（第5版）

非线性系统手册

混沌，分形，元胞自动机，遗传算法，基因表达式编程，支持向量机，小波，隐马尔可夫模型，模糊逻辑与C++、JAVA和SymbolicC++程序

The Nonlinear Workbook

(5th Edition)

[美] Willi-Hans Steeb ◎ 著

徐玉秀 ◎ 等译

覆盖工程及非工程系统，配套实践性极高的计算程序和实战练习

➡ 名副其实的“非线性系统工具箱”

全面介绍非线性动力系统研究方法及其计算程序

➡ 揭示复杂非线性动力学现象

分岔/混沌/分形/元胞自动机/孤立子/符号动力学

電子工業出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
http://www.phei.com.cn

非线性系统手册

混沌，分形，元胞自动机，遗传算法，基因表达式编程，支持向量机，
小波，隐马尔可夫模型，模糊逻辑与 C++、JAVA 和 SymbolicC++程序

（第 5 版）

The Nonlinear Workbook

Chaos, Fractals, Cellular Automata, Genetic Algorithms, Gene Expression
Programming, Support Vector Machine, Wavelets, Hidden Markov Models,
Fuzzy Logic with C++, Java and SymbolicC++ Programs

(5th Edition)

［美］ Willi-Hans Steeb 著

徐玉秀 邢诗蓉 李雅峰
段守泽 张雪峰 梁晓玉 译

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京 · BEIJING

内 容 简 介

本书是第 5 版，内容共分 18 章；第 1 章介绍一维、二维的非线性混沌映射，第 2 章介绍时间序列分析，第 3 章介绍平面自治系统，第 4 章介绍非线性哈密顿系统，第 5 章介绍非线性耗散系统，第 6 章介绍非线性动力学系统，第 7 章介绍混沌控制，第 8 章介绍混沌同步性，第 9 章介绍分形学，第 10 章介绍元胞自动机，第 11 章介绍微分方程求解，第 12 章介绍优化，第 13 章介绍神经网络，第 14 章介绍遗传算法，第 15 章介绍基因表达式程序设计，第 16 章介绍小波，第 17 章介绍离散隐马尔可夫过程，第 18 章介绍模糊集与模糊逻辑。

本书包括丰富的非线性振动分析方法及其求解的程序设计。内容不仅丰富，而且实用，是研究非线性振动系统强大的工具用书。书中罗列了各种方法及其计算程序，对读者使用非常方便。

本书所描述的非线性系统的分析方法都是经典的、常见的、实用的，它不仅对工程的非线性系统的分析具有重要意义，而且对非工程系统(政治学、经济学、社会学)的非线性分析同样具有重大意义。

本书可作为工程研究人员、研究生及经济、政治的分析研究人员等对广义的非线性系统的分析研究的参考资料，还可作为相关工程技术人员的工具手册。

图书在版编目(CIP)数据

非线性系统手册：第 5 版：混沌，分形，元胞自动机，遗传算法，基因表达式编程，支持向量机，小波，隐马尔可夫模型，模糊逻辑与 C++、JAVA 和 SymbolicC++程序/（美）斯蒂伯（Steeb，W. H.）著；徐玉秀等译. —北京：电子工业出版社，2013.1

书名原文：The Nonlinear Workbook (5th Edition): Chaos, Fractals, Cellular Automata, Genetic Algorithms, Gene Expression Programming, Support Vector Machine, Wavelets, Hidden MarkovModels, Fuzzy Logic with C++, Java and SymbolicC++ Programs

ISBN 978-7-121-19410-8

Ⅰ.①非… Ⅱ.①斯…②徐… Ⅲ.①随机非线性系统—手册 Ⅳ.①O211.6-62

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 004482 号

策划编辑：郭穗娟　特约编辑：孙志明
责任编辑：刘　凡
印　　刷：三河市鑫金马印装有限公司
装　　订：三河市鑫金马印装有限公司
出版发行：电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路 173 信箱　邮编 100036
开　　本：787×1092　1/16　印张：30.5　字数：778 千字
印　　次：2013 年 1 月第 1 次印刷
定　　价：78.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：（010）88254888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线：（010）88258888。

