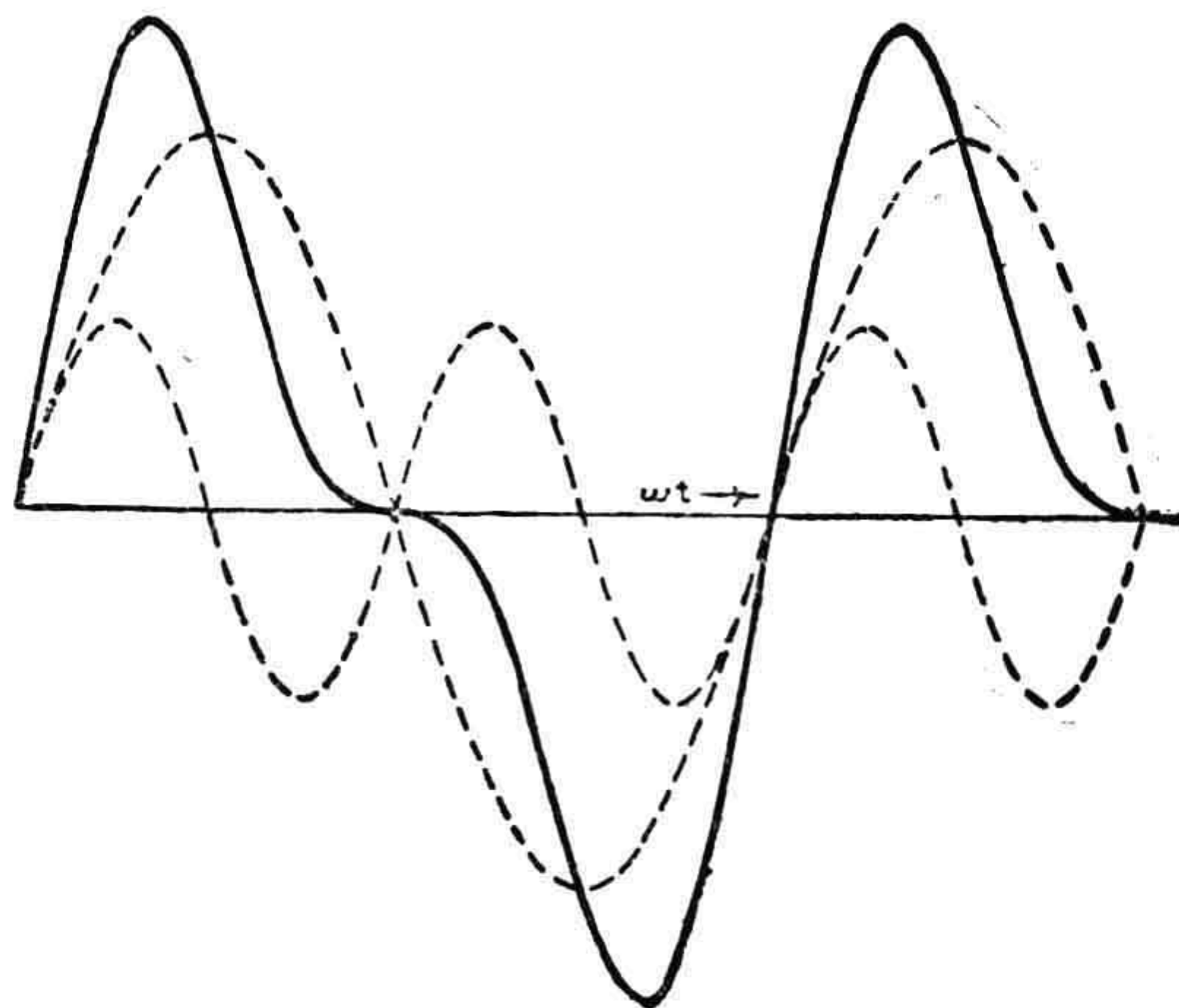


图1-6 两頻率不同簡諧运动之和,不再为簡諧运动。

值得注意的是,所有簡諧运动总是周期运动,而周期运动却不一定是簡諧运动。譬如,把两个頻率不同的正弦曲綫相叠加,則

$$x = a \sin \omega t + \frac{a}{2} \sin 2 \omega t,$$

此合成曲綫示于图1-6。显然,这是周期运动,但不是簡諧运动。

数学証明,任何頻率為 ω 的周期曲綫 $f(t)$ 可分解为頻率為 $\omega, 2\omega, 3\omega, \dots$ 諸正弦曲綫的級数,即

$$f(t) = A_0 + A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + A_2 \sin(2\omega t + \varphi_2) + A_3 \sin(3\omega t + \varphi_3) + \dots, \quad (1-7)$$

惟須 $f(t)$ 每隔 $T = \frac{2\pi}{\omega}$ 時間后又見重复。上列級数称为傅利叶級数，其中諸曲綫的幅 $A_1, A_2, \dots$ 和相角 $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ 可由解析方法定出，如周期曲綫 $f(t)$ 已行給出的話。級数中的第二項称为 $f(t)$ 的基諧波或第一諧波，其具有頻率 $n\omega$ 的 $n+1$ 項称为 $f(t)$ 的 n 次諧波。

1-3 一个自由度系統的振动

1 自由度的意义

一个系統振动过程的特性极大程度上决定于該系統的自由度的数目。自由度的意义可以这样來說明。如果一个机械系統的运动受有約束，它的几何位置在任何時間可用一个数表达，則此系統便认为有一个自由度。汽缸里来回运动着的活塞即为一例，活塞在任何時間的位置可由其离缸端的距离而定。一个悬挂于彈簧上的重块，受有导板的限制，只能上下振动，則为一个自由度振动系統的典型例子。此系統如图 1-8 所示，它只能用一种方式振动。

图 1-7 a 所示为一剛体，由于彈簧的作用，在上下摆动。根据图中結構，剛体在任何時間的位置可由其偏轉角 φ 确定。毫無疑問，这也是一个自由度的振动系統（彈簧质量不計）。

如果两个重块用彈簧联接，并因受約束之故，每个物体只能沿直綫上下移动而不能轉动的話，則此系統有二个自由度。决定此系統的位置的两个数可以如图 1-7 b 所示。图中 x_1 为第一物体离定点 O 的距离， x_2 为第二物体离定点 O 的距离， x_1 和 x_2 决定了此系統的位置。

图 1-7 c 所示为三个自由度的系統，因为它有二个平动和一个轉动，需要三个数 x, y 和 φ 来表示它的运动。

剛体在空間自由运动有六个自由度。它有三个轉动和三个平动，因此需要六个数来表示它的位置。