译者序

随着科学技术的发展，非线性问题出现在许多学科中。传统的线性化方法已不能满足解决非线性问题的要求，非线性动力学也就由此产生。经过多年的发展，非线性动力学已发展出了许多分支，如分岔、混沌、孤立子和符号动力学等。然而，不同的分支之间又不是完全孤立的，而且非线性动力学问题的解析解也是很难求解的。因此，直接分析非线性动力学问题解的行为也是本书研究非线性动力学方法的特点之一。

近 20 年来，非线性动力学在理论和应用两个方面均取得了很大进展。这促使越来越多的学者基于非线性动力学观点来思考问题，并采用非线性动力学理论和方法，对工程科学、生命科学、社会科学等领域中的非线性系统建立数学模型，预测其长期的动力学行为，揭示内在的规律性，提出改善系统品质的控制策略。一系列成功的实践使人们认识到：许多过去无法解决的难题源于系统的非线性，而解决难题的关键在于对问题所呈现的分岔、混沌、分形、孤立子等复杂非线性动力学现象具有正确的认识和求解方法。

非线性动力学理论和方法正从低维向高维乃至无穷维发展，伴随着计算机代数、数值模拟和图形技术的进步，非线性动力学所处理的问题规模和难度不断提高，已逐步接近一些实际系统。在工程科学界，以往研究人员对于非线性问题绕道而行的现象正在发生变化。人们不仅力求深入分析非线性对系统动力学的影响，而且使系统和产品的动态设计、加工、运行与控制满足日益提高的运行速度和精度需求。

本书是一本针对非线性系统分析求解的非常全面的专著。书中所述的非线性动力系统研究方法非常全面，各章内容和对应的分析程序包含了丰富的非线性动力系统分析方法和相应的计算程序，这给非线性系统研究者提供了非常便利的工具。所以，本书是名副其实的“非线性系统工具箱”。

由于书中所描述的非线性系统的分析方法都是经典的、常用的方法，所以它不仅对工程的非线性系统分析具有很大的指导意义，而且对非工程系统（政治学、经济学、社会学）的非线性分析也具有很大的借鉴意义。

参加本书翻译的人员都本着谨慎、认真的态度，尽量准确把握原著作者原意的原则进行翻译，其中所有程序都是源于原著的。

本书不仅适用于工程技术研究人员及研究生的非线性动力系统的分析研究，而且也适用于政治、经济的分析研究人员等对广义的非线性系统的分析研究。本书应用领域较宽，是一本非常“给力”的非线性工具书。

译者

2012.10.6

前言

Preface

混沌、分形、元胞自动机、神经网络、遗传算法和模糊逻辑这些学科是科学领域最有趣的一类科目，这些领域大多互相联系，如混沌吸引子用于神经网络，遗传算法用于训练神经网络，分形用于数据压缩等。当系统输入值不清晰时，经常要结合神经网络和模糊逻辑解决问题。

本书将介绍这些学科的基本概念、定义、定理和算法。其中，算法通过 C＋＋、Java 和 SymbolicC＋＋程序执行。通过本书的介绍可以让读者了解这个主题的早期科学研究，且本书追求一种实际计算和潜在数学理论之间的平衡。

第 1 章解决一维和二维的非线性映射。介绍与混沌系统相关的数量特征，算法给出了描述混沌的相关数据。例如，不变密度、李雅普诺夫指数、相关积分、自相关函数、产能、相位图、庞加莱截面、傅里叶变换、精确轨迹计算、不动点及它们的稳定性……同时，研究混沌排斥子和一维混沌映射编码，推导牛顿法在一维和二维的情况，介绍周期轨道和拓扑度等。

一个动力系统通常不能用微分方程或差分方程仿真，但是一次实验却可以提供一个时间序列。第 2 章将研究混沌时间序列中的量，包括对金融市场有重要作用的 Hurst 指数及相关的 Higuchi 算法。

第 3 章描述平面上不动点的分类。此外，还研究重要的二维动力系统，如钟摆、极限循环系统和 Lotka-Volterra 模型，还介绍了同宿轨道。

第 4 章描述可积和混沌的哈密顿系统。介绍一些其他概念：可积哈密顿系统的 LAX 表示法，庞加莱截面和 Floquet 理论。

第 5 章研究非线性耗散系统，介绍最著名的带有混沌特征的耗散系统——洛伦兹模型。同时，还将讨论霍普夫分岔和超混沌系统。

非线性驱动系统在工程中扮演着一个核心的角色，尤其是在电子产品中。大多数情况下，驱动力具有周期性。第 6 章将致力于介绍这些系统，在其他例子中，我们选取驱动摆和驱动范德波尔方程来介绍。此外，还将讨论挠系数的概念。

混沌系统的控制在工程应用中非常重要。第 7 章将讨论混沌控制的不同概念，系统地介绍针对混沌系统控制的 OGY 方法。

第 8 章描述混沌系统的同步性，同时介绍一系列的应用，例如，Rikitake 耦合发电机。

分形学不仅在艺术领域，而且在许多不同的科学领域都引起了人们广泛的兴趣，如压缩算法。第 9 章介绍迭代函数系统、Mandelbrot 集、Julia 集和 Weierstrass 函数。著名的康托集、科赫曲线、分形蕨和谢尔宾斯基垫片将被作为例子说明。同时，我们利用 Kronecker 矩阵积来提取分形的结构，还介绍了灰度图。

元胞自动机是离散自动系统。第 10 章将介绍一维和二维的元胞自动机，涉及由 C＋＋程序实现的著名人生游戏和由 Java 程序实现的按钮游戏，而 Sznajd 模型被当作一个应用程序来研究。

第 11 章是关于一体化的微分方程组。将讲述欧拉方法、龙格－库塔方法、李级数方法、偶对整合、Verlet 方法……还将深入讨论气象学的解决方法、无形混沌和整合的复杂领域。

第 12 章研究优化问题。介绍优化问题的拉格朗日乘数法和利用微分形式的另一种方法。对于

不等式约束问题，提供了 Karush-Kuhn-Tucker 条件，还研究支持向量机。支持向量机的一种简单快速学习过程——Kernel-Adatron 算法。学习应用程序的一个核 Fisher 判别方法。

第 13 章讲述神经网络的学习，介绍 Hopfield 算法、Kohonen 自我组织图、反向传播算法和径向基函数网络。所举的一个应用是旅游商人问题。另外还介绍神经振子模型。

遗传算法用于解决优化问题。第 14 章重点介绍这项技术，讨论有约束和无约束条件下的优化问题，提供一个按位运算操作，还模拟研究热处理。基因表达式程序设计是一种利用编码个体的新遗传算法。个人基因表达式设计就是编码那些经过表示和翻译的表示树的线性染色体。线性染色体是通过修改传递给下一代的遗传物质。第 15 章通过 C++程序介绍这项技术，作为基因表达式程序设计的代替，通过 C++程序介绍多维表示编程。

第 16 章介绍小波分析。小波分析是一种和傅里叶变换类似的数学变换，它在时域内提取信号，然后在频域内表示出来。小波函数不同于其他的变换，是因为它们不仅将信号解剖成它们构成的频率，而且通过改变比例对构成的频率进行分析，并列举了滤波应用实例，还介绍了 Harr 小波和 Daubechies 小波以及二维小波。

第 17 章介绍离散型隐马尔科夫模型、向前向后迭代算法、维特比算法、波氏算法。特别介绍了这些模型及算法在语音识别中的应用。

模糊集自从在 40 年前全面启动以来，它不只是在科学领域，而且在其他许多学科都取得了各种形式的进步。第 18 章重点介绍模糊逻辑，结合模糊数学和算术，进一步介绍决策问题和应用模糊逻辑的控制问题，包括模糊聚类和模糊 XOR 的定义。

本书每一章都给出 C++、Java 和 SymbolicC++程序的执行算法。

毫无疑问，本书存在很多不妥之处，欢迎读者批评指正。可以通过 E-mail 和著者联系：

steebwilli@gmail. com

steeb_wh@yahoo. com

著者的个人网站：

http://issc. uj. ac. za

ISSC 提供这些学科的文凭课程。如果你想学习任一门课程，请联系著者。

著　者

符号索引

$\varnothing$	空集
$A\subset B$	A 包含于 B
$A\cap B$	集合 A 与集合 B 的交集
$A\cup B$	集合 A 与集合 B 的并集
χ_A	指示函数
$\mathbb{N}$	正整数集：自然数
$\mathbb{Z}$	整数集
$\mathbb{Q}$	有理数集
$\mathbb{R}$	实数集
$\mathbb{R}^+$	非负实数集
$\mathbb{C}$	复数集
$\mathbb{R}^n$	n 维实线性空间
$\mathbb{C}^n$	n 维复线性空间
i	$:=\sqrt{-1}$
$\Re z$	复数 z 的实部
$\Im z$	复数 z 的虚部
$\{0, 1\}^n$	n 维二进制超立方体
$[a, b]$	a 与 b 间的实数闭区间
$[0, 1]$	单位区间
S^1	单位圆
f	映射
$f\circ g$	映射的合成 $(f\circ g)(x)=f[g(x)]$
$f^{(n)}$	映射 f 经过 n 次迭代
$X\in\mathbb{R}^n$	向量空间 $\mathbb{R}^n$ 中的元素 X，列向量
$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}$	X 的转置（行向量）
$\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}$	向量空间 $\mathbb{R}^n$ 中的数积
t	时间：离散或连续取决于上下文
X	因变量：离散系统
X^*	映射中的不动点
u	因变量：连续系统
ρ	不变密度
r	分叉参数，控制参数
$\Vert\cdot\Vert$	范数
tr	方阵的迹
det	方阵的行列式
$\boldsymbol{I}_n$	$n\times n$ 的单位矩阵
$[\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}]$	$n\times n$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 换位
δ_{jk}	克罗内克符号：当 $j=k$ 时，$\delta_{jk}=1$；当 $j\neq k$ 时，$\delta_{jk}=0$。
L	拉格朗日函数
H	哈密顿函数

λ	拉格朗日乘子
λ	特征值
η	学习率
I	单位算子
$\boldsymbol{w}$	权向量（列向量）
$\Delta\boldsymbol{w}$	$\boldsymbol{w}$ 的一个小变化
$\boldsymbol{W}$	权矩阵
$\boldsymbol{\Theta}$	偏差向量
$\{x_k, d_k\}$	第 k 组训练对
net	加权或 $\boldsymbol{w}^{\mathrm{T}}x$
$f(net)$	可微活化函数：通常是一个 sigmoid 函数
$f'(net)$	函数 f 关于 net 的导数
$\mu_{\tilde{A}}$	隶属度函数（模糊逻辑）
$\oplus$	逐位异或
$\otimes$	矩阵的克罗内克积
$\wedge$	楔积（外积，外代数）
$L_2(\Omega)$	平方可积函数的希尔伯特空间
$l_2(\mathbb{N})$	所有无限维序列的希尔伯特空间

程序注解

由于 C++程序遵循 ANSI C++标准。因此，它们应该在所有的编译器下运行。

第 3 版的 SymbolicC++是一种完全用 ANSI C++书写的符号操作工具（Y. Hardy，Tan Kiat Shi，W.-H. Steeb[87]）。它包括用于符号操作和数字操作的几个类别。这些类包括符号、有理数、超长数、四元数、导出数、向量、矩阵、数组、多项式。

标准模版库中的类以及 C++中的字符串类都被广泛使用。通常用符号类进行符号操作。

第 3 版的 Symbolic C++可参考网页：

http://issc.uj.ac.za/symbolic/symbolic.html

我们已经用 GCC 4.1.3 和 Microsoft Visual Studio.net（VC8）对 C++程序进行了测试。

在 C++程序中，图形并不属于标准类。这里，我们使用 GnuPlot（GNUPLOT Copyright © 1986—1993，1998，Colin Kelly and Thomas Williams）进行绘图。

Java 程序已经用 JDK 1.6 测试过。JDK 是 Sun Microsystems 公司的产品。JDK 允许我们开发一些支持在 Java 平台 1.6 的浏览器中运行的程序。本书所使用的 Java 工具是把写入 Java 程序设计语言中的程序，编译成字节码的 Java 编译器（javac）和执行 Java 字节码的 Java 注释器（java）。也就是说，它运行被写入 Java 程序设计语言中的那些程序。Java 阅读器允许运行一个或多个用 APPLET 标记的网页（HTML 文件）中的被称为编号的 Java 程序。Java 阅读器能找出在 HTML 文件中的 APPLET 标记，并按由标记指定的说明运行程序（在独立的窗口中）。

本书中列出的多数程序都是为了便于初学者理解。实际上，一些程序是可以改进的，并且可以改成一种更加精炼的形式。

目　录

第 1 章 非线性混沌映射

1.1 一维映射

本章节将讨论非线性一维混沌映射（Devaney[47]，Arrowsmith 和 Place[7]，Holmgren[98]，Collet 和 Eckmann[37]，Gumowski 和 Mira[77]，Ruelle[177]，Baker 和 Gollub[10]，van Wyk 和 Steeb[209]）。

$$f: S \to S, \qquad S \subset \mathbb{R}$$

大多数情况下集合 S 为 $S=[0, 1]$或 $S=[-1, 1]$，一维映射也可以写成差分方程：

$$x_{t+1}=f(x_t), \qquad t=0, 1, 2, \cdots \qquad x_0 \in S$$

赋予一个初始值 $x_0 \in S$，通过映射可得到以下迭代序列：

$$x_0, x_1, x_2, \cdots$$

或

$$x_0, f(x_0), f[f(x_0)], f\{f[f(x_0)]\}, \cdots$$

对于任意的 $x_0 \in S$，序列 x_0，x_1，x_2，…称为由 x_0产生的前向轨道（或前向轨迹）。一个动力系统的目标是研究所有轨道的性质并分析那些具有周期性、最终周期、渐进性轨道的集合等。从而，我们希望了解到当 $t \to \infty$时会发生的情况。在某些情况下，一些长期的动力学行为是非常简单的。

【例 1-1】 映射 f：$\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$，$f(x)=\sqrt{x}$。对于所有的 $x_0 \in \mathbb{R}^+$和 $x_0>0$，前向轨道趋近于 1，函数的不动点是 0 和 1。

【例 1-2】 对于映射 f：$[0, 1] \to [0, 1]$，$f(x)=x^2$。如果 $x_0=0$，则 $f(x_0)=0$；类似情况，如果 $x_0=1$，则 $f(x_0)=1$，我们称点 0 和 1 是这个映射的不动点。对于 $x \in (0, 1)$，函数的前向轨道趋近于 0。

在很多情况下，一个映射的性质是非常复杂的。接下来，介绍一些动力系统的基本定义。

定义 对于 $x^* \in S$，如果 $f(x^*)=x^*$，则称点 x^*为映射 f 的不动点。

【例 1-3】 对于映射 f：$[0, 1] \to [0, 1]$，$f(x)=4x(1-x)$，$x^*=3/4$ 和 $x^*=0$ 是不动点。

定义 若 $f^{(n)}(x^*)=x^*$，$x^* \in S$，则称点 x^*为 n 周期的一个周期点，其中 $f^{(n)}$表示 f 的第 n 次迭代结果。对于 $f^{(n)}(x^*)=x^*$成立的最小正整数 n 称为点 x^*的主周期。周期点的所有迭代集合形成一个周期轨道。

【例 1-4】 对于映射 f：$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$，$f(x)=x^2-1$，那么点 0 和$-1$ 在以 2 为周期的周期轨道

上，因此有，$f(0)=-1$，$f(-1)=0$。

定义 若 $x*$ 不是周期点，但是存在 $m>0$，使得 $f^{(n+1)}(x^*)=f^{(i)}x^*$，对于任意的 $i\geqslant m$ 均成立，则点 x^* 称为周期 n 的最终周期。也就是说，若 $i\geqslant m$，则 $f^{(i)}(x^*)$ 具有周期性。

【例 1-5】 对于映射 f：$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，$f(x)=x^2-1$，赋予初值 $x_0=\sqrt{2}$，可得到轨道 $x_1=1$，$x_2=0$，1，$x_4=0$，…即轨道最终具有周期性。

定义 x^* 是主周期 n 的一个周期点。若 $|(f^{(n)})'(x^*)|\neq 1$，其中′表示函数 $f^{(n)}$ 在点 x 的导数，则称点 x^* 具有双曲性。

【例 1-6】 对于映射 f_c：$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，$f_c(x)=x^2+c$，$c\in\mathbb{R}$。那么不动点是 $x_\pm^*=1/2\pm\sqrt{1/4-c}$，则 $f_c'=\mathrm{d}f_c/\mathrm{d}x=2x$，$\mathrm{d}f_c(x_+^*)/\mathrm{d}x=1+\sqrt{1-4c}$。当 $c=1/4$ 时，$|f_c'(x_+^*)|=1$，并且不动点具有非双曲性。

定理 若 x^* 是一个双曲不动点，且 $|f'(x^*)|<1$，则关于 x^* 存在一个开区间 U，使得当 $x\in U$ 时，有

$$\lim_{n\to\infty} f^{(n)}(x)=x^*$$

定义 设 M 为微分流形，如果 f 是一个连续可微的双满射，则映射 f：$M\to M$ 称为微分同胚映射。

【例 1-7】 对于映射 f：$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，$f(x)=\sinh(x)$ 是微分同胚映射。

【例 1-8】 对于映射 f：$\mathbb{R}\to\mathbb{R}$，$f(x)=x^3$ 不是微分同胚映射，因为它在 0 点没有导数。

下面将介绍一些非线性混沌映射的重要概念。这些概念如下：

(1) 不动点；
(2) 李雅普诺夫指数；
(3) 不变密度；
(4) 自相关函数；
(5) 力矩；
(6) 傅里叶变换；
(7) 分岔图；
(8) 费根鲍姆数；
(9) 符号动力学；
(10) 混沌排斥子。

在以上所举的例子中，我们研究的一维映射有逻辑斯蒂映射、帐篷映射、伯努利映射、高斯映射、平帐篷映射和圆映射。用一维映射来反映混沌行为的一个重要条件是这个映射不可逆。

1.1.1 精确数值轨迹

在本节中将计算三维映射的轨迹。

【例 1-9】 考虑映射 f：$\mathbb{N}\to\mathbb{N}$

$$f(x):=\begin{cases}x/2, & x\text{ 是偶数}\\ 3x+1, & x\text{ 是奇数}\end{cases}$$

其中 N 为自然数。由这个映射可以推测出：对于所有初始值，轨迹最终趋于周期轨道…4 2 1 4 2 1…，无符号长整型（4 字节）数据在 C++中被限制的范围为 0…4294967295 和有符号长整型数据（4 字节）在 C++中被限制范围是−2147483648…+2147483647。

对于更大的初始值，我们使用 C++符号中的抽象数据类型 Verylong 来检查这个猜想。在这一类中所有算术运算符重载，重载运算符有+，−，*，/，%，+=，−=，*=，/=。

【例 1-10】 设初始值为 28，有以下序列 14，7，22，11，34，17，52，26，13，40，20，10，5，

16，8，4，2，1，…那么，轨道最终具有周期性。在程序 trajectory1.cpp 中，我们选择两个不同的初始值分别为 28 和 998123456789。

```
// trajectory1.cpp
#include <iostream> // for cout
#include "verylong.h" // for data type Verylong of SymbolicC++
using namespace std;
int main(void)
{
unsigned long y = 28; // initial value
unsigned long T = 20; // number of iterations
unsigned long t;
for(t=0;t<T;t++)
{ if((y%2)==0) y = y/2; else y = 3*y+1; cout << y << endl; }
Verylong x("998123456789"); // initial value
Verylong zero("0"), one("1"), two("2"), three("3");
T = 350;
for(t=0;t<T;t++)
{ if((x%two)==zero) x = x/two; else x = three*x + one; cout << x << endl; }
return 0;
}
```

Java 提供了 BigInteger 类型。在 Java 中，由于运算符号（如+，－，*，/,%）重载，所以 Java 使用以下方法做算术运算。方法如下：

```
add(), subtract(), multiply(), divide(), mod()
```

其中，divide()提供整数除法。该构造 BigInteger（String val）是将指定的字符串转换为十进制表示形式，此外，BigInteger（String val）还提供了数据范围。

```
BigInteger.ONE          BigInteger.ZERO
// Trajectory1.java
import java.math.*;
public class Trajectory1
{
public static void main(String[] args)
{
BigInteger X = new BigInteger("998123456789");
BigInteger TWO = new BigInteger("2");
BigInteger THREE = new BigInteger("3");
int T = 350;
for(int t=0;t<T;t++)
{
if((X.mod(TWO)).equals(BigInteger.ZERO)) X = X.divide(TWO);
else { X = X.multiply(THREE); X = X.add(BigInteger.ONE); }
System.out.println("X = " + X);
}
}
}
```

【例 1-11】 讨论逻辑斯蒂映射的轨迹，逻辑斯蒂映射 f：[0，1] → [0，1] 给出方程 $f(x)=4(x)(1-x)$，该映射也可以写成差分方程：

$$x_{t+1}=4x_t(1-x_t)$$

式中，$t=0，1，2，\cdots$，并且 $x_0\in[0，1]$，它遵循 $x_t\in[0，1]$，$t\in\mathbb{N}$，设初始值 $x_0=1/3$，可得

$$x_1=\frac{8}{9}，X_2=\frac{32}{81}，x_3=\frac{6272}{6561}，x_4=\frac{7250432}{43046721}，\cdots$$

所以逻辑斯蒂映射的精确解为

$$x_t=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos[2^t\arccos(1-2x_0)]$$

在 C++程序 trajectory2. cpp 中，可使用 C++符号的抽象数据类型 Verylong 评估 $t=10$ 的精确轨迹。对于 $t=7$，得到

$$x_7=\frac{338382616201936779639722410803\,2}{343368382029251248465784908928\,1}$$

```
// trajectory2a.cpp
#include <iostream>
#include "verylong.h" // for data type Verylong
#include "rational.h" // for data type Rational
using namespace std;
inline void map(Rational<Verylong>& x)
{
Rational<Verylong> one("1"); // number 1
Rational<Verylong> four("4"); // number 4
Rational<Verylong> x1 = four*x*(one-x);
x = x1;
}
int main(void)
{
Rational<Verylong> x0("1/3"); // initial value 1/3
unsigned long T = 10; // number of iterations
Rational<Verylong> x = x0;
cout << "x[0] = " << x << endl;
for(unsigned long t=0;t<T;t++)
{ map(x); cout << "x[" << t+1 << "] = " << x << endl; }
return 0;
}
```

在以下 C++程序 trajectory3. cpp 中，可用基本的数据类型 double 评估数值轨迹，发现这些数值和精确值之间的差异，例如，当 $t=40$ 时，

$$x_{40精确}-x_{40近似}=0.055008-0.055015=-0.000007$$

```
// trajectory2b.cpp
#include <iostream>
using namespace std;
inline void map(double& x) { double x1 = 4.0*x*(1.0-x); x = x1; }
int main(void)
{
```